

Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la  
cohomologie étale des schémas quasi-excellents.  
Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008

Luc Illusie, Yves Laszlo et Fabrice Orgogozo

Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel  
Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroth, et Michael Temkin.

arXiv:1207.3648v1 [math.AG] 16 Jul 2012



## Table des matières

|  |    |
|--|----|
| Exposé 0. Introduction<br>par Luc Illusie  | 1  |
| Exposé I. Anneaux excellents<br>par Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo       | 7  |
| 1. Introduction  | 7  |
| 2. Définitions   | 7  |
| 3. Exemples immédiats.   | 10 |
| 4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.                  | 10 |
| 5. Permanence par localisation et extension de type fini                         | 11 |
| 6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais         | 13 |
| 7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents                       | 14 |
| 8. Hensélisation et anneaux excellents   | 15 |
| 9. Complétion formelle et anneaux excellents                                     | 16 |
| 10. Approximation d'Artin et anneaux excellents                                  | 17 |
| 11. Exemples de méchants anneaux noethériens                                     | 18 |
| Exposé II. Topologies adaptées à l'uniformisation locale<br>par Fabrice Orgogozo | 23 |
| 1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie alt/S                     | 23 |
| 2. Topologies : définitions  | 26 |
| 3. Formes standards  | 28 |
| 4. Applications  | 31 |
| Exposé III. Approximation<br>par Luc Illusie et Yves Laszlo                      | 35 |
| 1. Introduction  | 35 |
| 2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu                                  | 35 |
| 3. Approximations et topologie des altérations                                   | 36 |
| 4. Gradués supérieurs et approximations de complexes                             | 39 |
| 5. Modèles et $\alpha$ -isomorphismes  | 41 |
| 6. Réduction au cas local noethérien complet                                     | 43 |
| Exposé IV. Le théorème de Cohen-Gabber<br>par Fabrice Orgogozo                   | 47 |
| 1. $p$ -bases et différentielles (rappels)                                       | 47 |
| 2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique $> 0$                        | 50 |
| 3. Autour du théorème de Epp   | 55 |
| 4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte                          | 56 |
| Exposé V. Algébrisation partielle<br>par Fabrice Orgogozo                        | 63 |

|   |     |
|---|-----|
| 1. Préparatifs (rappels)  | 63  |
| 2. Algébrisation partielle en égale caractéristique   | 64  |
| 3. Algébrisation partielle première à $\ell$ en caractéristique mixte                           | 66  |
| Exposé VI. Log régularité, actions très modérées<br>par Luc Illusie                             | 69  |
| 1. Log régularité   | 69  |
| 2. Revêtements Kummer étales  | 71  |
| 3. Actions très modérées  | 73  |
| 4. Points fixes   | 76  |
| Exposé VII. Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)<br>par Fabrice Orgogozo  | 81  |
| 1. Énoncé   | 81  |
| 2. Réductions : rappel des résultats antérieurs   | 81  |
| 3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong                           | 81  |
| 4. Résolution des singularités  | 82  |
| Exposé VIII. Gabber's modification theorem (absolute case)<br>par Luc Illusie et Michael Temkin | 85  |
| 1. Statement of the main theorem  | 85  |
| 2. Functorial resolutions   | 86  |
| 3. Resolution of log regular log schemes  | 97  |
| 4. Proof of Theorem 1.1 – preliminary steps   | 116 |
| 5. Proof of Theorem 1.1 – abelian inertia   | 122 |
| Exposé IX. Uniformisation locale première à $\ell$<br>par Luc Illusie                           | 131 |
| 1. Rappel de l'énoncé et premières réductions   | 131 |
| 2. Log régularité, fin de la démonstration  | 133 |
| Exposé X. Gabber's modification theorem (log smooth case)<br>par Luc Illusie et Michael Temkin  | 135 |
| 1. The main theorem   | 135 |
| 2. Prime to $\ell$ variants of de Jong's alteration theorems                                    | 148 |
| 3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction                                 | 155 |
| Exposé XI. Produits orientés<br>par Luc Illusie   | 171 |
| 1. Construction des produits orientés   | 171 |
| 2. Tubes et changement de base  | 176 |
| 3. Produits fibrés  | 182 |
| 4. Topos évanescents et co-évanescents  | 183 |
| Exposé XII. Descente cohomologique orientée<br>par Fabrice Orgogozo                             | 189 |
| 1. Acyclicité orientée des morphismes propres   | 189 |
| 2. Descente cohomologique orientée  | 191 |
| Exposé XIII. Le théorème de finitude<br>par Fabrice Orgogozo                                    | 195 |
| 1. Introduction   | 195 |

|   |     |
|---|-----|
| 2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible  | 195 |
| 3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à $\ell$               | 198 |
| 4. Coefficients $\ell$ -adiques   | 204 |
| Exposé XIV. Fonctions de dimension<br>par Vincent Pilloni et Benoît Stroh                     | 207 |
| 1. Universelle caténarité des schémas henséliens  | 207 |
| 2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension                                       | 209 |
| Exposé XV. Théorème de Lefschetz affine<br>par Vincent Pilloni et Benoît Stroh                | 219 |
| 1. Énoncé du théorème et premières réductions   | 219 |
| 2. Pureté, combinatoire des branches et descente  | 220 |
| 3. Uniformisation et approximation des données  | 222 |
| Exposé XVI. Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue<br>par Joël Riou            | 225 |
| 1. Classes de Chern   | 225 |
| 2. Morphismes de Gysin  | 228 |
| 3. Théorème de pureté   | 242 |
| Exposé XVII. Dualité<br>par Joël Riou   | 257 |
| 1. Le morphisme de transition en codimension 1  | 258 |
| 2. Complexes dualisants putatifs et potentiels  | 263 |
| 3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal                | 268 |
| 4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels  | 280 |
| 5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels                                   | 287 |
| 6. Le théorème de dualité locale  | 293 |
| 7. Anneaux de coefficients généraux   | 300 |
| 8. Produits tensoriels de complexes non bornés  | 318 |
| 9. Complexes inversibles  | 323 |
| 10. Coefficients universels   | 325 |
| 11. Modules ind-unipotents  | 327 |
| Exposé XVIII-A. Cohomological dimension: First results<br>par Luc Illusie                     | 331 |
| 1. Statement of the main result and applications  | 331 |
| 2. Proof of 1.1   | 332 |
| Exposé XVIII-B. Dimension cohomologique : raffinements et compléments<br>par Fabrice Orgogozo | 335 |
| 1. Préliminaires  | 335 |
| 2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique                           | 336 |
| 3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique                                      | 338 |
| 4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »                   | 341 |
| 5. Majoration : amélioration  | 343 |
| 6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre époiné : minoration                         | 345 |

|  |     |
|--|-----|
| Exposé XIX. Exemples et contre-exemples<br>par Yves Laszlo   | 349 |
| 1. Introduction  | 349 |
| 2. La construction   | 349 |
| 3. Noethérianité de $A$  | 351 |
| 4. Étude des points doubles  | 354 |
| 5. $D$ est localement mais pas globalement un diviseur à croisements<br>normaux  | 354 |
| Exposé XX. Rigidité<br>par Yves Laszlo et Alban Moreau   | 357 |
| 1. Introduction  | 357 |
| 2. Lemme de rigidité   | 358 |
| 3. Rigidité de la ramification   | 366 |
| 4. Théorème de rigidité de la ramification I : forme faible  | 369 |
| 5. Rigidité de la ramification II : forme forte  | 374 |
| 6. Appendice 1 : sorites champêtres  | 379 |
| 7. Appendice 2 : théorème de changement de base propre d'Artin-<br>Grothendieck pour les champs ind-finis sur des schémas non<br>noethériens | 383 |
| 8. Appendice 3 : sorites sur les gerbes  | 384 |
| Exposé XXI. Le théorème de finitude pour les coefficients non abéliens<br>par Frédéric Déglise   | 389 |
| 1. Introduction  | 389 |
| 2. Image directe de faisceaux d'ensembles constructibles   | 390 |
| 3. Image directe dérivée de faisceaux de groupes constructibles  | 394 |
| 4. Cas de codimension 2 sans hypothèse sur la torsion  | 398 |
| 5. Revêtements principaux d'une surface strictement locale époincée  | 401 |
| Bibliographie  | 407 |

## EXPOSÉ 0

### Introduction

Luc Illusie

Le présent volume rassemble les exposés d'un groupe de travail qui s'est tenu à l'École polytechnique du printemps 2006 au printemps 2008 sur les travaux de Gabber présentés dans [Gabber, 2005a] et [Gabber, 2005b]. Ceux-ci portent sur la cohomologie étale et l'uniformisation des schémas quasi-excellents.

En ce qui concerne la cohomologie étale, un résultat central est le théorème de finitude suivant :

**THÉORÈME 1.** *Soient  $Y$  un schéma noethérien quasi-excellent (cf. I-2.10),  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $n$  un entier inversible sur  $Y$ , et  $F$  un faisceau constructible de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur  $X$ . Alors, pour tout  $q$ ,  $R^q f_* F$  est constructible, et il existe un entier  $N$  tel que  $R^q f_* F = 0$  pour  $q \geq N$ .*

Rappelons que, sans hypothèse sur  $Y$  ni sur  $n$ , mais lorsqu'on suppose  $f$  propre et de présentation finie, les faisceaux  $R^q f_* F$  sont constructibles, et nuls pour  $q > 2d$  si  $d$  majore la dimension des fibres de  $f$  [SGA 4 XIV 1.1]. Si  $f$  n'est pas supposé propre, l'hypothèse que  $n$  soit inversible sur  $Y$  est essentielle : si  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$  et  $X$  la droite affine sur  $Y = \text{Spec}(k)$ ,  $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$  est un  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel de dimension infinie (cf. [SGA 4 XIV 1.3]). Pour  $Y$  excellent de caractéristique nulle, **1** est démontré dans l'exposé d'Artin [SGA 4 XIX]. Si  $S$  est un schéma noethérien régulier de dimension  $\leq 1$  (non nécessairement quasi-excellent) et  $f$  un morphisme de  $S$ -schémas de type fini, la conclusion de **1** est encore vraie, d'après [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. Finitude] 1.1] (ce résultat peut d'ailleurs se déduire de **1**, cf. XIII).

La démonstration d'Artin dans [SGA 4 XIX] utilise la résolution des singularités de Hironaka pour se ramener au cas où  $f$  est l'inclusion du complément d'un diviseur régulier dans un schéma régulier et  $F$  un faisceau constant, auquel cas la conclusion découle du théorème de pureté cohomologique absolu établi également dans (*loc. cit.*).

La démonstration de Gabber de **1** suit la même méthode, mais :

(a) on doit faire appel au théorème de pureté cohomologique absolu établi dans le cas général par Gabber [Fujiwara, 2002],

(b) on ne dispose plus de la résolution des singularités sous la forme de Hironaka ; celle-ci est remplacée par un théorème d'uniformisation locale, dû à Gabber ([Gabber, 2005b]), qui s'énonce ainsi (II-4.3.1, III-6.1, IX-1.1) :

**THÉORÈME 2.** *Soient  $X$  un schéma noethérien quasi-excellent,  $Z$  un fermé rare de  $X$  et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations et telle que, pour tout  $i \in I$  :*

(i)  $X_i$  soit régulier et connexe,

(ii)  $p_i^{-1}(Z)$  soit le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

La topologie des  $\ell'$ -altérations est une topologie du type de celles considérées par Voevodsky (cf. [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001], pour laquelle les  $\ell'$ -altérations (i. e. les morphismes propres surjectifs génériquement finis de degré résiduel générique premier à  $\ell$ ) et les recouvrements étales complètement décomposés (i. e. *de Nisnevich*) sont des familles couvrantes, voir (II-1.2.2) pour une définition précise.

La première partie de ce volume est consacrée, après des rappels, dans I, sur les notions de schéma quasi-excellent ou excellent, à la démonstration de 2 et de certains compléments et variantes.

Il y a trois grandes étapes.

(A) *Fibration en courbes*. La question étant locale pour la topologie de Nisnevich, et en particulier pour la topologie de Zariski, on peut supposer  $X$  de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension  $d$  de  $X$ . On peut supposer  $X$  local hensélien. L'hypothèse de quasi-excellence sur  $X$  permet d'appliquer le théorème d'algébrisation de Popescu au complété  $\widehat{X}$  de  $X$ , et de se ramener, via des techniques d'approximation dues à Gabber, expliquées dans III, au cas où  $X$  est local complet de dimension  $d$ , et même intègre, normal, avec  $d \geq 2$ . On dispose alors des classiques théorèmes de structure de Cohen. Tels quels, ils sont toutefois insuffisants. Mais un délicat raffinement, dû à Gabber, démontré dans IV, permet de se ramener, quitte à remplacer  $X$  par une extension finie de degré générique premier à  $\ell$ , au cas où  $X$  est le complété en un point fermé d'un schéma  $X'$  de type fini et de dimension relative 1 sur un schéma local noethérien régulier complet de dimension  $d - 1$ , et le fermé  $Z$  le complété d'un fermé rare  $Z'$  de  $X'$ . Ce théorème de « fibration », ou « d'algébrisation partielle », est établi dans V. Après quelques nouvelles réductions faciles, on est ramené au cas où  $X$  est un schéma normal intègre, propre sur un schéma affine normal intègre excellent  $Y$  de dimension  $d - 1$ , à fibre générique géométriquement intègre, lisse, et de dimension 1, et le fermé  $Z$  un diviseur de fibre générique étale.

(B) *de Jong et log régularité*. On peut alors appliquer le théorème de la courbe nodale de de Jong, sous sa forme équivariante, [de Jong, 1997, 2.4] : il existe un groupe fini  $G$  et une altération projective  $G$ -équivariante du morphisme  $f : X \rightarrow Y$  en un morphisme  $f' : X' \rightarrow Y'$ , qui est une courbe projective nodale  $G$ -équivariante, et l'image inverse  $Z'$  de  $Z$  un diviseur de composantes dominantes étales et transverses au lieu lisse de  $f'$  (IX-1.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence au quotient de  $Y'$  par un  $\ell$ -Sylow de  $G$ , et utilisant le lemme d'Abhyankar, on se ramène finalement au cas où  $G$  est un  $\ell$ -groupe,  $X = X'/G$ ,  $Y = Y'/G$ ,  $Y'$  contient un fermé ( $G$ -équivariant)  $T'$  tel que le couple  $(Y', T')$  soit *log régulier*, ainsi que le couple  $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$ , où  $D$  est un diviseur ( $G$ -équivariant) étale sur  $Y'$ , avec  $Z' \subset f'^{-1}(T') \cup D$  (cf. VI-1.9, VI-2.1).

(C) *Modifications équivariantes*. Le quotient d'un log schéma log régulier par l'action d'un groupe fini n'est pas en général log régulier. En particulier,  $X = X'/G$ , muni du fermé  $(f'^{-1}(T') \cup D)/G$ , n'est pas nécessairement log régulier. Si ce couple était log régulier, la désingularisation de Kato-Nizioł des schémas log réguliers ([Kato, 1994], [Nizioł, 2006]), généralisant la classique désingularisation des variétés toriques [Kempf et al., 1973], terminerait la démonstration de 2. Gabber a dégagé des conditions suffisantes assurant que le quotient d'un log schéma log régulier par un groupe fini est encore log régulier. Il s'agit de la notion d'*action très modérée*, étudiée dans VI. Gabber montre qu'il existe une modification projective  $G$ -équivariante  $p : X'' \rightarrow X'$  et un fermé  $G$ -équivariant  $D''$  de  $X''$  contenant



l'image inverse de  $f^{-1}(T') \cup D$  tels que le couple  $(X'', D'')$  soit log régulier, et l'action de  $G$  sur  $(X'', D'')$  très modérée. On conclut alors en appliquant la désingularisation de Kato-Nizioł au quotient de  $(X'', D'')$  par  $G$ . La démonstration de ce théorème de modification est donnée en VIII. Elle s'appuie sur la théorie des désingularisations canoniques en caractéristique nulle (Hironaka, Bierstone-Milman, Villamayor, Temkin).

Gabber établit dans  $X$  une *variante relative* de ce théorème de modification, où le log schéma  $G$ -équivariant considéré est non seulement log régulier, mais log lisse sur une base log régulière  $S$ , avec action triviale de  $G$  : on peut construire une modification équivariante respectant la log lissité sur  $S$ . Il en déduit notamment les raffinements suivants de théorèmes de de Jong :

**THÉORÈME 3.** (1) Soit  $X$  un schéma séparé et de type fini sur un corps  $k$ ,  $Z \subset X$  un fermé rare,  $\ell$  un nombre premier  $\neq \text{car}(k)$ . Il existe alors une extension finie  $k'$  de  $k$  de degré premier à  $\ell$  et une  $\ell'$ -altération  $h : X' \rightarrow X$  au-dessus de  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ , avec  $X'$  lisse et quasi-projectif sur  $k'$ , et  $h^{-1}(Z)$  le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

(2) Soient  $S$  un schéma noethérien séparé, intègre, excellent, régulier, de dimension 1, de point générique  $\eta$ ,  $X$  un schéma séparé, plat et de type fini sur  $S$ ,  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $S$ ,  $Z \subset X$  un fermé rare. Alors il existe une extension finie  $\eta'$  de  $\eta$  de degré premier à  $\ell$ , et une  $\ell'$ -altération projective  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  au-dessus de  $S' \rightarrow S$ , où  $S'$  est le normalisé de  $S$  dans  $\eta'$ , avec  $\tilde{X}$  régulier et quasi-projectif sur  $S'$ , un diviseur à croisements normaux stricts  $\tilde{T}$  sur  $\tilde{X}$ , et une partie fermée finie  $\Sigma$  de  $S'$  tels que :

(i) en dehors de  $\Sigma$ ,  $\tilde{X} \rightarrow S'$  est lisse et  $\tilde{T} \rightarrow S'$  est un diviseur relatif à croisements normaux ;

(ii) localement pour la topologie étale autour de chaque point géométrique  $x$  de  $\tilde{X}_{s'}$ , où  $s' = \text{Spec } k'$  appartient à  $\Sigma$ , le couple  $(\tilde{X}, \tilde{T})$  est isomorphe au couple formé de

$$X' = S'[t_1, \dots, t_n, u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}] / (t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} - \pi),$$

$$T' = V(t_{r+1} \dots t_m) \subset X'$$

autour du point  $(u_i = 1), (t_j = 0)$ , avec  $1 \leq r \leq m \leq n$ , pour des entiers  $> 0$   $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  tels que  $\text{pgcd}(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$ ,  $p$  désignant l'exposant caractéristique de  $k'$ , et  $\pi$  une uniformisante locale en  $s'$  ;

(iii)  $h^{-1}(Z)_{\text{red}}$  est un sous-diviseur de  $\cup_{s' \in \Sigma} (\tilde{X}_{s'}) \cup \tilde{T}$ .

Le théorème d'uniformisation 2 a le corollaire suivant, dit théorème d'uniformisation « faible », où n'apparaît plus de nombre premier  $\ell$  :

**COROLLAIRE 4.** Soient  $X$  un schéma noethérien quasi-excellent,  $Z$  un fermé rare de  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des altérations et telle que, pour tout  $i \in I$  :

(i)  $X_i$  soit régulier et connexe,

(ii)  $p_i^{-1}(Z)$  soit le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

La topologie des altérations est définie de manière analogue à celle des  $\ell'$ -altérations. Elle est plus fine que la topologie étale, et aucune contrainte n'est imposée sur le degré des extensions résiduelles génériques, cf. II-1.2.2. On peut démontrer 4 indépendamment de 2, en suivant seulement les étapes (A) et (B) décrites plus haut, à l'aide, dans (A), d'une forme faible du théorème de Cohen-Gabber. Le théorème de modification de (C) est inutile, il n'y a pas besoin de faire appel à la résolution canonique des singularités en caractéristique nulle. La

résolution des singularités toriques de Kato-Niziol suffit. Cette démonstration est exposée dans VII.

La démonstration de **1** est donnée dans (XIII-3), en application de **2** et du théorème de pureté cohomologique absolu. L'énoncé de **1** comporte deux assertions :

- (i) la constructibilité des  $R^q f_* F$  pour tout  $q$ ,
- (ii) l'existence d'un entier  $N$  (dépendant de  $(f, F)$ ) tel que  $R^q f_* F = 0$  pour  $q \geq N$ , autrement dit, le fait que  $Rf_*$  envoie  $D_c^b(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$  dans  $D_c^b(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ , l'indice  $c$  désignant la sous-catégorie pleine de  $D^b$  formée des complexes à cohomologie constructible.

Dans (XIII-3), ces deux assertions sont démontrées simultanément. On peut toutefois démontrer (i) en n'invokant que le théorème d'uniformisation faible **4** (et le théorème de pureté). Ceci est fait dans (XIII-2). L'idée est la suivante. Si, dans **4**, les morphismes  $p_i$  étaient propres, on pourrait, après réduction au cas où  $f$  est une immersion ouverte et  $F$  un faisceau constant, se ramener, par descente cohomologique propre, au cas de l'immersion du complément d'un diviseur à croisements normaux stricts dans un schéma régulier, justiciable du théorème de pureté. Cependant, les  $p_i$  ne sont pas propres en général. Gabber tourne la difficulté à l'aide du théorème de constructibilité générique de Deligne [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 1.9 (i)] et d'un théorème de descente cohomologique « orientée », établi dans XII. Ce théorème utilise la notion de *produit orienté de topos*, due à Deligne [Laumon, 1983]. Les définitions et propriétés de base sont rappelées dans XI. Un résultat clé est un théorème de changement de base pour des « tubes » (XI-2.4).

D'après des exemples classiques de Nagata, un schéma noethérien quasi-excellent n'est pas nécessairement de dimension finie. Si  $Y$  est de dimension finie, alors  $Rf_*$  est de dimension cohomologique finie, d'après un théorème de Gabber, exposé dans XVIII, et par suite (ii) découle de (i). Gabber prouve, plus précisément, que si  $X$  est un schéma noethérien, strictement local, de dimension  $d > 0$ , et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$ , alors, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , on a  $cd_\ell(U) \leq 2d - 1$ .

L'hypothèse de quasi-excellence dans **1** est essentielle, comme le montre l'exemple donné dans XIX, d'une immersion ouverte  $j : U \rightarrow X$  de schémas noethériens, avec  $2$  inversible sur  $X$ , telle que  $R^1 j_*(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  ne soit pas constructible.

Gabber a démontré des variantes de **1** pour les faisceaux d'ensembles ou de groupes non commutatifs [Gabber, 2005a] :

**THÉORÈME 5.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini entre schémas noethériens. Alors :*

- (1) *Pour tout faisceau d'ensembles constructible  $F$  sur  $X$ ,  $f_* F$  est constructible.*
- (2) *Si  $Y$  est quasi-excellent, et si  $L$  est un ensemble de nombres premiers inversibles sur  $Y$ , pour tout faisceau de groupes constructible et de  $L$ -torsion  $F$  sur  $X$ ,  $R^1 f_* F$  est constructible.*

La démonstration est donnée dans XXI. Elle ne fait pas appel aux théorèmes d'uniformisation précédents. Elle utilise, pour le point clé, une technique d'ultra-produits, et un théorème de rigidité pour les coefficients non abéliens, dû également à Gabber, qui est établi dans XX. Ce théorème est une variante d'un théorème de Fujiwara-Gabber pour les coefficients abéliens [Fujiwara, 1995, 6.6.4, 7.1.1] (signalée dans (*loc. cit.*, 6.6.5). Il s'énonce ainsi :

**THÉORÈME 6.** *Soient  $(X, Y)$  un couple hensélien, où  $X = \text{Spec} A$ ,  $Y = V(I)$ , l'idéal  $I$  étant supposé de type fini,  $\hat{X}$  le complété  $I$ -adique de  $X$ ,  $U$  un ouvert de  $X$  contenant*

$X - Y$ , et  $\widehat{U} = \widehat{X} \times_X U$ . Alors, pour tout champ en groupoïdes ind-fini  $C$  sur  $U$ , la flèche de restriction  $\Gamma(U, C) \rightarrow \Gamma(\widehat{U}, C|_{\widehat{U}})$  est une équivalence.

La démonstration donnée dans XXI est indépendante de [Fujiwara, 1995].

Le reste de la partie II est consacré à trois autres applications des théorèmes d'uniformisation de la partie I.

(a) *Lefschetz affine*. Il s'agit de généralisations des théorèmes de [SGA 4 XIV 3.1] (pour les morphismes affines entre schémas de type fini sur un corps) et [SGA 4 XIX 6.1] (pour les morphismes affines de type fini de schémas excellents de caractéristique nulle), ainsi que du théorème de Gabber pour les morphismes affines de schémas de type fini sur un trait [Illusie, 2003]. L'énoncé principal est le suivant (XV-1.1.2) :

**THÉORÈME 7.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme affine de type fini, où  $Y$  est un schéma noethérien quasi-excellent, muni d'une fonction de dimension  $\delta_Y$ , et soit  $n$  un entier inversible sur  $Y$ . Alors, pour tout faisceau constructible  $F$  de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur  $X$ , et tout entier  $q$ , on a :*

$$(0.a) \quad \delta_Y(R^q f_* F) \leq \delta_X(F) - q$$

Une fonction de dimension  $\delta$  sur un schéma  $T$  est une fonction  $\delta : T \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que  $\delta(y) = \delta(x) - 1$  si  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $x$ . Cette notion est due à Gabber. Elle généralise celle de *dimension rectifiée* introduite dans [SGA 4 XIV]. Elle est définie et étudiée dans XIV. Dans 0.a, la fonction  $\delta_X$  est liée à  $\delta_Y$  par  $\delta_X(x) = \delta_Y(f(x)) + \text{degtr}(k(x)/k(f(x)))$ , et pour un faisceau  $G$  sur  $X$  (resp.  $Y$ )  $\delta_X(G)$  (resp.  $\delta_Y(G)$ ) désigne la borne supérieure des  $\delta_X(x)$  (resp.  $\delta_Y(x)$ ) pour  $G_x \neq 0$ . La démonstration de 7 se fait par réduction au théorème de Gabber cité plus haut, pour les schémas de type fini sur un trait, à l'aide du théorème d'uniformisation « faible » 4 et du théorème de descente cohomologique orientée de XII. De 7 résulte :

**COROLLAIRE 8.** *Si  $X$  est local noethérien, hensélien, quasi-excellent, et de dimension  $d$ , de corps résiduel  $k$ , et si  $U$  est un ouvert affine de  $X$ , alors, pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$ , on a*

$$(0.a) \quad cd_\ell(U) \leq d + cd_\ell(k).$$

En particulier, si  $X$  est intègre, de corps des fractions  $K$ , on en déduit  $cd_\ell(K) = d + cd_\ell(k)$ , formule conjecturée dans [SGA 4 X 3.1]. Les valeurs possibles de  $cd_\ell(U)$ , pour  $U$  ouvert, non nécessairement affine, de  $X$  sont étudiées dans XVIII. Gabber donne également des contre-exemples à 0.a lorsqu'on omet l'hypothèse de quasi-excellence.

(b) *Une nouvelle démonstration de la conjecture de pureté absolue*. La démonstration de cette conjecture qui est donnée dans [Fujiwara, 2002] utilise, dans sa dernière partie, des techniques de  $K$ -théorie algébrique (résultats de Thomason). Gabber a annoncé dans [Gabber, 2005b] qu'on peut éviter tout recours à la  $K$ -théorie algébrique, en utilisant, à la place, la forme raffinée du théorème de de Jong 3(2). Cette nouvelle démonstration est exposée en détail dans XVI. Ce chapitre contient en outre une théorie de classes fondamentales généralisées (due à Gabber), utilisée pour construire une théorie de morphismes de Gysin pour les morphismes d'intersection complète lissifiables, généralisant les constructions de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Cycle]].

(c) *Complexes dualisants*. La notion de complexe dualisant est due à Grothendieck. L'unicité, l'existence et les propriétés générales des complexes dualisants sont étudiées dans [SGA 5 I]. Toutefois, dans (*loc. cit.*) l'existence n'est établie qu'en caractéristique nulle, ou sous des hypothèses d'existence de résolution des singularités, et de validité du théorème de pureté absolue (conjecturale à l'époque). Dans le cas de schémas de type fini sur un schéma régulier de dimension  $\leq 1$ , l'existence est prouvée inconditionnellement par Deligne dans [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Dualité]]. Dans le cas général, l'existence, et la théorie de dualité locale qui en résulte, ont été annoncées par Gabber dans [Gabber, 2005b]. Le chapitre XVII expose cette théorie en détail. Si  $X$  est un schéma noethérien, et  $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , où  $n$  est un entier inversible sur  $X$ , un *complexe dualisant* sur  $X$  est un objet de  $D_c^b(X, \Lambda)$  tel que le foncteur  $D_K = R\mathcal{H}om(-, K)$  envoie  $D_c^b(X, \Lambda)$  dans  $D_c^b(X, \Lambda)$  et que, pour tout  $L \in D_c^b(X, \Lambda)$ , la flèche de bidualité  $L \rightarrow D_K D_K(L)$  soit un isomorphisme. Cette définition diffère légèrement de celle de [SGA 5 I 1.7], voir (XVII-0.8). L'unicité, à décalage, et torsion près par un  $\Lambda$ -module inversible, est prouvée dans [SGA 5 I 2.1]. Le résultat principal de XVII est que, si  $X$  est excellent et admet une fonction de dimension, au sens précisé plus haut, alors  $X$  admet un complexe dualisant. De plus, ces complexes dualisants ont les propriétés de fonctorialité attendues, et, si  $X$  est régulier, le faisceau constant  $\Lambda_X$  est dualisant. Cette dernière assertion était une conjecture dans [SGA 5 I], démontrée dans le cas de caractéristique nulle. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de XVII pour des énoncés plus complets, et des indications sur la méthode de démonstration, dont les ingrédients essentiels sont le théorème de finitude 1 et le théorème d'algébrisation partielle de V (voir (A) *supra*).

## EXPOSÉ I

### Anneaux excellents

Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo

#### 1. Introduction

Ce texte est une version un peu modifiée d'un exposé donné par Michel Raynaud au printemps 2006 dans le cadre d'un séminaire sur les travaux de Gabber sur la cohomologie des schémas excellents. Le but est de familiariser le lecteur avec la notion d'excellence et de lui donner un fil d'Ariane pour se repérer dans **ÉGA IV** où l'on trouve les principales propriétés des anneaux excellents. Son ambition n'est certainement pas de donner une exposition complète de la théorie, mais une idée de la stratégie qui ramène pour l'essentiel les preuves à des énoncés, souvent difficiles, dans le cas complet. Dans un second temps, on montre que toutes les propriétés définissant les anneaux excellents peuvent être mises en défaut, même en petite dimension. Notamment, il existe des anneaux de valuation discrète non excellents ainsi que des anneaux noethériens intègres de dimension 1 dont le lieu régulier n'est pas ouvert. Ce dernier exemple est un sous-produit d'une construction proposée par Gabber (**XIX-2.3**). Elle montre que le théorème de constructibilité des images directes (**XIII-1.1.1**) n'est plus vrai si on omet la condition de quasi-excellence.

#### 2. Définitions

Soit  $A$  un anneau noethérien et  $X = \text{Spec}(A)$  son spectre. On va s'intéresser à des conditions sur  $X$  de deux sortes.

- **Conditions globales :**

**2.1. Condition 1 : conditions d'ouverture.** *Tout schéma intègre  $Y$  fini sur  $X$  contient un ouvert dense*

1.a) *régulier.*

1.b) *normal.*

**REMARQUE 2.2.** La condition 1.a) entraîne d'après le critère d'ouverture de Nagata que le lieu régulier de tout schéma fini sur  $X$  est ouvert ([**ÉGA IV**<sub>2</sub> 6.12.4]). De même, la condition 1.b) entraîne que le lieu normal de tout schéma fini sur  $X$  est ouvert ([**ÉGA IV**<sub>2</sub> 6.13.7])<sup>i</sup>. Ces critères d'ouverture assurent en outre que pour tester 1.a) ou 1.b) on peut se limiter à des schémas intègres  $Y$  qui sont de plus finis et radiciels sur  $X$ .

- **Conditions locales.**

Elles sont de deux types.

---

<sup>i</sup>Et en fait, 1.a) (resp. 1.b)) entraîne que le lieu régulier (resp. normal) de tout schéma intègre de type fini sur  $X$  est ouvert

**2.3. Condition 2 : Conditions sur les fibres formelles.** *Pour tout point fermé  $x$  de  $X$ , le morphisme de complétion  ${}^{\text{ii}}\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  est*

- 2.a) *régulier.*
- 2.b) *normal.*
- 2.c) *réduit.*

Un anneau vérifiant 2.a) est dit « G-ring » en anglais, ce en l'honneur de Grothendieck qui a dégagé l'importance de la notion et étudié ses propriétés.

REMARQUE 2.4. Rappelons qu'un morphisme de schémas noethériens est dit régulier (resp. normal, réduit) respectivement s'il est plat et si les fibres géométriques en tout point de la base sont régulières (resp. normales, réduites). On dit que les fibres formelles de  $X$  en  $x$  sont géométriquement régulières, géométriquement normales ou géométriquement réduites si le morphisme de complétion  $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  est régulier, normal ou réduit. Bien entendu, il suffit de tester la régularité, normalité, ou réduction des fibres après changement de base radical fini ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.7.7]). Notons que la fibre fermée de  $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  est le spectre du corps résiduel  $k(x)$  : elle est toujours géométriquement régulière. La fibre formelle en  $y \in \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  s'identifie à la fibre formelle *générique* du sous-schéma fermé  $\overline{\{y\}}$  (muni de sa structure réduite), adhérence de  $y$  dans  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  ; ceci explique qu'on s'intéresse dans la littérature aux fibres formelles génériques des anneaux intègres. Dans le cas où  $A$  est local mais pas un corps, elles peuvent avoir des dimensions arbitraires entre 0 et  $\dim(A) - 1$  et contenir des points fermés de hauteurs différentes, même dans le cas excellent (2.10) régulier ([Rotthaus, 1991]). Dans le cas où  $A$  est un localisé d'une algèbre intègre de type fini sur un corps, la dimension de la fibre formelle générique est bien  $\dim(A) - 1$  ([Matsumura, 1988]).

**2.5. Condition 3 : condition de formelle caténarité.** *Pour tout point fermé  $y$  d'un sous-schéma fermé irréductible  $Y$  de  $X$ , le complété<sup>iii</sup>  $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$  est équidimensionnel.*

On dit alors que  $X$  est formellement caténaire. Par exemple, si  $X$  est de dimension 1,  $X$  est formellement caténaire.

EXEMPLE 2.6. Tout anneau local noethérien *complet* est formellement caténaire.

Rappelons que  $X$  est dit *caténaire* si toutes les chaînes saturées de fermés irréductibles de  $X$  ayant mêmes extrémités ont même longueur, *universellement caténaire*<sup>iv</sup> si tout schéma affine de type fini sur  $X$  est caténaire. La caténarité est une notion locale. La terminologie de *formelle caténarité* est alors justifiée par la proposition élémentaire suivante ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.1.4]), proposition qui résulte de la fidèle platitude du morphisme de complétion

<sup>ii</sup>Ses fibres sont appelées les fibres formelles (de  $X$  ou  $A$ ) en  $x$ .

<sup>iii</sup>Bien entendu, même si  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est intègre, son complété n'est en général pas intègre : penser à une courbe nodale.

<sup>iv</sup>Cette dernière notion est utile en théorie de la dimension : si  $A$  est intègre universellement caténaire contenue dans  $B$  intègre de type fini sur  $A$ , on a pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$  au dessus de  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  la formule

$$\dim B_{\mathfrak{p}} + \text{degtr}_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{q}} + \text{degtr}_A B.$$

Mais, en pratique, on teste plutôt la formelle caténarité qui, comme on le voit juste après, entraîne l'universelle caténarité, et même lui est équivalente (voir (7.1.1) plus bas) !

LEMME 2.7. Soit  $A$  local noethérien de complété équidimensionnel. Alors

- i)  $A$  est équidimensionnel et caténaire.
- ii) Pour tout idéal  $I$  de  $A$ , le quotient  $A/I$  est équidimensionnel si et seulement si son complété l'est ; en particulier,  $A/I$  est formellement caténaire.
- iii) En particulier, un schéma affine  $X$  noethérien formellement caténaire est caténaire et même universellement caténaire.

Notons que *iii*) découle immédiatement de *i*) puisque  $X$  est caténaire si et seulement si ses composantes irréductibles le sont. On verra plus bas dans la section 5 que la propriété de formelle caténarité est notamment stable par extension finie d'où l'universelle caténarité annoncée (cf. la preuve de la proposition 7.1 et, pour une réciproque, voir (7.1.1)).

EXEMPLE 2.8. Soit alors  $B \rightarrow A$  un morphisme local surjectif d'anneaux noethériens et supposons  $B$  de Cohen-Macaulay (par exemple régulier). Comme  $\widehat{B}$  est de Cohen-Macaulay, il est équidimensionnel de sorte que  $A$  est formellement caténaire d'après (2.7).

Regardons ce qui se passe dans le cas complet. Rappelons pour mémoire le théorème de structure de Cohen des anneaux locaux complets noethériens ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.19.8.8]) :

THÉORÈME 2.9 (Cohen). Soit  $A$  un anneau local noethérien complet de corps résiduel  $k$ .

- (i)  $A$  est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen<sup>v</sup>. Si  $A$  contient un corps, il est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur  $k$ .
- (ii) Si  $A$  est de plus intègre, il existe un sous-anneau  $B$  isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps<sup>vi</sup> de sorte que l'inclusion  $B \rightarrow A$  soit locale, finie et induise un isomorphisme des corps résiduels.

Tout anneau local noethérien complet est donc quotient d'un anneau régulier.

DÉFINITION 2.10. Soit  $X$  un schéma (resp.  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma affine) noethérien. On dit que  $X$  (resp.  $A$ ) est

- excellent si  $X$  vérifie 1.a) + 2.a) + 3).
- quasi-excellent si  $X$  vérifie 1.a) + 2.a).
- universellement japonais<sup>vii</sup> si  $X$  vérifie 1.b)+2.c).

2.11. L'existence d'une classe de schémas stable par extension finie pour laquelle le théorème de désingularisation est vérifié impose de se limiter aux schémas quasi-excellents. Précisément, si tous les schémas intègres et finis  $Y$  sur  $X$

<sup>v</sup>Rappelons ([ÉGA IV<sub>2</sub> 19.8.5]) que les anneaux de Cohen  $C$  sont les corps de caractéristique nulle et les anneaux de valuation discrète complets d'inégale caractéristique  $p$  non ramifiés. Lorsque le corps résiduel  $\kappa$  de  $C$  est parfait,  $C$  n'est autre que l'anneau des vecteurs de Witt de  $\kappa$ .

<sup>vi</sup>Voir (4.2) pour une amélioration.

<sup>vii</sup>Ou Nagata en anglais, voire pseudo-géométrie (chez Nagata notamment).

admettent une désingularisation (au sens de l'existence de  $Y' \rightarrow Y$  propre et birationnel avec  $Y'$  régulier), alors  $X$  est quasi-excellent [ÉGA IV<sub>2</sub> 7.9.5]<sup>viii</sup>. Inversement, le théorème de désingularisation d'Hironaka se généralise à tout schéma réduit quasi-excellent de caractéristique nulle ([Temkin, 2008a, 3.4.3])<sup>ix</sup>

On regroupe plus bas (11) des exemples de « méchants anneaux ». Commentons par un regard plus positif.

### 3. Exemples immédiats.

**PROPOSITION 3.1.** *Un corps, un anneau de Dedekind de corps des fractions de caractéristique nulle est excellent.*

*Démonstration.* Vérifions qu'un corps est excellent. En effet, une algèbre finie et intègre sur un corps est un corps : les propriétés 1.a), 2.a) et 3) sont donc vérifiées ce qui prouve que tout corps est excellent.

Soit  $A$  un anneau de Dedekind de corps des fractions  $K$  de caractéristique nulle est excellent.

- Vérifions 1.a). Soit donc  $B$  intègre finie sur  $A$ . Soit  $B$  est un corps, auquel cas 1.a) est vérifié, soit  $A$  se plonge dans  $B$ . Comme  $K$  est de caractéristique nulle,  $B$  est génériquement étale sur  $A$ , prouvant que le lieu régulier de  $B$  contient un ouvert non vide (le lieu étale par exemple).
- Pour 2.a), considérons  $x$  fermé dans  $\text{Spec}(A)$ . La fibre formelle non fermée en  $x$  est le complété  $\widehat{K}_x$  de  $K$  pour la valuation définie par  $x$ . Comme  $K$  est de caractéristique nulle, le corps  $\widehat{K}_x$  est séparable sur  $K$  d'où 2.a).
- La propriété 3) est claire puisque le complété de  $A$  en  $x$  est intègre donc équidimensionnel.

□

On verra plus bas (11.5) qu'il existe de nombreux anneaux de valuation discrète qui ne sont pas quasi-excellents.

### 4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.

Expliquons avec Nagata pourquoi les anneaux locaux noethériens complets sont excellents<sup>x</sup>.

La propriété 2.a) est tautologique. La formelle caténarité a été vue (2.6). Reste 1.a). Une extension finie d'un anneau complet étant complet, on doit prouver le résultat suivant (cf. [ÉGA IV<sub>2</sub> 22.7.6]).

**THÉORÈME 4.1 (Nagata).** *Si  $X$  est local noethérien intègre et complet<sup>xi</sup>, alors le lieu régulier est ouvert.*

*Démonstration.* On va distinguer les cas d'égales et d'inégales caractéristiques.

<sup>viii</sup>Si de plus  $X$  peut localement se plonger dans un schéma régulier, alors  $X$  vérifie 3) et est donc excellent.

<sup>ix</sup>Ce résultat a été longtemps considéré comme « bien connu des experts » alors que sa preuve, tout à fait non triviale, date de 2008.

<sup>x</sup>Ceci permet de construire de nombreux exemples d'anneaux de valuation discrète excellents de caractéristique positive (par complétion de schémas réguliers aux points de hauteur 1).

<sup>xi</sup>D'après (2.2), ceci entraîne que le lieu régulier d'un schéma local noethérien complet est ouvert, qu'il soit intègre ou non.



Cas I (Cf. [ÉGA IV<sub>2</sub> 0.22.7.6].) Supposons que  $A$  contienne un corps et notons  $k_0$  son corps premier (qui est parfait!) de sorte que le corps résiduel  $k$  de  $A_{\mathfrak{p}}$  est séparable sur  $k_0$  pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ . L'anneau  $A_{\mathfrak{p}}$  est régulier si et seulement si  $A_{\mathfrak{p}}$  est formellement lisse sur  $k_0$  (voir dans ce cas [ÉGA IV<sub>2</sub> 0.19.6.4]). D'autre part, le théorème de structure de Cohen (2.9) assure que  $A$  est isomorphe à  $k[[T_1, \dots, T_n]]/I$  de sorte que  $\mathfrak{p}$  s'identifie à un idéal de  $B = k[[T_1, \dots, T_n]]$  contenant  $I$ . Le critère jacobien de formelle lissité de Nagata ([ÉGA IV<sub>2</sub> 0.22.7.3]) assure que  $A_{\mathfrak{p}}$  est régulier si et seulement si il existe des  $k_0$ -dérivations  $D_i, i = 1, \dots, m$  de  $B$  dans  $B$  et  $f_i, i = 1, \dots, m$  des éléments engendrant  $I_{\mathfrak{p}}$  tels que  $\det(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$ . Cette condition étant visiblement ouverte, le théorème suit.

Cas II Supposons que  $A$  est d'inégale caractéristique, et donc de corps des fractions  $K$  de caractéristique nulle. D'après le théorème de structure de Cohen (2.9),  $A$  contient un sous-anneau régulier (et complet)  $B$  faisant de  $A$  une  $B$ -algèbre de finie. Le corps des fractions  $L$  de  $B$  est de caractéristique nulle comme  $K$ . Quitte à remplacer  $A$  par un localisé  $A[1/a]$ , on peut supposer que  $B$  est libre de rang fini sur  $A$  de base  $y_1, \dots, y_m$ . Mais  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  est étale en dehors du fermé  $d = \det_{A/B}(\text{Tr}(y_i y_j)) \neq 0$  de  $\text{Spec}(B)$ , qui est non trivial puisqu'il contient le point générique, l'extension  $\text{Frac}(B)/\text{Frac}(A)$  étant séparable – de caractéristique nulle – ! Comme  $B$  est régulier, le théorème suit. □

REMARQUE 4.2. Ainsi, un anneau de séries formelles sur un corps est excellent.

Notons que la preuve se simplifie si on connaît l'amélioration de Gabber du théorème de structure de Cohen (IV-2.1.1 et IV-4.2.2) : si  $A$  noethérien est local complet et intègre, il contient un anneau  $B$  isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps tel que  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  est fini et génériquement étale. On n'a alors pas besoin de distinguer les caractéristiques des corps de fractions dans la preuve. Mais la preuve de cette amélioration est difficile.

## 5. Permanence par localisation et extension de type fini

La notion de (quasi) excellence est remarquablement stable. Précisément, on a

THÉORÈME 5.1. *Toute algèbre de type fini ou plus généralement essentiellement de type fini sur un anneau excellent (resp. quasi-excellent) est excellente (resp. quasi-excellente). En particulier, tout localisé d'algèbre de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind ( $\mathbf{Z}$  par exemple) de corps des fractions de caractéristique nulle est excellent.*

(Rappelons que, dans ce contexte, un morphisme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est dit essentiellement de type fini si  $B$  est une localisation d'une  $A$ -algèbre de type fini par un système multiplicatif.)

Expliquons les grandes lignes de la preuve.

**5.2. Condition 1).** Le passage au localisé ne pose pas de problème. Soit  $B$  de type fini sur  $A$ . Si  $A$  vérifie 1.a) ou 1.b), les critères d'ouverture de Nagata ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.12.4 et 6.13.7]) entraînent qu'il en est de même de  $B$ .

**5.3. Condition 2).** C'est la partie la plus difficile de la théorie ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.4.4]), entièrement due à Grothendieck. Le point le plus délicat est la localisation :

**THÉORÈME 5.3.1.** *Si  $A$  vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), alors pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ , l'anneau  $A_{\mathfrak{p}}$  vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), autrement dit les fibres formelles en tout point de  $\text{Spec}(A)$  sont géométriquement régulières (resp. géométriquement normales ou géométriquement réduites).*

*Démonstration.* La preuve se fait par réduction au cas complet. On se limite à la propriété 2.a), le cas de 2.b) ou 2.c) se traitant de même. Soit  $\mathfrak{m}$  maximal contenant  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  et soit  $B$  le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de  $A$ . Comme  $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B$  est fidèlement plat, il existe  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ . Par hypothèse,  $A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B$  est régulier. Les morphismes réguliers étant stables par localisation,  $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$  est régulier. On regarde alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{B}_{\mathfrak{q}} \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{f} & B_{\mathfrak{q}} \end{array}$$

Supposons que  $\beta$  soit régulier. Alors,  $\widehat{f} \circ \alpha$  est régulier comme composé de deux morphismes réguliers. Comme  $\widehat{f}$  est fidèlement plat (comme morphisme local complété du morphisme plat  $f$ ), on déduit que  $\alpha$  est régulier (exercice ou [ÉGA IV<sub>2</sub> 6.6.1]) ce qu'on voulait. On est donc ramené à  $\beta$ , donc au cas complet. La régularité de  $\beta$  résulte alors de

**THÉORÈME 5.3.2.** *Soit  $B$  un anneau local noethérien complet  $B$ . Alors, les fibres formelles de  $B$  en  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$  sont géométriquement régulières.*

Ce théorème est le noyau dur de la théorie. On se ramène (2.4) à étudier les fibres formelles génériques. On montre donc dans un premier temps ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.22.3.3]) que si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$  local noethérien complet intègre, la fibre formelle générique  $\widehat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \text{Frac}(A_{\mathfrak{p}})$  de  $A_{\mathfrak{p}}$  est formellement lisse sur  $\text{Frac}(A_{\mathfrak{p}}) = \text{Frac}(A)$  en tout point. Dans un second temps, on montre ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.22.5.8]) qu'une algèbre locale noethérienne sur un corps est formellement lisse<sup>xii</sup> si et seulement si elle est géométriquement régulière<sup>xiii</sup>  $\square$

Une fois prouvée la permanence par localisation, on peut montrer :

**THÉORÈME 5.3.3.** *Soit  $B$  une  $A$ -algèbre de type fini. Si  $A$  vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c), alors  $B$  vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)).*

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de générateurs de  $B$ . Grâce à l'invariance par localisation, on se ramène aisément à l'étude des fibres formelles

<sup>xii</sup>Rappelons qu'une  $k$ -algèbre locale  $B$  (muni de la topologie adique) est formellement lisse sur  $k$  si tout  $k$ -morphisme continu d'algèbre  $B \rightarrow C/I$  avec  $I^2 = 0$  se relève continûment à la  $C$ -algèbre discrète  $C$ .

<sup>xiii</sup>En fait, on n'a visiblement besoin que du sens formellement lisse entraîne géométriquement régulier, qui est le plus facile. Notons que la preuve de l'équivalence a été considérablement simplifiée par Faltings ([Faltings, 1978] ou pour le lecteur non germaniste [Matsumura, 1989], 28.7).

de  $B$  en un idéal maximal dans le cas où  $B$  engendré par *un* élément et  $A$  est complet. La preuve n'est pas facile, mais beaucoup plus simple que celles de ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.22.3.3 et 0.22.5.8]).

**5.4. Condition 3).** De même que pour les conditions de type 2), la stabilité par localisation et extension finie résulte comme plus haut ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.1.8]) du cas complet, la platitude du morphisme de localisation permettant de descendre du complété à l'anneau – ce n'est pas immédiat malgré tout –. Le cas complet est facile comme on a vu (2.6).

**5.5. Application au cas local.** Dans le cas local, la condition d'ouverture du lieu régulier découle de 2.a). Précisons.

- PROPOSITION 5.5.1.      i) *Le lieu régulier d'un anneau local noethérien vérifiant 2.a) est ouvert.*  
 ii) *En particulier, un anneau local noethérien est quasi-excellent (resp. excellent) si et seulement s'il vérifie 2.a) (resp. s'il vérifie 2.a) et 3)).*

*Démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fidèlement plat de schémas noethériens à fibres régulières (resp. normales ou réduites). Alors,  $\mathcal{O}_x$  est régulier (resp. normal ou réduit) si et seulement si  $\mathcal{O}_{f(x)}$  l'est ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.4.2, 6.5.1]). Notons  $U_R(X)$  l'ensemble des  $x \in X$  tel que  $R(\mathcal{O}_x)$  est régulier (resp. normal ou réduit). Autrement dit, on a  $f^{-1}(U_R(X)) = U_R(Y)$ . Or le lieu régulier ou normal d'un anneau complet intègre est ouvert (4.1). De plus, le morphisme de complétion d'un anneau local noethérien  $A$  est régulier si et seulement si  $A$  vérifie 2.a) d'après (5.3.2). Il suit que 2.a) entraîne 1.a) (resp. 2.b) entraîne 1.b)) dans le cas local.  $\square$

## 6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais

Rappelons la définition usuelle des anneaux universellement japonais ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.23.1.1]).

DÉFINITION 6.1.  $X$  est dit

- (i) *japonais* s'il est intègre et si la clôture intégrale de  $A$  dans toute extension finie<sup>xiv</sup> de son corps des fractions est finie sur  $A^{\text{sv}}$  ;
- (ii) *universellement japonais* si tout anneau intègre qui est extension de type fini de  $A$  est japonais<sup>xvi</sup>.

La définition d'anneau japonais n'est que technique en ce qu'elle ne sert qu'à définir la seule notion véritablement utile (et vérifiable à vrai dire) : celle d'anneau universellement japonais. Cette définition est compatible avec 2.10. Expliquons pourquoi. D'après Nagata,  $X$  est universellement japonais au sens de 6.1 si et seulement si  $X$  vérifie 1.b) et si tous les quotients intègres des localisés  $\mathcal{O}_{X,x}$  en les points fermés  $x \in X$  sont japonais ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.7.2]). Or, le théorème de Zariski-Nagata ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.6.4]) assure que les quotients intègres de  $\mathcal{O}_{X,x}$  sont japonais

<sup>xiv</sup>On peut se contenter des extensions finies radicielles si l'on veut : exercice ou [ÉGA IV<sub>1</sub> 23.1.2].

<sup>xv</sup>Comme module ou comme algèbre : c'est la même chose car la clôture intégrale est entière sur  $A$  par construction.

<sup>xvi</sup>Ou, ce qui est équivalent ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.7.2]), si tout quotient intègre est japonais.

si et seulement si les fibres formelles de  $\mathcal{O}_{X,x}$  sont géométriquement réduites <sup>xvii</sup>. D'où l'équivalence entre les deux définitions des anneaux universellement japonais.

Si on renforce la condition 2.c) en 2.b) (fibres formelles géométriquement normales), le passage à la clôture intégrale commute à la complétion. Précisément, on a ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.6.1 et 7.6.3])

**PROPOSITION 6.2.** *Supposons que  $A$  local noethérien vérifie 2.b) et soit réduit. Alors, la clôture intégrale  $A'$  de  $A$  dans son anneau total des fractions est finie sur  $A$  et son complété est isomorphe à la clôture intégrale de  $\widehat{A}$ <sup>xviii</sup> dans son anneau total des fractions.*

On déduit l'important critère d'intégrité du complété.

**COROLLAIRE 6.3.** *Soit  $A$  local noethérien.*

- i) *Supposons  $A$  intègre et vérifiant 2.b). Alors,  $\widehat{A}$  est intègre si et seulement si  $A$  est unibranche (i.e.  $A'$  local).*
- ii) *Supposons  $A$  hensélien. Alors  $A$  est excellent si et seulement s'il vérifie 2.a). Si  $A$  est de plus intègre, il en est de même de son complété.*

*Démonstration.* Prouvons i). Comme  $A$  est unibranche, la clôture intégrale  $A'$  de  $A$  est locale : il en est de même de son complété  $\widehat{A}'$ . D'après (6.2), on a  $\widehat{A}' = (\widehat{A})'$  et donc est normal. Or, un anneau normal et local est intègre. Comme  $\widehat{A}'$  contient  $\widehat{A}$ , le résultat suit.

Prouvons ii). D'après (5.5.1), on doit seulement se convaincre qu'un anneau local hensélien vérifiant 2.a) vérifie aussi 3), i.e. est formellement caténaire. On peut supposer  $A$  intègre et on doit prouver que  $\widehat{A}$  est équidimensionnel. Mais comme  $A$  est hensélien intègre, il est unibranche [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.8.16], donc  $\widehat{A}$  est intègre d'après le premier point, ce qui assure l'équidimensionalité.  $\square$

## 7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents

La définition des anneaux noethériens excellents de Grothendieck est *a priori* différente de celle donnée ici. Notamment, elle fait intervenir, un peu bizarrement, l'*universelle caténarité* en lieu et place de la *formelle caténarité*. Précisément, elle fait intervenir trois propriétés. Dans cette partie  $A$  désigne un anneau noethérien et  $X = \text{Spec}(A)$  le schéma affine correspondant.

- 1EGA) Pour tout quotient intègre  $B$  de  $A$  et toute extension finie radicielle  $K'$  du corps des fractions  $K$  de  $B$ , il existe une sous- $B$ -algèbre finie  $B'$  de  $K'$  contenant  $B$ , de corps des fractions  $K'$  telle que le lieu régulier de  $\text{Spec}(B')$  soit un ouvert dense.
- 2EGA) Les fibres formelles de  $X$  en tout point (fermé ou non) sont géométriquement régulières.
- 3EGA)  $A$  est universellement caténaire.

<sup>xvii</sup>Ou, de façon équivalente, que le complété de toute  $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre finie et réduite est réduit. Comme d'habitude, la preuve se fait par réduction au cas complet, et même régulier complet grâce au théorème de structure de Cohen. Le caractère japonais de tels anneaux est garanti par le théorème de Nagata ([ÉGA IV<sub>1</sub> 0.23.1.5]).

<sup>xviii</sup>Qui est réduit puisque  $A$  est japonais (cf. note (xvii)).

Les anneaux excellents au sens des **ÉGA** sont les anneaux noethériens vérifiant les 3 propriétés précédentes ([**ÉGA IV<sub>2</sub>** 7.8.2]).

Notons tout de suite, ce qui est élémentaire, que l'universelle caténarité de  $A$  équivaut à celle des anneaux locaux de  $\mathcal{O}_{X,x}$  en tous ses points fermés – ou tous ses points si on préfère – ([**ÉGA IV<sub>2</sub>** 5.6.3]).

Pour que la définition des anneaux excellents de Grothendieck ([**ÉGA IV<sub>2</sub>** 7.8.2]) soit la même que (2.10), on doit prouver la proposition suivante.

**PROPOSITION 7.1.** *Pour tout anneau noethérien et  $i = 1, 2, 3$ , les propriétés i) et iÉGA) son équivalentes. En particulier, les notions de quasi-excellence et d'excellence de la première partie coïncident avec celles des **ÉGA**.*

*Démonstration.* La condition 1EGA) équivaut à 1) d'après [**ÉGA IV<sub>2</sub>** 6.12.4] (seule la partie 1EGA) entraîne 1) est délicate même si elle n'utilise pas le critère de régularité de Nagata mais seulement de l'algèbre commutative standard – essentiellement le critère de régularité par fibres et la non dégénérescence de la trace des extensions finies séparables de corps –).

Pour l'équivalence de 2) et 2EGA), il faut se convaincre que la géométrie régularité des fibres formelles en tout point fermé entraîne la géométrie régularité des fibres formelles en tout point : c'est un cas particulier des propriétés de permanence (5).

Ceci prouve la compatibilité des définitions de la quasi-excellence.

Si  $X$  vérifie 3), tous ses anneaux locaux sont formellement caténaire (permanence par localisation, cf. la section 5) et donc sont caténaire (2.7). Comme tout schéma (affine) de type fini sur  $X$  vérifie 3) (permanence par extension de type finie, cf. la section 5), on déduit que  $X$  est universellement caténaire et donc  $X$  vérifie 3EGA).

La réciproque est due à Ratliff :

**PROPOSITION 7.1.1 (Ratliff).** *Un anneau noethérien universellement caténaire est formellement caténaire.*

Précisément, Ratliff prouve ([**Ratliff, 1971**], 3.12) que si  $A$  est caténaire,  $A_{\mathfrak{p}}$  est formellement caténaire dès que  $\mathfrak{p}$  n'est pas maximal<sup>xix</sup>. Pour montrer la proposition, on peut donc supposer  $\mathfrak{p}$  maximal et  $A$  local intègre. Alors,  $\mathfrak{p}[X]$  est premier non maximal dans  $A[X]$  de sorte que le complété  $\mathfrak{p}[X]$ -adique  $\widehat{A[X]_{\mathfrak{p}[X]}}$  est formellement équidimensionnel. Comme  $\widehat{A} \rightarrow \widehat{A[X]_{\mathfrak{p}[X]}}$  est local et plat, l'argument de platitude ([**ÉGA IV<sub>2</sub>** 7.1.3]) utilisé plus haut assure que  $\widehat{A}$  est équidimensionnel.  $\square$

## 8. Hensélisation et anneaux excellents

Rappelons qu'un morphisme d'anneaux noethériens  $A \rightarrow B$  est dit absolument plat s'il est réduit à fibres discrètes et si les extension résiduelles sont algébriques et séparables. Ou, de façon équivalente, s'il est plat ainsi que le morphisme diagonal  $B \otimes_A B \rightarrow B$  (cf. [**Ferrand, 1972**], prop. 4.1 et [**Olivier, 1971**], 3.1). Lorsque  $B$  est (localement) de type fini sur  $A$ , ceci équivaut au fait que  $B$  soit étale sur  $A$ . En particulier, les extensions résiduelles sont séparables de sorte

<sup>xix</sup>Dans l'étrange terminologie de l'auteur, c'est la condition  $\text{depth}(\mathfrak{p}) > 0$ , ce qui signifie donc que la *dimension* de  $A/\mathfrak{p}$  est  $> 0$ .

qu'un tel morphisme est en fait régulier. Par exemple, tout morphisme ind-étale est absolument plat. On a alors le résultat suivant ([Greco, 1976]).

**THÉORÈME 8.1.** *Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme absolument plat d'anneaux noethériens. Alors*

- i) *Si  $A$  est vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c),  $B$  un vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c))<sup>xx</sup>.*
- ii) *Si  $A$  est universellement-japonais,  $B$  est universellement japonais.*
- iii) *Si  $A$  est quasi-excellent,  $B$  est quasi-excellent.*
- iv) *Si  $A$  est excellent,  $B$  est excellent.*
- v) *Si  $f$  est fidèlement plat, la réciproque de i), ii) et iii) est vraie.*
- vi) *Si  $f$  est fidèlement plat et  $B$  est localement intègre, la réciproque de iv) est vraie.*

Comme les morphismes d'hensélisation et de stricte hensélisation sont absolument plats ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.6.9 et 18.8.12]) et fidèlement plats (ils sont locaux), on trouve, en particulier, que la quasi-excellence et l'excellence sont stables par hensélisation et hensélisation stricte et que, le caractère quasi-excellent ou universellement japonais d'un anneau local se teste sur l'hensélisé ou l'hensélisé strict. Dans le cas de l'hensélisé, ces résultats étaient connus de Grothendieck ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.7]), notamment 18.7.6).

En revanche, on ne peut espérer une propriété de descente de l'excellence comme en vi) sans condition d'intégrité locale (cf.11).

## 9. Complétion formelle et anneaux excellents

Soit  $I$  un idéal d'un anneau noethérien  $A$  contenu dans son radical de Jacobson et  $\tilde{A}$  sa complétion  $I$ -adique. On peut se demander si les propriétés d'excellence passent au complété. La réponse est oui en général. Précisément, on a :

**PROPOSITION 9.1.** *Soit  $I$  un idéal d'un anneau noethérien  $A$  contenu dans son radical de Jacobson et  $\tilde{A}$  sa complétion  $I$ -adique.*

- i) *Si  $A$  est (semi)-local quasi-excellent (resp. excellent), il en est de même de  $\tilde{A}$  ;*
- ii) *Si  $A$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre excellente, il en est de même de  $\tilde{A}$ .*

La permanence de la quasi-excellence dans le cas (semi)-local, *i.e.* de la géométrie régularité des fibres formelles, est due à Rotthaus ([Rotthaus, 1977]), tandis que celle de l'universelle caténarité est due à Seydi<sup>xxi</sup> (le théorème 1.12 de [Seydi, 1970] prouve qu'un anneau de série-formelles  $A[[t_1, \dots, t_n]]$  est universellement caténaire dès que  $A$  l'est ; il suffit alors de considérer des générateurs  $i_1, \dots, i_n$  de  $I$  définissant une surjection  $A[[t_1, \dots, t_n]] \twoheadrightarrow \tilde{A}$ ). Pour ii), reste à étudier l'ouverture du lieu régulier dans le. C'est ce qui est fait dans [Brodmann & Rotthaus, 1980], en utilisant le théorème de désingularisation d'Hironaka de façon cruciale. Les techniques de [Brodmann & Rotthaus, 1980] ont d'ailleurs permis de montrer que si le théorème de désingularisation était vrai dans le cas local excellent, toute complétion  $I$ -adique d'anneau excellent comme plus haut serait excellente ([Nishimura & Nishimura, 1987]).

En fait, le résultat est général. Plus précisément, Gabber ([Gabber, 2007]) peut remplacer le théorème d'Hironaka par son théorème d'uniformisation (VII-1.1)

<sup>xx</sup>Ou plus généralement, si  $A$  est un  $\mathbf{P}$ -anneau au sens de Grothendieck ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.3]),  $B$  est un  $\mathbf{P}$ -anneau

<sup>xxi</sup>Comme me l'a expliqué Christel Rotthaus (communication privée), si  $A, B$  sont locaux tels que  $A \subset B \subset \hat{A}$  et  $\hat{B} = \hat{A}$ , alors l'universelle caténarité de  $A$  entraîne celle de  $B$ .

dans les arguments de [Nishimura & Nishimura, 1987] pour prouver le résultat suivant

**THÉORÈME 9.2 (Gabber).** *Soit  $A$  un anneau noethérien  $I$ -adiquement complet. Alors, si  $A/I$  est quasi-excellent,  $A$  est quasi-excellent.*

On ne peut remplacer quasi-excellent par excellent dans le théorème précédent. En effet, Greco ([Greco, 1982]) a construit un idéal  $I$  d'un anneau  $A$  intègre de dimension 3, noethérien semi-local  $I$ -adiquement complet et séparé qui est quasi-excellent non excellent alors que  $A/I$  est excellent. On peut même supposer que  $A$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre. La construction se fait par pincements d'idéaux maximaux de hauteurs différentes (cf. 11.1). Malgré tout, comme on vient de le voir, la formelle caténarité passe aux complétions partielles ([Seydi, 1970]) de sorte que le complété  $I$ -adique d'un anneau excellent  $A$  est excellent dès lors que  $I$  est contenu dans le radical de Jacobson de  $A$ .

## 10. Approximation d'Artin et anneaux excellents

Rappelons la définition suivante (cf. [Artin, 1969]).

**DÉFINITION 10.1 (M. Artin).** Un anneau local noethérien  $(A, \mathfrak{m})$  a la propriété d'approximation ( $AP$ ) si pour toute variété affine  $X$  de type fini sur  $A$ , l'ensemble  $X(A)$  est dense dans  $X(\hat{A})$ .

Bien entendu, il revient au même de dire que pour tout  $X$  comme plus haut, on a

$$X(\hat{A}) \neq \emptyset \Rightarrow X(A) \neq \emptyset.$$

Si  $A$  vérifie  $AP$ ,  $A$  est certainement hensélien. Mais l'exemple 11.4 prouve qu'il ne suffit pas que  $A$  soit hensélien pour qu'il possède la propriété d'approximation. En fait, Rotthaus a observé que l'excellence était une condition nécessaire à l'approximation d'Artin :

**LEMME 10.2 ([Rotthaus, 1990]).** *Un anneau local noethérien vérifiant  $AP$  est hensélien et excellent.*

Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle muni d'une valuation non triviale à valeurs réelles. Artin a prouvé ([Artin, 1968]) que les anneaux de séries convergentes à coefficients dans  $k$  (pas nécessairement complets) ont la propriété d'approximation. Ils sont donc henséliens et excellents.<sup>xxii</sup>

La situation est maintenant complètement clarifiée grâce aux travaux de Popescu culminant avec le résultat suivant ([Swan, 1998]) :

**THÉORÈME 10.3 (Popescu).** i) *Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme régulier d'anneaux noethériens. Alors,  $B$  est limite inductive filtrante de  $A$ -algèbres lisses.*  
ii) *Tout anneau local noethérien hensélien et excellent satisfait la propriété d'approximation  $AP$ <sup>xxiii</sup>.*

<sup>xxii</sup>Dans le même ordre d'idées, l'anneau  $k\{x_1, \dots, x_n\}$  des séries formelles restreintes (séries dont la suite des coefficients tendent vers 0) à coefficients dans un corps valué complet non archimédien  $k$  est excellent dès que  $k$  est de caractéristique nulle ou que  $k$  est de degré fini sur  $k^p$ ,  $p = \text{car}(k)$  ([Greco & Valabrega, 1974]). Le cas général a été obtenu par Kiehl ([Kiehl, 1969] et aussi [Conrad, 1999] pour une preuve et des développements). Ceci répond, partiellement, à une question de Grothendieck ([ÉGA IV<sub>2</sub> 7.4.8 B]). En revanche, si  $k$  est valué non archimédien non complet de caractéristique positive tel que le morphisme de complétion  $k \rightarrow \hat{k}$  n'est pas séparable, Gabber sait prouver que  $k\{x_1\}$  n'est pas excellent.

Le fait que i) entraîne ii) est un simple exercice. En effet, si  $A$  est quasi-excellent, le morphisme de complétion  $A \rightarrow \widehat{A}$  est régulier et donc on peut écrire  $\widehat{A} = \text{colim } L$  où  $L$  est lisse sur  $A$ . Soit  $X = \text{Spec}(B)$  avec  $B$  de type fini et  $\hat{a} \in X(\widehat{A})$  d'image  $\hat{a}(0) \in X(k)$  où  $k$  corps résiduel de  $A$ . Il existe donc  $L$  lisse sur  $A$  tel que  $\hat{a}$  provienne de  $l \in X(L)$ . Comme  $A$  est hensélien, il existe  $a \in X(A)$  (tel que  $a(0) = \hat{a}(0)$ )<sup>xxiv</sup>.

## 11. Exemples de méchants anneaux noethériens

Soit  $A$  un anneau noethérien et  $X = \text{Spec}(A)$  le schéma affine correspondant. Il ressortira de cet inventaire que les propriétés désagréables des anneaux du point de vue de l'excellence n'ont en général pas seulement à voir avec la caractéristique  $> 0$  mais peuvent aussi se produire pour des  $\mathbf{Q}$ -algèbres.

**11.1. Formelle caténarité : condition 3).** Regardons d'abord de mauvais anneaux du point de vue de la formelle caténarité.

**11.1.1.** *La caténarité n'entraîne pas la formelle caténarité.* Dans [ÉGA IV<sub>2</sub> 5.6.11], Grothendieck construit un exemple d'anneau local noethérien de dimension 2 intègre, caténaire mais non universellement caténaire, donc non formellement caténaire d'après 7.1.1 (i.e. ne vérifiant pas 3)).

Expliquons la construction qui consiste à pincer une surface lisse sur un corps  $k$ , de caractéristique nulle si l'on veut, le long de deux points de hauteurs différentes ayant des corps résiduels isomorphes à  $k$ .

On part d'un corps  $k$  extension transcendante pure de degré infini sur son corps premier par exemple, que l'on peut même supposer être  $\mathbf{Q}$ . Soit  $S$  une surface lisse munie d'un morphisme projectif sur  $T = \text{Spec}(k[\tau])$  et  $t \in S(T)$ . On suppose qu'il existe un point  $s \in S(k)$  de la fibre  $S_0$  de  $S \rightarrow T$  au dessus de  $0 \in T$  qui n'est pas dans l'image de  $t$ . Par exemple, on peut prendre  $S = \text{Spec}(k[\sigma, \tau])$  avec  $t$  la section d'image  $\sigma = 0$  et  $s = (1, 0)$ . Les corps  $k(s) = k$  et  $k(t) = \text{Frac}(k[\tau])$  sont des extensions transcendentes pures de  $\mathbf{Q}$  de même degré (infini) de sorte qu'on peut choisir un isomorphisme de corps  $k(s) \simeq k(t)$ . Ceci permet de définir le sous-anneau  $\mathcal{O}_\Sigma$  de  $\mathcal{O}_S$  des fonctions qui coïncident en  $s$  et  $t$ . On dispose donc d'un morphisme  $\pi : S \rightarrow \Sigma$  qui envoie  $s, t$  sur  $\sigma \in \Sigma$ . Posons  $A = \mathcal{O}_{\Sigma, \sigma}$  et soit  $B$  l'anneau de coordonnées de  $S \times_\Sigma \text{Spec}(\mathcal{O}_{\Sigma, \sigma})$ . Par construction,  $\dim(B_s) = 2$  et  $\dim(B_t) = 1$ . Alors,  $A$  est noethérien, et  $B$  est la normalisation de  $A$  et est fini sur  $A$ . Comme  $A$  est de dimension 2 et intègre il est évidemment caténaire. Si  $A$  était universellement caténaire, la formule de dimension (voir note (iv)) entraînerait  $\dim(A) = \dim B_s = \dim B_t$ , une contradiction.

On peut même trouver pour tout  $n \geq 2$  des anneaux locaux noethériens intègres de dimension  $n$  vérifiant 2.a), caténaires non universellement caténaires donc ne vérifiant pas 3) ([Heinzer et al., 2004]).

**11.1.2.** *La formelle caténarité ne se teste pas sur l'hensélisé.* Par des techniques de pincements analogues de surfaces sur  $k$ , donc de caractéristique nulle si on veut, comme plus haut, Grothendieck construit en effet un exemple d'anneau local non universellement caténaire (donc non formellement caténaire) dont l'hensélisé est excellent ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.7.7]). Quitte à changer de base par la clôture séparable,

<sup>xxiii</sup>Voir [Spivakovsky, 1999], th. 11.3 pour un énoncé un peu plus général.

<sup>xxiv</sup>L'argument n'utilise que la géométrie régularité des fibres – et le caractère hensélien – mais pas la formelle caténarité. Ce n'est pas paradoxal, car un anneau local hensélien est excellent si et seulement si ses fibres formelles sont géométriquement régulières (5.5.1).



on s'aperçoit que la formelle caténarité ne se teste pas plus sur l'hensélisé strict, contrairement à la quasi-excellence (8.1).

**11.1.3.** *La formelle caténarité n'entraîne certainement pas 2.a) (ni même 2.c)).* Par exemple, un anneau de valuation discrète  $A$  non excellent (cf. la partie 11.5) a une fibre formelle générique non géométriquement régulière (en effet, il est formellement caténaire (2.8) et 2.a) entraîne 1.a) dans le cas local (5.5.1)). Or, cette fibre générique formelle est artinienne dans ce cas (elle ne contient pas l'idéal maximal de  $\hat{A}$ ) et donc la géométrie régularité équivaut ici à la géométrie réduction.

**11.1.4.** *Il existe des anneaux intègres normaux non formellement caténaires.* Ogoma ([Ogoma, 1980]) a construit une  $\mathbf{Q}$ -algèbre locale  $A$  intègre normale de dimension 3 dont le complété à une composante de dimension 2 et une composante de dimension 3 et donc n'est pas équidimensionnel. Pire, cet anneau n'est même pas caténaire : il possède une infinité de chaînes saturées d'idéaux premiers de longueur 2 ou 3.

**11.2. Quasi-excellence : conditions d'ouverture 1.a) et 1.b).** On s'intéresse ici à des anneaux ayant un lieu régulier ou normal non ouvert.

Comme on le verra plus loin (XIX-2.3), Gabber a construit un exemple de schéma, qu'on peut même supposer être un  $\mathbf{Q}$ -schéma, intègre de dimension 1, dont le lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) contient une infinité de points et en particulier n'est pas ouvert. La construction assure que les fibres formelles sont géométriquement régulières. Comme on est en dimension 1, normalité et régularité coïncident de sorte qu'on a un exemple vérifiant 2.a) et 3) mais pas 1.b).

Dans [Rotthaus, 1979], Rotthaus construit une  $\mathbf{Q}$ -algèbre noethérienne locale intègre de dimension 3 qui est formellement caténaire, universellement japonaise mais dont le lieu régulier n'est pas ouvert.

**11.3. Quasi-excellence. Fibres formelles : conditions 2a), 2b) et 2c).** On s'intéresse ici à des anneaux ayant des fibres formelles non géométriquement régulières voire pire.

- Rotthaus construit une  $\mathbf{Q}$ -algèbre locale  $A$  noethérienne de dimension 3 régulière (donc formellement caténaire), universellement japonaise mais pas excellente ([Rotthaus, 1979]). Précisément, la fibre formelle au dessus d'un point de hauteur 1 n'est pas régulière. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) car  $A$  régulier mais pas 2.a).

Dans l'exemple d'Ogoma précédent, la fibre formelle générique est connexe non intègre (elle a une composante de dimension 1 et une de dimension 2 qui se coupent), donc non normale. On a donc un exemple de  $\mathbf{Q}$ -algèbre locale (de dimension 3) noethérienne (intègre et normale) ne vérifiant pas 2.b).

On peut descendre d'une dimension : Nagata construit ([Nagata, 1962], ex. 7 de l'appendice A1) une  $\mathbf{Q}$ -algèbre locale  $B$  qui est intègre normale, formellement caténaire et de dimension 2 mais dont le complété n'est

pas intègre<sup>xxv</sup>. D'après 6.2, ceci prouve que  $B$  ne vérifie pas 2.b) (mais vérifie 3)).

- En caractéristique  $> 0$ , Rotthaus construit également ([Rotthaus, 1979]) une algèbre locale noethérienne de dimension 2 régulière universellement japonaise mais pas excellente. Dans ce dernier cas, comme les fibres formelles sont de dimension  $< 2$ , elles ne sont pas non plus géométriquement normales. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) mais pas 2.b).
- En caractéristique nulle, Ferrand et Raynaud ont construit ([Ferrand & Raynaud, 1970], prop. 3.3 et 3.5) une  $\mathbf{C}$ -algèbre locale noethérienne  $A$  intègre de dimension 2 telle que
  - le normalisé  $A'$  de  $A$  est l'anneau des séries convergentes noté  $\mathbf{C}\{x, y\}$  (ne pas confondre avec l'hensélisé de  $\mathbf{C}[x, y]$ ) et donc est excellent.
  - $A$  n'est pas japonais (en fait,  $A'$  n'est pas fini sur  $A$ ).
  - $\widehat{A}$  a des composantes immergées (de sorte que – platitude – la fibre formelle générique a des composantes immergées et donc ne vérifie pas 2.c)).
  - Le lieu normal de  $A[[T]]$  n'est pas ouvert. D'après [ÉGA IV<sub>2</sub> 6.13.5] son lieu régulier n'est donc pas ouvert non plus.
  - L'anneau  $A$  est formellement caténaire (le spectre de son complété est irréductible). Il en est donc de même de  $A[[T]]$  ([Seydi, 1970]).
- Dans [Nagata, 1962], ex. 5 de l'appendice A1, Nagata construit même un anneau local noethérien intègre de dimension 3 (de caractéristique  $> 0$ ) dont la clôture intégrale n'est même pas noethérienne; en particulier, cet anneau n'est pas japonais<sup>xxvi</sup>.
- Pire, à partir d'anneaux construits par Nagata, Seydi construit ([Seydi, 1972]) un anneau noethérien intègre normal  $A$  de dimension 3 dont le corps des fractions est de caractéristique nulle et dont le complété n'est pas réduit. En particulier, il est japonais mais pas universellement japonais. Ogoma construit ([Ogoma, 1980]) une  $\mathbf{Q}$ -algèbre noethérienne normale, donc japonaise, qui n'est ni universellement japonaise ni caténaire.
- Les fibres formelles peuvent être épouvantables, même en dimension 1 : Ferrand et Raynaud construisent un  $\mathbf{C}$ -schéma local intègre de dimension 1 dont la fibre formelle générique est un schéma artinien qui n'est même pas Gorenstein – donc certainement non réduit – ([Ferrand & Raynaud, 1970], prop. 3.1) :  $X$  ne vérifie pas 2.c). En particulier,  $X$  n'est pas universellement japonais (et donc pas quasi-excellent). Bien entendu,  $X$  vérifie 1.a) et 3) pour des raisons de dimension.

<sup>xxv</sup>La construction est la suivante : soient  $x, y$  algébriquement indépendants sur  $\mathbf{Q}$  et  $w = \sum_{i>0} a_i x^i \in \mathbf{Q}[[x]]$  transcendant sur  $K(x)$ . On pose  $z_1 = (y + w)^2$  et  $z_{i+1} = (z - (y + \sum_{j<i} a_j x^j)^2)/x^i$ . Soit  $A$  le localisé de  $\mathbf{Q}[x, y, z_i, i \geq 1]$  en  $(x, y, z_i, i \geq 1)$ . Alors,  $B = A[X]/(X^2 - z_1)$  est l'exemple cherché. On vérifie facilement que la complétion de  $A$  est  $\mathbf{Q}[[x, y]]$  de sorte que  $\widehat{B} = \mathbf{Q}[[x, y]][X]/(X^2 - (y + w)^2)$  n'est pas intègre. Comme d'habitude dans ces constructions, c'est le caractère noethérien de  $A$  qui pose problème. Une fois ceci acquis,  $A$  est régulier de dimension 2 et  $B$  normal puisque que Cohen-Macaulay de dimension 2 singulier uniquement à l'origine. Notons que  $B$  est formellement caténaire comme quotient d'un régulier.

<sup>xxvi</sup>La construction est du même type que celle d'un anneau de valuation discrète décrite dans la note (xxvii) dont on reprend les notations. On considère cette fois-ci l'anneau  $B = k^P[[X, Y, Z]][k]$  et  $d = Y \sum_{i>0} X_i X^i + Z \sum_{i>0} X_{2i+1} X^i$ . L'anneau  $B[d]$  convient.

- Les exemples d'anneaux de valuation discrète non excellents (donc de caractéristique positive) donnent des exemples d'anneaux ne vérifiant pas 2.c) (2.a) et 2.c) sont équivalents en dimension  $\leq 1$ ) mais vérifiant 1.a) et 3).

REMARQUE 11.4. Nagata a construit ([Nagata, 1962], (E3.3)) un anneau de valuation discrète dont la fibre formelle générique est une extension radicielle non triviale de son corps des fractions, donc non excellent<sup>xxvii</sup>.

On va voir maintenant que de tels anneaux se rencontrent très facilement.

**11.5. Méthode systématique de construction d'anneaux non quasi-excellents.** En fait, on peut construire (Orgogozo) de façon systématique de très nombreux anneaux de valuation discrète non quasi-excellents. Précisons<sup>xxviii</sup>.

PROPOSITION 11.6. Soit  $k((t))$  le corps des séries de Laurent à coefficients dans un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$  muni de sa valuation  $t$ -adique et  $L/k$  une sous-extension de type fini de  $k((t))/k$  de degré de transcendance  $> 1$  sur  $k$ . Alors, le sous-anneau  $A$  de  $L$  des éléments de valuation  $\geq 0$  est un anneau de valuation discrète non excellent.

*Démonstration.* Soit  $\bar{L}$  un corps de caractéristique  $> 0$ . Le  $p$ -rang est la dimension, finie ou non, de  $\Omega_{\bar{L}}$ , le module des différentielles absolues. C'est aussi  $\log_p([\bar{L} : \bar{L}^p])$  où  $[\bar{L} : \bar{L}^p]$  est la dimension de  $\bar{L}$  sur  $\bar{L}^p$  ([ÉGA IV<sub>1</sub> 21.3.5]). La remarque clef est que le  $p$ -rang croît par extension de corps séparable  $\bar{K}/\bar{L}$ , finie ou non, puisqu'on a dans ce cas un plongement  $\bar{K} \otimes_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}} \hookrightarrow \Omega_{\bar{K}}$  ([ÉGA IV<sub>2</sub> 20.6.3])

$$(11.a) \quad [\bar{L} : \bar{L}^p] \leq [\bar{K} : \bar{K}^p].$$

Par ailleurs, si  $\bar{L}$  est de type fini sur un corps  $k$ , on a ([Bourbaki, 1950], V.6.3)

$$(11.b) \quad [\bar{L} : \bar{L}^p] = p^{\deg_{\text{tr}_k}(\bar{L})} [k : k^p].$$

Plaçons nous dans la situation du lemme. L'anneau  $A$  est de valuation discrète par construction et son corps des fractions est  $L$ . L'ensémielisé  $A^h$  est local régulier de dimension 1 donc intègre et son corps des fractions  $K = \text{Frac}(A^h)$  contient  $L = \text{Frac}(A)$ . Le complété  $\widehat{A^h}$  est un anneau de séries formelles  $\widehat{K} = k[[\omega]]$ ,  $\omega$  uniformisante de  $A^h$  (comme complété d'une  $k$ -algèbre locale régulière de dimension 1) et son corps des fractions  $\widehat{K}$  est la fibre générique formelle de  $\text{Spec}(\widehat{A^h}) \rightarrow \text{Spec}(A^h)$ .

<sup>xxvii</sup>Voici la construction : soit  $k$  le corps des fractions de  $\mathbb{F}_p[X_n, n > 0]$  et  $K$  celui de  $\widehat{A} = k[[Y]]$ . Soit  $L$  le sous-corps de  $K = k((Y))$  corps des fractions de  $A = k^p[[Y]][k]$ . Le complété de  $A$  est  $\widehat{A}$ . On montre, et c'est le point délicat, que  $A$  est noethérien. L'outil est le critère de Cohen : un anneau semi-local est noethérien si et seulement si les idéaux maximaux sont de type fini et les idéaux de type fini fermés ([Nagata, 1962], 31.8). Son complété étant régulier, il est lui même régulier donc de valuation discrète (dimension). Soit  $L$  le corps des fractions de  $A$ . On vérifie facilement que  $c = \sum_{n>0} X_n Y^n$ , n'est pas dans  $L$ . Choisissons une  $p$ -base  $\{c_i\}$  de  $K$  sur  $L$  contenant  $c$  (ce qui est possible car  $c \notin L^p$ , cf. [ÉGA IV<sub>1</sub> 21.4.3]). Soit  $K_0$  le corps engendré sur  $L$  par les  $c_i$  distincts de  $c$ . L'extension  $K/K_0$  est radicielle de degré  $p$  par construction. L'anneau  $A \cap K_0$  est un anneau de valuation discrète de complété  $k[[Y]]$  de sorte que la fibre formelle générique n'est pas géométriquement réduite.

<sup>xxviii</sup>Cette construction généralise en fait, de façon indépendante, un exemple obtenu par Rothaus dans [Rothaus, 1997]

Supposons que  $A^h$  soit quasi-excellent (précisément vérifie 2.a) de sorte que l'extension  $\widehat{K}/K$  est *séparable*.

On a donc dans ce cas

$$[K : K^p] \leq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

Comme  $\widehat{K} = k((\varpi))$ , on a

$$[\widehat{K} : \widehat{K}^p] = p[k : k^p].$$

On a donc (11.a), l'extension  $K/L$  étant séparable,

$$[K : K^p] \geq [L : L^p].$$

de sorte que, grâce à (11.b), on a

$$p[k : k^p] = [\widehat{K} : \widehat{K}^p] \geq [L : L^p] > p[k : k^p],$$

une contradiction. Ceci interdit à  $A$  également d'être quasi-excellent (8.1).  $\square$

## EXPOSÉ II

### Topologies adaptées à l'uniformisation locale

Fabrice Orgogozo

Dans cet exposé,  $\ell$  est un nombre premier, l'entier 1 ou bien le symbole  $\infty$  et l'on note  $\ell'$  l'ensemble des entiers naturels premiers à  $\ell$  où, par convention,  $\infty' = \{1\}$ .

#### 1. Morphismes maximalelement dominants et la catégorie $\text{alt}/S$

##### 1.1. Morphismes maximalelement dominants.

**1.1.1.** Rappelons ([ÉGA IV 1.1.4]) qu'un point d'un schéma est dit *maximal* s'il est le point générique d'une composante irréductible ou, de façon équivalente, s'il est maximal pour l'ordre sur l'ensemble des points du schéma défini par la relation :  $x \geq y$  si et seulement si  $y$  est une spécialisation de  $x$  (c'est-à-dire si  $y \in \overline{\{x\}}$ ). Les points maximaux d'un schéma affine correspondent aux idéaux premiers minimaux. Tout ouvert dense d'un schéma contient la totalité des points maximaux.

**DÉFINITION 1.1.2.** Un morphisme de schémas est dit *maximalelement dominant* s'il envoie tout point maximal de la source sur un point maximal du but.

Un morphisme entre schémas irréductibles est maximalelement dominant si et seulement si il est dominant. Il est clair que le composé de deux morphismes maximalelement dominants est maximalelement dominant.

**EXEMPLE 1.1.3.** D'après [ÉGA IV<sub>2</sub> 2.3.4], un morphisme plat, ou plus généralement quasi-plat (*op. cit.*, 2.3.3), est générisant ([ÉGA I' 3.9.1]) donc maximalelement dominant (*op. cit.* 3.9.5).

**PROPOSITION 1.1.4.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme maximalelement dominant. Tout point maximal de  $Y$  appartenant à l'image de  $f$  est l'image d'un point maximal de  $X$ .

*Démonstration.* Cela résulte du fait que  $f$  est croissante pour le préordre ci-dessus et du fait que tout point de  $X$  a une générisation maximale.  $\square$

**PROPOSITION 1.1.5.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme maximalelement dominant et  $Y' \rightarrow Y$  un morphisme plat. Alors, le morphisme  $X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  est maximalelement dominant.

*Démonstration.* Cf. [ÉGA IV<sub>2</sub> 2.3.7] (ii).  $\square$

Rappelons la proposition suivante.

**PROPOSITION 1.1.6** ([ÉGA IV 20.3.5]). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme maximalelement dominant. Supposons que  $X$  est réduit et que  $Y$  n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles (par exemple,  $Y$  noethérien). Alors, pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $Y$  et tout ouvert  $\mathcal{V}$  dense dans  $\mathcal{U}$ , l'ouvert  $f^{-1}(\mathcal{V})$  est dense dans  $f^{-1}(\mathcal{U})$ .

L'hypothèse sur  $Y$  assure que tout point maximal de  $U$  appartient à  $V$ .

**PROPOSITION 1.1.7.** *Soit  $Y$  un schéma noëthérien et soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini, maximalelement dominant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe un ouvert dense de  $Y$  au-dessus duquel  $f$  est fini.*
- (ii) *Pour tout point maximal  $\eta$  de  $X$ , l'extension  $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$  est finie.*

Un morphisme de schémas satisfaisant la condition (i) ci-dessus est souvent dit *génériquement fini* (en bas).

*Démonstration.* L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du Nullstellensatz et n'utilise pas les hypothèses de finitude faites ( $Y$  noëthérien,  $f$  de type fini). Démontrons la réciproque. On peut supposer  $Y$  irréductible et  $X, Y$  réduits : on utilise le fait que  $f$  est fini si et seulement si  $f_{\text{red}}$  l'est. Par passage à la limite ([ÉGA IV 8.10.5.(x)]), on peut également supposer que  $Y$  est le spectre d'un corps  $k$ . On peut également supposer  $X$  irréductible donc intègre. Le résultat est alors conséquence du fait qu'une algèbre intègre entière sur un corps est un corps. (Alternativement, on peut utiliser l'inégalité  $\dim(X) \leq \dim(Y) = 0$ , qui est un cas particulier de [ÉGA IV 5.6.6].)  $\square$

**DÉFINITION 1.1.8.** On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est *maximalement  $\ell'$ -fini* si pour tout point maximal  $\eta$  de  $X$ , l'extension  $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$  est finie et si pour tout point maximal  $\mu$  de  $Y$  dans l'image de  $f$ , il existe un point maximal  $\eta$  de  $X$  au-dessus de  $\mu$  tel que l'extension  $\kappa(\eta)/\kappa(\mu)$  soit de degré appartenant à  $\ell'$ .

**1.1.9.** Lorsque  $\ell = 1$ , la seconde condition est vide. Il est utile de faire les conventions de langage suivantes : un morphisme maximalelement  $\ell'$ -fini et maximalelement dominant est dit *maximalement  $\ell'$ -fini dominant*, et un morphisme maximalelement  $\ell'$ -fini « *maximalement fini* ».

**PROPOSITION 1.1.10.** *Soient  $S$  un schéma et  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme entre  $S$ -schémas maximalelement dominants. Si  $Y/S$  est maximalelement fini,  $f$  est maximalelement dominant. Si l'on suppose de plus  $X/S$  maximalelement fini, le morphisme  $f$  est maximalelement fini dominant.*

*Démonstration.* Soient  $x$  un point maximal de  $X$  et  $s$  (resp.  $y$ ) son image dans  $S$  (resp.  $Y$ ). Soit  $y' \geq y$  une générisation maximale de  $y$ . Les schémas  $X$  et  $Y$  étant maximalelement dominants sur  $S$ ,  $s$  est un point maximal et  $y'$  est d'image  $s$ . Enfin, si  $Y/S$  est maximalelement fini, l'extension  $\kappa(y')/\kappa(s)$  est finie de sorte que  $y'$  est isolé dans la fibre  $Y_s$ . Le point  $y$ , appartenant à l'adhérence de  $y'$  dans  $Y_s$ , coïncide donc avec  $y'$  : le morphisme  $f$  est maximalelement dominant. Si l'on suppose de plus  $X/S$  maximalelement fini, la finitude de l'extension  $\kappa(x)/\kappa(s)$  entraîne celle de l'extension intermédiaire  $\kappa(x)/\kappa(y)$ .  $\square$

## 1.2. La catégorie $\text{alt}/S$ .

**1.2.1.** Soit  $S$  un schéma noëthérien. Notons  $\eta_S$  le schéma coproduit (fini) de ses points maximaux.

**DÉFINITION 1.2.2.** On note  $\text{alt}/S$  la catégorie des  $S$ -schémas de type fini, maximalelement finis dominants, de source un schéma *réduit*. Les morphismes dans  $\text{alt}/S$  sont les  $S$ -morphisms.

**1.2.3.** Notons les faits suivants :

- le  $S$ -schéma  $S_{\text{réd}}$  est final dans la catégorie  $\text{alt}/S$  ;
- tout morphisme de  $\text{alt}/S$  est maximalement fini dominant (**1.1.10**) ;
- les images inverses de diviseurs existent pour tout morphisme de  $\text{alt}/S$  ([ÉGA IV 21.4.5.(iii)]);
- si  $X \in \text{Ob } \text{alt}/S$  et  $S' \rightarrow S$  est un morphisme *réduit* ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.8.1]) avec  $S'$  noethérien, le produit fibré usuel  $X' = X \times_S S'$  est naturellement un objet de  $\text{alt}/S'$ . Il en est plus généralement ainsi de  $X'_{\text{réd}}$  dès lors que  $S' \rightarrow S$  est plat.

**REMARQUES 1.2.4.** (i) Le produit fibré usuel de deux  $S$ -schémas maximalement dominants n'est pas nécessairement maximalement dominant, comme on peut le constater lorsque  $S = \mathbf{A}^2$  et  $X = Y$  sont l'éclatement en l'origine.

- (ii) La définition originale de la catégorie  $\text{alt}/S$ , due à O. Gabber, est moins restrictive sur le schéma  $S$  : il est supposé cohérent et ayant un nombre fini de composantes irréductibles. Les objets de  $\text{alt}/S$  sont alors les  $S$ -schémas de type fini quasi-séparés réduits, maximalement dominants, génériquement finis. Le cadre noethérien semble suffisant pour nos besoins. Signalons cependant que les « localisés » d'un schéma noethérien pour la topologie des altérations (introduite ci-dessous) ne sont pas nécessairement noethériens (cf. **4.2.1**).

**1.2.5.** Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. On note  $X_{\text{md}}$  l'adhérence de l'image (ensembliste) de  $X_{\eta_S}$  dans  $X$ , muni de la structure réduite. C'est la réunion des composantes irréductibles de  $X$  dominant une composante irréductible de  $S$ , munie de la structure réduite. Le foncteur  $T \mapsto T_{\text{md}}$  est adjoint à droite au foncteur d'inclusion de la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalement dominants sur  $S$  dans la catégorie des  $S$ -schémas de type fini.

**PROPOSITION 1.2.6.** *Les produits fibrés existent dans  $\text{alt}/S$ .*

*Démonstration.* Soient  $X \rightarrow S' \leftarrow Y$  deux flèches dans  $\text{alt}/S$ ; d'après **1.1.10**, les schémas  $X$  et  $Y$  sont naturellement des objets de  $\text{alt}/S'$ . Le composé de deux morphismes maximalement finis dominants de type fini étant de même nature, un produit de  $X$  et  $Y$ , vus dans  $\text{alt}/S'$ , est — s'il existe — un produit fibré dans  $\text{alt}/S$ . On peut donc supposer  $S = S'$  et  $S$  réduit. Soient  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\text{alt}/S$ . Il résulte formellement de l'existence du produit dans la catégorie des  $S$ -schémas de type fini et de la propriété d'adjonction de  $X \mapsto X_{\text{md}}$  que le schéma  $(X \times_S Y)_{\text{md}}$ , muni des deux projections évidentes, est le produit de  $X$  et  $Y$  dans la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalement dominants sur  $S$ . Il appartient à  $\text{Ob } \text{alt}/S$  car  $((X \times_S Y)_{\text{md}})_{\eta_S} = (X_{\eta_S} \times_{\eta_S} Y_{\eta_S})_{\text{réd}}$  est fini sur  $\eta_S$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.2.7.** *La propriété d'être maximalement  $\ell'$ -fini est stable par changement de base.*

*Démonstration.* Il faut montrer que si  $k'/k$  est une extension finie de degré premier à  $\ell$ , où  $k$  est de caractéristique  $p$  et  $K/k$  est une extension quelconque l'un des corps résiduels du produit tensoriel  $K' = k' \otimes_k K$  est de degré premier à  $\ell$  sur  $K$ . On peut pour cela supposer  $k'/k$  étale ou radicielle. Dans le premier cas, on écrit  $K' = \prod_i K_i$ , où  $K_i$  est une extension étale de degré  $d_i$  sur  $K$ , et on remarque que si la somme  $\sum_i d_i = [k' : k]$  est première à  $\ell$ , il en est de même de l'un des  $d_i$ . Le

second cas ne se produit pas si  $\ell = p$  et est trivial lorsque  $\ell \neq p$ , toute extension finie radicielle étant de degré une puissance de  $p$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.2.8.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini) entre deux  $S$ -schémas de type fini. Le morphisme  $f_{\text{md}} : X_{\text{md}} \rightarrow Y_{\text{md}}$  est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini).*

*Démonstration.* Le cas d'une immersion ouverte est conséquence du fait général suivant sur les topologies induites : la trace sur un ouvert de l'adhérence d'une partie coïncide avec l'adhérence de la trace de cette partie (cf. p. ex. [Bourbaki, TG, I, §3, n°1 prop. 1] pour une variante). Considérons maintenant le cas d'un morphisme propre et surjectif  $f : X \rightarrow Y$ . Par construction, les morphismes  $X_{\text{md}} \rightarrow X$  et  $Y_{\text{md}} \rightarrow Y$  sont des immersions fermées ; les schémas  $X_{\text{md}}$  et  $Y_{\text{md}}$  sont donc propres sur  $Y$ . Le  $Y$ -morphisme  $f_{\text{md}}$  est donc propre. Son image contient  $f_{\eta_S}(X_{\eta_S}) = Y_{\eta_S}$  donc son adhérence  $Y_{\text{md}}$ . Le dernier cas est tout aussi trivial et laissé au lecteur.  $\square$

**1.2.9.** Notons que si  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un  $S$ -schéma de type fini  $X$ , les ouverts  $(U_{i_{\text{md}}})_{i \in I}$  recouvrent le schéma  $X_{\text{md}}$ .

## 2. Topologies : définitions

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma noëthérien  $S$ .

### 2.1. Topologie étale $\ell'$ -décomposée.

**2.1.1.** Nous dirons qu'un recouvrement étale  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  d'un schéma  $X$  est  $\ell'$ -décomposé si tout point de  $X$  peut être relevé en un point  $x_i$  d'un  $X_i$  tel que le degré  $[\kappa(x_i) : \kappa(x)]$  appartienne à  $\ell'$ . Lorsque  $\ell = 1$  la condition imposée est vide et l'on dit simplement que la famille constitue un recouvrement étale. Lorsque  $\ell = \infty$ , on retrouve la définition de [Nisnevich, 1989, §1] et l'on dit plutôt que le recouvrement est *complètement* décomposé. Il résulte de 1.2.7 que la propriété d'être un recouvrement étale  $\ell'$ -décomposé est stable par changement de base.

**2.1.2.** On appelle *topologie étale  $\ell'$ -décomposée* la topologie de Grothendieck sur  $\text{alt}/S$ , notée  $\text{ét}_{\ell'}$ , définie par la prétopologie constituée des recouvrements étales  $\ell'$ -décomposés.

### 2.2. Sorites sur le lieu $\ell'$ -décomposé.

**2.2.1.** Pour chaque morphisme de schémas  $f : Y \rightarrow X$ , posons

$$\text{déc}_{\ell'}(f) = \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tel que } f(y) = x, [\kappa(x) : \kappa(y)] \text{ fini appartenant à } \ell'\}.$$

Lorsque  $\ell = \infty$ , on retrouve l'ensemble  $\text{cd}(f)$  introduit par Nisnevich. Nous utiliserons également cette notation.

**PROPOSITION 2.2.2.** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme étale avec  $X$  noëthérien. L'ensemble  $\text{déc}_{\ell'}(f)$  est ind-constructible, c'est-à-dire —  $X$  étant noëthérien — réunion de parties localement fermées.*

*Démonstration.* On peut supposer  $X$  et  $Y$  intègres, de points génériques notés  $\eta$  et  $\mu$  respectivement. Par récurrence noëthérienne, il suffit de montrer que si  $\eta$  appartient à l'ensemble  $\text{déc}_{\ell'}(f)$ , celui-ci contient un ouvert de  $X$ . On peut supposer de plus  $X$  et  $Y$  affines d'anneaux  $A$  et  $B$  respectivement, et le morphisme  $A \rightarrow B$  fini. La fonction  $\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} B/\mathfrak{p}B$ ,  $X \rightarrow \mathbf{N}$ , est localement constante pour la topologie de Zariski car  $B$  est plat de présentation finie — donc localement libre —



sur  $A$ . Elle prend la valeur  $[\kappa(\mu) : \kappa(\eta)]$  — première à  $\ell$  — en  $\eta$ . Il en est donc ainsi au voisinage de  $\eta$ ; la conclusion en résulte aussitôt.  $\square$

Précisons un peu ce résultat lorsque  $\ell = \infty$ .

**PROPOSITION 2.2.3.** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme localement de type fini, avec  $X$  noëthérien. Un point  $x \in X$  appartient à  $\text{cd}(f)$  si et seulement si il existe un sous-schéma  $Z$  de  $X$  contenant  $x$  au-dessus duquel  $f$  a une section.*

*Démonstration.* La condition est bien entendu suffisante. Considérons  $x \in \text{cd}(f)$ ; c'est le point générique du sous-schéma fermé réduit  $\overline{\{x\}}$ . Par hypothèse, il existe une section au-dessus de ce point. Le morphisme  $f$  étant localement de présentation finie, cette section s'étend par passage à la limite à un ouvert  $Z = U \cap \overline{\{x\}}$  de  $\overline{\{x\}}$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.4.** *Soient  $X$  un schéma noëthérien et  $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  pour la topologie étale  $\ell'$ -décomposée. Il existe alors un sous-ensemble fini  $I_0 \subset I$  tel que la famille  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I_0}$  soit également couvrante.*

Rappelons qu'un morphisme étale est, par définition, localement de présentation finie.

*Démonstration.* D'après [ÉGA IV 1.9.15], l'espace topologique  $X^{\text{cons}}$ , dont l'espace sous-jacent est  $X$  et dont les ouverts sont les parties ind-constructibles de  $X$ , est compact. Les ensembles  $\text{dec}_{\ell'}(f_i)$  en constituent un recouvrement par des ouverts.  $\square$

**PROPOSITION 2.2.5.** *Soit  $(U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha)_{\alpha \in A}$  un système projectif, filtrant, cartésien, de morphismes étales entre schémas noëthériens, à morphismes de transition affines. Notons  $f_\infty : U_\infty \rightarrow X_\infty$  le morphisme induit sur la limite projective et, pour chaque  $\alpha$ ,  $\pi_\alpha$  la projection  $X_\infty \rightarrow X_\alpha$ . On a*

$$\text{cd}(f_\infty) = \bigcup_{\alpha} \pi_\alpha^{-1}(\text{cd}(f_\alpha)).$$

*Démonstration.* L'inclusion du terme de droite dans le terme de gauche est évidente. Considérons réciproquement un point  $x_\infty$  dans  $\text{cd}(f_\infty)$ . Le morphisme  $f_\infty$  a une section sur un sous-schéma de présentation finie  $Z_\infty$  contenant  $x_\infty$ . Le morphisme et la section se descendent par passage à la limite à un niveau fini  $\alpha$  (cf. [ÉGA IV 8.6.3, 8.8.2]).  $\square$

Les quatre énoncés précédents sont valables, *mutatis mutandis*, lorsque l'on suppose simplement  $X$  cohérent et le morphisme  $f$  localement de présentation finie. Pour référence ultérieure, signalons le lemme de descente d'une section suivant.

**PROPOSITION 2.2.6.** *Soient  $k'/k$  une extension finie de corps de degré premier à  $\ell$  et  $K/k$  une extension finie de degré une puissance de  $\ell$ . Posons  $K' = k' \otimes_k K$ . Si le morphisme  $\text{Spec}(K') \rightarrow \text{Spec}(K)$  possède une section, le morphisme  $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$  possède également une section : c'est un isomorphisme.*

(Notons qu'un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  a une section si et seulement si le morphisme  $X_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec}(k)$  qui s'en déduit a une section.)

*Démonstration.* Cela résulte du fait que l'image de  $k'$  dans  $K$  par le morphisme composé  $k' \rightarrow K' \rightarrow K$ , où la seconde flèche est la rétraction dont on suppose l'existence, est à la fois de degré premier à  $\ell$  et de degré une puissance de  $\ell$  sur  $k$ .  $\square$

### 2.3. Topologie des $\ell'$ -altérations.

**2.3.1.** On appelle *topologie des  $\ell'$ -altérations* la topologie de Grothendieck sur  $\text{alt}/S$ , notée  $\text{alt}_{\ell'}$ , définie par la prétopologie engendrée par

- (i) les recouvrements étales  $\ell'$ -décomposés ;
- (ii) les morphismes propres *maximalement  $\ell'$ -finis* surjectifs.

Prendre garde au fait que la seconde condition (« maximalement  $\ell'$ -fini ») porte sur les points maximaux tandis que la première («  $\ell'$ -décomposé ») sur tous les points.

**REMARQUE 2.3.2.** Les familles précédentes ne constituent pas une prétopologie au sens de [SGA 4 II 1.3] : la condition de stabilité par composition n'est pas satisfaite. Les autres conditions le sont, notamment la quarrabilité des morphismes (1.2.6).

**2.3.3.** La topologie  $\text{alt}_{\ell'}$  est appelée *topologie des altérations*, notée simplement  $\text{alt}$ .

**2.3.4.** Notons pour référence ultérieure que si  $(X_i \rightarrow X)$  est une famille  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante dans  $\text{alt}/S$  et  $S' \rightarrow S$  est un morphisme plat de source un schéma localement noëthérien, la famille  $(X_i \times_S S' \rightarrow X \times_S S')$  de morphismes dans  $\text{alt}/S'$  est également  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante (cf. 2.1.1, 1.1.5).

## 3. Formes standards

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma noëthérien  $S$  et  $X$  un objet de  $\text{alt}/S$ .

**3.1. Topologie étale.** Le cas  $\ell = 1$  de l'énoncé ci-dessous est un prototype bien connu des résultats que nous allons établir.

**PROPOSITION 3.1.1.** *Toute famille couvrante  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  pour la topologie étale  $\ell'$ -décomposée est dominée par une famille  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante du type*

$$(V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I}$$

où  $Y \rightarrow X$  est fini, maximalement  $\ell'$ -fini, surjectif et  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement étale complètement décomposé. Si  $\ell = 1$ , on peut supposer que  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

*Démonstration.* On peut supposer l'ensemble  $I$  fini (2.2.4) et  $X$  intègre. Par passage à la limite, on peut supposer de plus  $X$  normal, de corps des fractions ayant un groupe de Galois (absolu) pro- $\ell$ . (Le schéma  $X$  n'est donc pas nécessairement noëthérien.) Or, un morphisme étale  $\ell'$ -décomposé d'un tel schéma est nécessairement complètement décomposé car le groupe de Galois des corps résiduels est également pro- $\ell$ . Pour le complément lorsque  $\ell = 1$ , cf. p. ex. [Orgogozo, 2006, lemme 10.3].  $\square$

**3.1.2.** Il résulte immédiatement de la proposition précédente que dans la définition du §2.3, on peut remplacer dans (i) la condition d'être  $\ell'$ -décomposé par celle d'être *complètement décomposé* (resp. de Zariski, si  $\ell = 1$ ).

**3.2. Topologie des altérations.** Dans ce sous-paragraphe, on fixe un nombre premier  $\ell$ .

**THÉORÈME 3.2.1.** *Supposons  $X$  irréductible et quasi-excellent. Toute famille couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations de  $X$  est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I},$$

où  $Y$  est un schéma intègre,  $Y \rightarrow X$  est propre et surjectif de degré générique premier à  $\ell$  et  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée. Si de plus  $\ell = 1$ , on peut supposer que  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

L'hypothèse de quasi-excellence est très certainement superflue (procéder par passage à la limite).

Commençons par la démonstration du cas particulier  $\ell = 1$ , bien qu'il résulte du cas général (joint à 3.1.1 pour le complément).

*Démonstration dans le cas où  $\ell = 1$ .* On peut supposer l'ensemble  $I$  fini. D'après 3.1.1, il suffit de montrer que si  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$  par des ouverts de Zariski et  $(X_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$  une collection de morphismes propres et surjectifs, il existe un morphisme propre et surjectif  $Y \rightarrow X$  dans  $\text{alt}/S$  et un recouvrement par des ouverts de Zariski  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  tels que chaque morphisme composé  $V_i \rightarrow X$  se factorise à travers  $X_i \rightarrow X$ . Choisissons pour chaque  $i$  une compactification  $\overline{X}_i \rightarrow X$  de  $X_i \rightarrow X$ ; on a  $\overline{X}_i|_{U_i} = X_i$ . Posons  $Y = \overline{X}_1 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$ , où  $I = \{1, \dots, r\}$ , et  $V_1 = X_1 \times_X \overline{X}_2 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$ ,  $V_2 = \overline{X}_1 \times_X X_2 \times_X \overline{X}_3 \times_X \cdots \times_X \overline{X}_r$ , etc. Les ouverts  $V_i$  recouvrent le schéma  $\overline{X}$ , qui est propre et surjectif sur  $X$ . Par projection sur le  $i$ -ième facteur, chaque  $V_i$  s'envoie sur  $X_i$ . Quitte à appliquer le foncteur  $T \mapsto T_{\text{md}}$  (1.2.5), qui transforme un morphisme propre et surjectif (resp. un recouvrement de Zariski) en un morphisme propre et surjectif (resp. en un recouvrement de Zariski) (cf. 1.2.8), on obtient un recouvrement du type désiré dans  $\text{alt}/S$ . Si  $X$  est irréductible, on peut supposer  $Y$  intègre.  $\square$

*Démonstration dans le cas général.* Il suffit de vérifier que si  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est un recouvrement étale complètement décomposé de  $X$  et  $(X_i \rightarrow U_i)_{i \in I}$  une collection de morphismes propres, surjectifs, maximale-ment  $\ell'$ -finis, il existe une famille comme dans l'énoncé la dominant. On peut supposer l'ensemble  $I$  fini et le schéma  $X$  intègre et même normal compte-tenu de l'hypothèse de quasi-excellence. Il est également loisible de supposer les  $U_i$  connexes. Notons qu'ils sont normaux. Observons d'autre part que l'on peut supposer les morphismes  $X_i \rightarrow U_i$  finis, surjectifs, plats et de degré générique premier à  $\ell$  : chaque  $X_i \rightarrow X$  étant génériquement plat ( $X$  est réduit), quitte à remplacer  $X$  par une modification  $X' \rightarrow X$ , on peut les platifier ([Raynaud & Gruson, 1971], I 5.2.2), ce qui les rend finis. Quitte à ne considérer qu'une seule composante irréductible de chaque  $X_i$ , de degré générique premier à  $\ell$  et à la normaliser, on peut supposer les  $X_i$  normaux connexes. Résumons :

— les schémas  $X$ ,  $U_i$  et  $X_i$  sont normaux intègres de corps des fractions notés respectivement  $K$ ,  $K_i$  et  $K'_i$  ;

— les morphismes  $X_i \rightarrow U_i$  sont finis de degrés génériques premiers à  $\ell$ .

Soit  $L$  une clôture quasi-galoisienne sur  $K$  d'une extension composée des  $K'_i$ , et considérons  $X_L$  le normalisé de  $X$  dans  $L$ . De même, considérons pour chaque  $i$ , le produit fibré  $U_{iL} = U_i \times_X X_L$  (resp. le produit fibré réduit normalisé  $X_{iL} =$

$(X_i \times_X X_L)_{\text{réd}}^\vee$ ). Compte tenu du choix de  $L$ , pour chaque  $i$  le morphisme  $X_{iL} \rightarrow U_{iL}$  a une section au-dessus de  $\text{Spec}(L)$ . Ce dernier étant fini et  $U_{iL}$  étant *normal*, la section s'étend en une section  $\sigma_i : U_{iL} \rightarrow X_{iL}$ . Soit maintenant un  $\ell$ -Sylow  $S_\ell$  de  $\text{Aut}(L/K) = G$  et notons  $p$  la caractéristique du corps  $K$ . Si  $\ell = p$ , les extensions  $K'_i/K$  sont donc étales de sorte que l'on peut supposer  $L/K$  étale donc *galoisienne*; l'extension  $L^{S_\ell}/K$  est alors de degré  $(G : S_\ell)$ , premier à  $\ell$ . Si  $\ell \neq p$ , l'extension  $L^{S_\ell}/K$  est de degré  $(G : S_\ell)$  multiplié par une puissance de  $p$ ; c'est donc également un entier premier à  $\ell$ . Comme ci-dessus, notons  $X_{L^{S_\ell}}$  le normalisé de  $X$  dans  $L^{S_\ell}$ ,  $U_{iL^{S_\ell}}$  (resp.  $X_{iL^{S_\ell}}$ ) le produit fibré (resp. réduit normalisé) de  $U_i$  (resp.  $X_i$ ) avec  $X_{L^{S_\ell}}$  au-dessus de  $X$ . Le morphisme  $X_{iL^{S_\ell}} \rightarrow X$  est fini, de degré générique premier à  $\ell$ . D'après ce qui précède on a pour chaque  $i$  un diagramme commutatif de schémas normaux :

$$\begin{array}{ccc} X_{iL^{S_\ell}} & \longleftarrow & X_{iL} \\ \text{premier à } \ell \downarrow & & \downarrow \sigma_i \\ U_{iL^{S_\ell}} & \longleftarrow_{\text{puiss. de } \ell} & X_{iL} \end{array}$$

En considérant isolément les composantes irréductibles du schéma normal  $U_{iL^{S_\ell}}$  et, pour chacune d'entre elles, un point maximal de  $X_{iL^{S_\ell}}$  de degré générique premier à  $\ell$  au-dessus, on montre immédiatement (cf. proposition 2.2.6) qu'il existe une section  $U_{iL^{S_\ell}} \rightarrow X_{iL^{S_\ell}}$ . Cela achève la démonstration de la proposition car les  $U_{iL^{S_\ell}}$  forment un recouvrement pour la topologie complètement décomposé du schéma  $X_{L^{S_\ell}}$ , irréductible, de degré générique premier à  $\ell$  sur  $X$ .  $\square$

- REMARQUES 3.2.2. (i) Une famille couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altération le reste après changement de base dans  $\text{alt}/X$ .
- (ii) Il résulte du théorème que l'on obtient la même topologie si l'on remplace la condition (i) de 2.3 par la condition d'être un recouvrement étale *complètement décomposé*. Esquisons une preuve légèrement différente. En passant à la limite sur les  $Y$  comme dans le théorème précédent ( $\ell'$ -altération de  $X$ ) on obtient un schéma normal dont le corps des fonctions a un groupe de Galois absolu pro- $\ell$ . Cette propriété passe aux corps résiduels (vérification triviale) si bien qu'un revêtement étale  $\ell'$ -décomposé est même nécessairement *complètement décomposé*.

Nous ferons également usage de la variante suivante du théorème précédent.

THÉORÈME 3.2.3. *Supposons  $X$  irréductible et quasi-excellent. Toute famille couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations de  $X$  est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(W_i \rightarrow V_i \rightarrow Y \rightarrow X)_{i \in I},$$

où tous les schémas sont irréductibles,  $Y \rightarrow X$  est propre birationnel,  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée, et les morphismes  $W_i \rightarrow V_i$  sont finis, plats, de degré premier à  $\ell$ .

Un énoncé semblable est également valable si  $X$  n'est pas irréductible : considérer le coproduit de ses composantes irréductibles.

*Esquisse de démonstration.* Par platisation, il suffit de montrer le résultat d'échange suivant : si  $Y \rightarrow X$  est fini, plat, de degré générique premier à  $\ell$  et  $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est un recouvrement étale complètement décomposé, il existe un recouvrement étale complètement décomposé  $(U_j \rightarrow X)_{j \in J}$  et des morphismes  $Z_j \rightarrow W_j$ , finis, plats,

de degré premier à  $\ell$  tels que la famille de morphismes composés  $(Z_j \rightarrow X)$  domine celle des  $(V_i \rightarrow X)$ . Par passage à la limite, on peut supposer  $X$  hensélien. Par hypothèse, il existe une composante connexe  $Y^0$  de  $Y$  qui est plate de degré premier à  $\ell$  sur  $X$ . Le schéma  $Y^0$  étant local hensélien, il existe un indice  $i$  tel que la restriction du morphisme  $V_i \rightarrow Y$  à  $Y^0$  ait une section, de sorte que le morphisme composé  $Y^0 \rightarrow X$  se factorise à travers  $V_i$ . Cela permet de conclure.  $\square$

## 4. Applications

### 4.1. Sorites.

**PROPOSITION 4.1.1.** *Soient  $X$  un schéma noëthérien,  $x$  un point de  $X$ ,  $(X_i \rightarrow X)_{i=1,\dots,n}$  un recouvrement pour la topologie des altérations et, pour chaque indice  $i$ , un ouvert  $X_i^0 \hookrightarrow X_i$  contenant la fibre  $(X_i)_x$ . Il existe un voisinage ouvert de Zariski  $U$  de  $x$  tels que la famille  $(X_{i|U}^0 \rightarrow U)_i$  soit alt-couvrante.*

Un cas particulièrement utile — et auquel on pourrait se ramener d'après la proposition suivante — est celui où  $X$  est local de point fermé  $x$ , de sorte que  $U = X$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 3.2.1, la famille  $(X_i \rightarrow X)_i$  est dominée par une famille  $(V_j \hookrightarrow Y \rightarrow X)_j$  où  $f : Y \rightarrow X$  est notamment propre et surjectif, et les  $(V_j \rightarrow Y)_j$  sont un recouvrement ouvert de  $Y$ . Soit  $Y_j^0$  l'image inverse de  $X_i^0 \hookrightarrow X_i$  par une factorisation  $V_j \rightarrow X_i$ . Par hypothèse, au-dessus du point  $x$  de  $X$ ,  $Y_j^0$  et  $V_j$  coïncident, de sorte que  $(Y_j^0)_j$  est une famille d'ouverts de  $Y$  recouvrant la fibre  $Y_x$ . Leur réunion  $Y^0$  est un ouvert de  $Y$ , contenant cette fibre, et on vérifie aussitôt que l'ouvert  $U = X - f(Y - Y^0)$  de  $X$  convient.  $\square$

**PROPOSITION 4.1.2.** *Soit  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  un système projectif filtrant de schémas noëthériens affines à morphismes de transitions dominants. On suppose que la limite  $X = \lim_\alpha X_\alpha$  est un schéma noëthérien irréductible sur lequel un nombre premier  $\ell$  est inversible. Alors, toute famille alt- $\ell'$ -couvrante de  $X$  est dominée par l'image inverse d'une famille alt- $\ell'$ -couvrante de l'un des  $X_\alpha$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.2.1, joint au fait que les diagrammes de morphismes se descendent, il suffit de démontrer le théorème dans les cas particuliers suivants : la famille couvrante est constituée d'un unique morphisme propre surjectif de degré générique premier à  $\ell$  ou bien elle est finie, couvrante pour la topologie étale complètement décomposée. Traitons le premier cas. D'après [ÉGA IV 8.10.5] (vi, xii), tout morphisme propre et surjectif  $Y \rightarrow X$  se descend en un morphisme propre et surjectif  $Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$  ( $\alpha$  suffisamment grand). Vérifions que l'on peut supposer  $Y_\alpha \in \text{Ob alt}/X_\alpha$ . D'après [ÉGA IV 8.4.2], on peut supposer  $X_\alpha$  irréductible et  $X \rightarrow X_\alpha$  maximalelement dominant. Il en résulte, puisque la flèche  $Y_{\text{md}} \rightarrow Y$  est un isomorphisme, que le morphisme  $Y \rightarrow Y_\alpha$  se factorise à travers  $(Y_\alpha)_{\text{md}} \hookrightarrow Y_\alpha$ . On peut donc supposer le morphisme  $Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$  maximalelement dominant. Soit  $\eta_\alpha$  le point générique de  $X_\alpha$ . On doit vérifier que la fibre générique  $(Y_\alpha)_{\eta_\alpha}$  est intègre, finie de degré premier à  $\ell$  sur  $\eta_\alpha$ . Cela résulte du fait qu'elle l'est après changement de base par  $\eta \rightarrow \eta_\alpha$ , où  $\eta$  est le point générique de  $X$ . Traitons maintenant le cas d'un recouvrement étale, complètement décomposé  $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  ( $I$  fini). D'après [ÉGA IV 17.7.8] (ii) et [ÉGA IV 8.10.5] (vi), cette famille provient d'une famille  $(U_{i\alpha} \rightarrow X_\alpha)_{i \in I}$  couvrante pour la topologie étale d'un  $X_\alpha$ , pour  $\alpha$  suffisamment grand. D'après 2.2.5, si pour tout  $\beta \geq \alpha$  on

note  $f_\beta$  le morphisme  $X_\beta \times_{X_\alpha} \coprod_i U_{i\alpha} \rightarrow X_\beta$  et  $\pi_\beta$  le morphisme  $X \rightarrow X_\beta$ , on a  $X = \bigcup_{\beta \geq \alpha} \pi_\beta^{-1}(\text{cd}(f_\beta))$ . C'est une réunion croissante d'ouverts du compact  $X^{\text{cons}}$ ; pour  $\beta$  assez grand on a donc  $X = \pi_\beta^{-1}(\text{cd}(f_\beta))$ . Il résulte de [ÉGA IV 8.3.11] que  $\text{cd}(f_\beta) = X_\beta$  pour  $\beta$  assez grand : sur  $X_\beta$  le recouvrement étale est donc complètement décomposé.  $\square$

**4.2. Caractérisation ponctuelle.** Terminons par une caractérisation de la topologie des altérations, semblable à la caractérisation de la topologie étale à l'aide des anneaux locaux strictement henséliens.

**THÉORÈME 4.2.1** ([Goodwillie & Lichtenbaum, 2001], 3.5). *Soient  $X$  un schéma néethérien et  $Y$  un objet de  $\text{alt}/X$ . La flèche  $Y \rightarrow X$  est couvrante pour la topologie des altérations si et seulement si elle est valuativement surjective au sens suivant : tout morphisme maximalelement dominant  $\text{Spec}(V) \rightarrow X$ , où  $V$  est un anneau de valuation à corps résiduel algébriquement clos se relève en un morphisme  $\text{Spec}(V) \rightarrow Y$ .*

**REMARQUE 4.2.2.** On dispose d'un analogue du théorème 4.2.1, où l'on remplace le point générique géométrique  $\bar{\eta}$  (resp. la condition que le corps des fractions est algébriquement clos) par le quotient  $\bar{\eta}/H$  où  $H$  est un  $\ell$ -Sylow de  $\text{Aut}(\kappa(\bar{\eta})/\kappa(\eta))$  (resp. la condition que le corps des fractions est parfait de groupe de Galois absolu un pro- $\ell$ -groupe).

*Démonstration.* Montrons que la condition est nécessaire. D'après le théorème précédent, on peut supposer  $Y \rightarrow X$  propre et surjectif. (Le cas où  $Y$  est associé à un recouvrement par des ouverts de Zariski est trivial car  $\text{Spec}(V)$  est local.) Notons  $\eta_V$  le point générique de  $\text{Spec}(V)$ . Le morphisme  $\eta_V \rightarrow X$  se relève en un morphisme (non unique)  $\eta_V \rightarrow Y$  d'après le Nullstellensatz, car  $Y \rightarrow X$  est surjectif et  $\kappa(\eta_V)$  algébriquement clos. Il résulte du critère valuatif de propreté que le morphisme  $\eta_V \rightarrow Y$  s'étend en un  $X$ -morphisme  $\text{Spec}(V) \rightarrow Y$ . (Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer  $\text{Spec}(V) \rightarrow X$  maximalelement dominant.)

Montrons que la condition est suffisante. On peut supposer pour simplifier  $X$  affine intègre, de point générique noté  $\eta$ . On peut également supposer  $Y$  affine, de sorte qu'il existe une immersion ouverte  $Y \hookrightarrow \bar{Y}$  dans un schéma propre et surjectif sur  $Y$ . Choisissons enfin un point générique géométrique  $\bar{\eta} \rightarrow X$  et considérons l'espace de Zariski-Riemann  $ZR_{\bar{\eta}}(X)$ , limite des espaces annelés  $X'$ , où  $X'$  est un schéma intègre, propre et surjectif, muni d'un  $X$ -morphisme  $\bar{\eta} \rightarrow X'$ . On peut montrer qu'il est quasi-compact (cf. *op. cit.* ou [Zariski & Samuel, 1975], chap. VI, th. 40 pour une variante) et que si  $X = \text{Spec}(A)$ , l'application qui à un anneau de valuation  $A \subseteq V \subseteq \kappa(\bar{\eta})$  associe le point de  $ZR_{\bar{\eta}}(X)$  correspondant par le critère valuatif de propreté est une bijection.

Tout relèvement  $r : \bar{\eta} \rightarrow Y$  du point générique géométrique de  $X$  induit un  $X$ -morphisme  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{Y}$  donc un morphisme continu  $\pi_r : ZR_{\bar{\eta}}(X) \rightarrow \bar{Y}$ , qui se factorise à travers la composante irréductible de  $\bar{Y}$  atteinte par  $r$ . Par hypothèse, les ouverts  $\pi_r^{-1}(Y)$ , pour  $r$  variable, recouvrent  $ZR_{\bar{\eta}}(X)$ . Par quasi-compacité, il existe donc un nombre fini de relèvements  $r_1, \dots, r_n : \bar{\eta} \rightarrow Y$  tels que  $ZR_{\bar{\eta}} \rightarrow X$  se factorise à travers la réunion des  $n$  ouverts images inverses de  $Y$  dans le  $X$ -schéma propre et surjectif  $\bar{Z} = \bar{Y} \times_X \bar{Y} \times \cdots \times_X \bar{Y}$  ( $n$  fois). Par définition de l'espace de Zariski-Riemann, cette factorisation entraîne que  $\bar{Z}$  est la réunion de ces ouverts. Ainsi,  $Y \rightarrow X$  peut-être raffiné en un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un schéma propre et surjectif. CQFD.  $\square$

**4.3. Réduction des théorèmes d'uniformisation locale au cas hensélien.** Rappelons qu'un des objectifs de ce livre est de démontrer les théorèmes d'uniformisation locale **VII-1.1** et **0-2** dont nous reproduisons l'énoncé.

**THÉORÈME 4.3.1** ([Gabber, 2005b], 1.1). *Soient  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent et  $Z$  un fermé rare de  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout  $i \in I$  on ait :*

- (i) *le schéma  $X_i$  est régulier et connexe ;*
- (ii) *l'image inverse de  $Z$  dans  $X_i$  est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.*

Par convention, l'ensemble vide est considéré comme un diviseur strictement à croisements normaux : c'est une somme indexée par l'ensemble vide.

**THÉORÈME 4.3.2** (op. cit., 1.3). *Soient  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent,  $Z$  un fermé rare de  $X$  et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations et telle que pour tout  $i \in I$  on ait :*

- (i) *le schéma  $X_i$  est régulier et connexe ;*
- (ii) *l'image inverse de  $Z$  dans  $X_i$  est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.*

Dans la fin de cet exposé, nous allons nous contenter de démontrer le fait suivant.

**PROPOSITION 4.3.3.** *Si l'un des théorèmes d'uniformisation est vrai pour tout schéma  $X$  local noëthérien hensélien excellent normal (resp. pour tout schéma  $X$  local noëthérien hensélien excellent normal de dimension au plus un entier  $d$  fixé), il est vrai en général (resp. pour tout schéma noëthérien excellent de dimension finie inférieure ou égale à  $d$ ).*

La réduction au cas où  $X$  est local noëthérien complet est bien plus délicate ; elle fait l'objet de l'exposé suivant.

*Démonstration.* Supposons le théorème **4.3.1** (resp. **4.3.2**) démontré dans le cas local hensélien excellent. Soit  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent et  $Z$  un fermé rare. On peut supposer  $X$  normal intègre car le morphisme de normalisation est couvrant pour la topologie des  $\ell'$ -altérations et l'image inverse de  $Z$  reste rare. Fixons  $x \in X$ . D'après [ÉGA IV 18.7.6] l'hensélisé  $X_{(x)}$  de  $X$  en  $x$  est excellent et  $Z_{(x)}$  est un fermé rare de  $X_{(x)}$ . Il existe donc une famille finie de diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{(x)} & \longleftarrow & X_i \end{array}$$

dans  $\text{alt}/X_{(x)}$ , où  $Y$  est intègre, propre et surjectif (resp. et de degré générique premier à  $\ell$ ) sur  $X$ ,  $(Y_i \rightarrow Y)$  est une famille couvrante pour la topologie de Zariski (resp. complètement décomposée) et la famille  $(X_i \rightarrow X)$  satisfait les conditions (i-ii). Il résulte de la démonstration de la proposition **4.1.2** que cette famille de diagrammes s'étend en famille du même type sur un voisinage étale complètement décomposé  $U$  de  $x$  dans  $X$ . Il reste à vérifier que les propriétés (i) et (ii) sont bien conservées. Si un morphisme  $T \rightarrow X_{(x)}$  de type fini, avec  $T$  régulier, est le changement de base d'un morphisme  $V \rightarrow U$  de type fini où  $U$  est un voisinage

étale de  $x$ , le schéma  $V$  est régulier en les points de l'image du morphisme  $T \rightarrow V$ . (Un schéma local est régulier si et seulement si son hensélisé l'est.) En particulier,  $V$  est régulier en les points de la fibre  $V_x$ . Le lieu régulier étant ouvert, on peut supposer d'après **4.1.1** — quitte à rétrécir le voisinage  $U$  de  $x$  — que  $V$  est régulier. Enfin, il résulte de [ÉGA IV 19.8.1 (ii)] que la propriété d'être un diviseur à croisements normaux stricts se descend si elle est satisfaite à la limite. On conclut par compacité de  $X$  pour la topologie étale complètement décomposée, moins fine que les topologies  $\text{alt}$  et  $\text{alt}_\ell$ . Le cas  $\text{resp}$  de la proposition **4.3.3** est un corollaire immédiat de la démonstration du cas  $\text{non resp}$ .  $\square$



## EXPOSÉ III

# Approximation

Luc Illusie et Yves Laszlo

### 1. Introduction

On montre ici comment ramener la preuve du théorème d'uniformisation (6.1) au cas local, noethérien complet (6.2). On utilise pour cela le théorème de Popescu (qui implique que les anneaux locaux noethériens, henséliens et excellents vérifient la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3) et des méthodes d'approximations de complexes de longueur 2 adaptées de [Conrad & de Jong, 2002] (cf. section 4).

L'exposé oral donné par Alban Moreau utilisait des résultats (dus à Ofer Gabber) d'approximations de complexes plus forts que ceux utilisés ici (4.5). Une version écrite de son exposé a été très utile pour la rédaction de ce texte : nous l'en remercions. Nous remercions également Fabrice Orgogozo de nous avoir signalé que l'énoncé [Conrad & de Jong, 2002, 3.1] suffisait pour les applications en vue.

### 2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu

Soit  $A$  un anneau local noethérien,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\hat{A}$  son complété. On suppose  $A$  excellent et hensélien. Soit  $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$  le morphisme canonique. Pour tout  $n \geq 0$ , on note

$$i_n : S_n \hookrightarrow \hat{S}$$

l'immersion fermée définie par l'idéal  $\hat{\mathfrak{m}}^{n+1} = \mathfrak{m}^{n+1}\hat{A}$  de  $\hat{A}$ . Le composé

$$\pi i_n : S_n \rightarrow \hat{S} \rightarrow S$$

est l'immersion fermée  $S_n \hookrightarrow S$  définie par l'idéal  $\mathfrak{m}^{n+1}$ .

**DÉFINITION 2.1.** Soient  $g : \hat{S} \rightarrow T$  et  $f : S \rightarrow T$  des morphismes de schémas et  $n \in \mathbf{N}$ . On dira que  $f$  et  $g$  sont  $(n+1)$ -proches si leurs restrictions  $f\pi i_n$  et  $g i_n$  à  $S_n$  coïncident.

Si  $X$  est un  $\hat{S}$ -schéma, on note  $X_n$  le  $S_n$ -schéma  $X \times_{\hat{S}} S_n \rightarrow S_n$ .

Écrivons  $\hat{A}$  comme limite inductive suivant un ensemble ordonné filtrant  $E$  de  $A$ -algèbres de type fini  $A_\alpha$ . On a des diagrammes commutatifs

(2.a)

$$\begin{array}{ccc} & S_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha) & \\ & \nearrow s_\alpha & \downarrow t_\alpha \\ \hat{S} & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

avec  $t_\alpha$  de type fini et un isomorphisme  $\hat{S} = \varinjlim S_\alpha$  [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.2.3].

**DÉFINITION 2.2.** Soit  $X$  un  $\hat{S}$ -schéma de type fini et  $h : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $\hat{S}$ -schémas de type fini.

Un modèle de  $X$  sur  $S_\alpha$  est un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_\alpha \\ f \downarrow & \square & \downarrow f_\alpha \\ \hat{S} & \longrightarrow & S_\alpha \end{array}$$

où  $X_\alpha$  est de type fini sur  $S_\alpha$ .

Un modèle de  $h$  sur  $X_\alpha$  est un  $S_\alpha$ -morphisme  $h_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  muni d'un isomorphisme  $h \xrightarrow{\sim} (h_\alpha)_\xi$ .

Des modèles de  $X$  sur  $S_\alpha$  existent pourvu que  $\alpha$  soit assez grand [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.8.3]. De plus, si  $X_\alpha, X_\beta$  sont des modèles de  $X$  sur  $S_\alpha, S_\beta$ , il existe  $\gamma \geq \alpha, \beta$  et un  $S_\gamma$ -isomorphisme

$$X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\gamma \xrightarrow{\sim} X_\beta \times_{S_\beta} S_\gamma$$

(*loc. cit.*). De même, des modèles  $h_\alpha$  de  $h : X \rightarrow Y$  sur  $S_\alpha$  existent pourvu que  $\alpha$  soit assez grand et les images inverses de tels modèles  $h_\alpha, h_\beta$  sur  $S_\gamma$  sont  $S_\gamma$ -isomorphes pour  $\gamma \geq \alpha, \beta$  assez grand.

Si  $T$  est un  $S$ -schéma et  $B$  une  $A$ -algèbre, on note  $T(B) = \text{Hom}_S(\text{Spec}(B), T)$  l'ensemble des  $S$ -points de  $T$  à valeurs dans  $B$ . D'après le théorème de Popescu [Popescu, 1986, 1.3], comme  $A$  est excellent et hensélien, il vérifie la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3. Donc, comme  $S_\alpha \rightarrow S$  est de type fini,  $S_\alpha(A)$  est dense dans  $S_\alpha(\hat{A})$  (pour la topologie  $m$ -adique). Il existe donc, pour tout  $n \geq 0$  une section  $u : S \rightarrow S_\alpha$  de  $t_\alpha$  qui est  $n$ -proche de  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ . On définit alors  $X_u$  par le diagramme cartésien

$$(2.a) \quad \begin{array}{ccc} X_u & \longrightarrow & X_\alpha \\ f_u \downarrow & \square & \downarrow f_\alpha \\ S & \xrightarrow{u} & S_\alpha \end{array}$$

Comme  $u$  est  $n$ -proche de  $s_\alpha$ , on a par définition l'égalité

$$u\pi_n = s_\alpha i_n$$

de sorte la restriction de  $X_u \rightarrow S$  à  $S_n$  s'identifie à  $X_n \rightarrow S_n$ , autrement dit on a un carré cartésien

$$(2.b) \quad \begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & X_u \\ f_n \downarrow & \square & \downarrow f_u \\ S_n & \xrightarrow{i_n} & S \end{array}$$

De même, si  $X, Y$  sont de type fini sur  $\hat{S}$  et  $h_\alpha$  est un modèle de  $h \in \text{Hom}_{\hat{S}}(X, Y)$  sur  $S_\alpha$ , l'image inverse  $h_u : X_u \rightarrow Y_u$  est un  $S$ -morphisme induisant la restriction  $h_n : X_n \rightarrow Y_n$  de  $h$  au dessus de  $S_n$ .

### 3. Approximations et topologie des altérations

Commençons par un rappel (cf. II-II) sur la topologie des altérations. Soit  $T$  un schéma noethérien. La catégorie  $\text{alt}/T$  est la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $T$ -schémas dont les objets sont les  $T$ -schémas réduits de type fini  $X$ , dont tout point maximal s'envoie sur un point maximal de  $T$  avec extension résiduelle finie.

Notons que les morphismes de  $\text{alt}/T$  envoient point maximal sur point maximal. On définit deux topologies sur  $\text{alt}/T$ .

(i) La *topologie des altérations* est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes

- (a) les recouvrements ouverts de Zariski ;
- (b) les morphismes propres et surjectifs .

Une famille couvrante pour la topologie des altérations sera dite *alt-couvrante*.

(ii) Soit  $\ell$  un nombre premier. La *topologie des  $\ell'$ -altérations* sur  $\text{alt}/T$  est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes

- (a) les recouvrements étales de Nisnevich ;
- (b) les morphismes propres surjectifs  $X' \rightarrow X$  tels que pour tout point maximal  $\eta$  de  $X$ , il existe un point maximal  $\eta'$  de  $X'$  au dessus de  $\eta$  avec  $\ell$  ne divisant pas  $\deg(k(\eta')/k(\eta))$ .

Une famille couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations sera dite *alt $_{\ell'}$ -couvrante*.

Pour tout  $T$ -schéma  $X$  dominant, on note  $X_r$  le sous-schéma fermé réduit de  $X$  réunion des composantes irréductibles qui dominent une composante irréductible de  $T$ .

**PROPOSITION 3.1.** *On reprend les notations de 2 : soit  $A$  un anneau local noethérien,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\hat{A}$  son complété. On suppose  $A$  excellent et hensélien. Soit  $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$  le morphisme canonique. Soit  $X \rightarrow \hat{S}$  un objet non vide de  $\text{alt}/\hat{S}$ . Supposons de plus  $S$  intègre.*

- (i) *Alors, il existe  $\alpha_0 \in E, n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , tout entier  $n \geq n_0$ , toute section  $u : S \rightarrow S_\alpha$  de  $t_\alpha$  qui est  $n$ -proche de  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ , tout modèle (cf. 2.2)  $X_\alpha$  de  $X$  sur  $S_\alpha$ ,  $X_u$  est à fibre générique finie et le morphisme composé  $(X_u)_r \rightarrow X_u \rightarrow S$  est un objet non vide de  $\text{alt}/S$ .*
- (ii) *Supposons  $X \rightarrow \hat{S}$  alt-couvrant. Alors, il existe  $\alpha_0 \in E, n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , tout entier  $n \geq n_0$ , toute section  $u : S \rightarrow S_\alpha$  de  $t_\alpha$  qui est  $n$ -proche de  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ , tout modèle  $X_\alpha$  de  $X$  sur  $S_\alpha$ , le morphisme composé  $(X_u)_r \rightarrow X_u \rightarrow S$  est alt-couvrant.*
- (iii) *Supposons  $X \rightarrow \hat{S}$  alt $_{\ell'}$ -couvrant. Alors, il existe  $\alpha_0 \in E, n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , tout entier  $n \geq n_0$ , toute section  $u : S \rightarrow S_\alpha$  de  $t_\alpha$  qui est  $n$ -proche de  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ , tout modèle  $X_\alpha$  de  $X$  sur  $S_\alpha$ , le morphisme composé  $(X_u)_r \rightarrow X_u \rightarrow S$  est alt $_{\ell'}$ -couvrant.*

*Démonstration.* Observons d'abord que,  $S$  étant hensélien et excellent,  $\hat{S}$  est intègre, cf. I-6.3.

Prouvons (i). Comme  $X \rightarrow \hat{S}$  est génériquement fini, il existe  $a \in \hat{A} - \{0\}$  tel que  $X$  soit fini, surjectif et libre de rang  $d > 0$  au dessus de l'ouvert non vide  $X - V(a)$ . On peut choisir  $\alpha_0$  assez grand de sorte que

- $a$  provienne de  $a_\alpha \in A_\alpha - \{0\}$  pour  $\alpha \geq \alpha_0$  ;
- $X_\alpha \rightarrow S_\alpha$  soit fini, surjectif ([ÉGA IV<sub>3</sub> 8.10.5]) et libre de rang  $d$  sur  $X_\alpha - V(a_\alpha)$  (utiliser [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.5.2]).

Choisissons alors un entier  $n$  tel que  $a \notin \hat{\mathfrak{m}}^{n+1}$ . Pour tout  $\alpha \geq \alpha_0, m \geq n$ , toute section  $u$  qui est  $m$ -proche de  $t_\alpha$ , on a

$$u^*(a_\alpha) \notin \mathfrak{m}^{n+1}$$

et donc  $u^*(a_\alpha)$  est non nul. Ceci assure que  $X_u$  est fini, surjectif et libre de rang  $d$  au dessus de l'ouvert non vide  $S - V(u^*(a_\alpha))$  image réciproque de  $S_\alpha - V(a_\alpha)$  par  $u$ . Le premier point en découle.

Prouvons (iii) [La preuve de (ii) est en tout point similaire]. On suppose donc que  $X \rightarrow \hat{S}$  est  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant. On sait (II-3.2.1) que  $X \rightarrow \hat{S}$  est dominé dans  $\text{alt}/\hat{S}$  par un recouvrement standard

$$Y \rightarrow X' \rightarrow \hat{S}$$

avec

- $Y \rightarrow X'$  Nisnevich couvrant
- $X' \rightarrow \hat{S}$  propre et surjectif dont la restriction à chaque composante irréductible est dominante et génériquement, le degré générique de l'une d'elles étant premier à  $\ell$ .

Quitte à remplacer le schéma réduit  $X'$  par une composante convenable et  $Y$  par le  $\text{alt}_{\ell'}$ -recouvrement Nisnevich induit, on peut supposer  $X'$  *intègre* de degré générique  $\deg(X'/\hat{S}) = \delta$  premier à  $\ell$ .

Soit  $\eta$  le point générique de  $S$ . La construction  $X \mapsto X_r$  est fonctorielle pour la sous-catégorie pleine des  $S$ -schémas  $X$  à fibre générique finie. Or, d'après (i), pour des choix de modèles et de section  $u$  de  $t_\alpha$  convenables, on sait que  $Y_u, X'_u$  et  $X_u$  sont à fibre générique finie. On a donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} (Y_u)_r & \longrightarrow & (X_u)_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X'_u)_r & \longrightarrow & S \end{array}$$

Or, toujours d'après (i), on peut en outre supposer que  $(Y_u)_r, (X'_u)_r$  et  $(X_u)_r$  sont des objets de  $\text{alt}/S$ . Pour conclure que  $(X_u)_r \rightarrow S$  est  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant, il suffit de prouver que pour  $u$  convenable  $(Y_u)_r \rightarrow S$  est  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant.

Tenant compte des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.8.3 et 8.10.5], la preuve de (i) assure que pour des modèles et  $u$  convenables le  $X'_u \rightarrow S$  est propre et surjectif et que sa fibre générique est de degré premier à  $\ell$ . Ceci assure que la restriction de  $X'_u \rightarrow S$  à au moins une des composantes réduites de  $X'_u$  dominant  $S$  est de degré premier à  $\ell$ . Ainsi,  $(X'_u)_r \rightarrow S$  est bien  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant.

La propriété d'être un recouvrement Nisnevich (resp. propre et surjectif) étant stable par changement de base, reste à prouver le lemme suivant.

**LEMME 3.1.1.** *Il existe  $\alpha_0$  tel que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , tout modèle  $Y_\alpha \rightarrow X'_\alpha \rightarrow S_\alpha$  de  $Y \rightarrow X' \rightarrow \hat{S}$  vérifie  $Y_\alpha \rightarrow X'_\alpha$  est Nisnevich couvrant.*

*Démonstration.* Dire que  $Y \rightarrow X'$  est Nisnevich couvrant, c'est dire qu'il est lisse, quasi-fini et qu'on a une stratification

$$\emptyset = X'_0 \subset X'_1 \cdots \subset X'_n = X'$$

avec  $X'_i$  fermé de  $X'$  et  $Y/X'$  a une section au dessus de  $X'_{i+1} - X'_i$ . La conclusion découle immédiatement de cette remarque et des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.8.3 et 8.10.5] et [ÉGA IV<sub>4</sub> 17.7.8]. □

□

Le but de ce qui suit est d'améliorer les résultats topologiques de la proposition 3.1 en montrant que des épaissements convenables des cônes normaux des fibres spéciales de  $X$  (resp.  $X_u$ ) dans  $X$  (resp.  $X_u$ ) sont isomorphes. Ceci permettra de prouver des énoncés de stabilité de propriétés dans le passage de  $X$  à  $X_u$ , en l'occurrence la dimension et la régularité (corollaire 5.4).

#### 4. Gradués supérieurs et approximations de complexes

Soient  $I$  un idéal d'un topos annelé  $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ ,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}$ -module de  $\mathcal{X}$  et  $a$  un entier  $\geq 1$ . On pose  $I^n = \mathcal{O}$  si  $n \leq 0$ . On définit le module  $\mathbf{Z}$ -gradué

$$\mathrm{gr}_a(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} I^n \mathcal{F} / I^{n+a} \mathcal{F}$$

qui est donc la somme

$$\mathrm{gr}_a(\mathcal{F}) = \mathcal{F} / I \mathcal{F} \oplus \dots \oplus \mathcal{F} / I^a \mathcal{F} \oplus I \mathcal{F} / I^{a+1} \mathcal{F} \oplus I^2 \mathcal{F} / I^{a+2} \mathcal{F} \oplus \dots$$

concentrée en degrés  $\geq -(a-1)$ . C'est un  $\mathcal{O}/I^a$ -module ; de plus, le produit

$$I^n \otimes I^m \rightarrow I^{n+m}$$

induit une structure de  $\mathcal{O}/I^a$ -algèbre  $\mathbf{Z}$ -graduée sur  $\mathrm{gr}_a(\mathcal{O})$  et  $\mathrm{gr}_a(\mathcal{F})$  est un  $\mathrm{gr}_a(\mathcal{O})$ -module  $\mathbf{Z}$ -gradué.

On s'intéresse ici au cas où  $\mathcal{X}$  est le topos de Zariski d'un  $S$ -schéma  $X$  annelé par son faisceau structural  $\mathcal{O}$  et  $I = \hat{m}\mathcal{O}$ .

**REMARQUE 4.1.** Le morphisme surjectif tautologique  $\mathrm{gr}_a(\mathcal{O}) \rightarrow \mathrm{gr}_1(\mathcal{O})$  a pour noyau  $J = \mathrm{Igr}_a(\mathcal{O})$ . On a donc  $J^a = 0$  (puisque  $J$  est un  $\mathcal{O}_{X_{a-1}}$ -module) de sorte que  $C_a(X) = \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_a(\mathcal{O}))$  est un épaissement d'ordre  $a-1$  du cône normal  $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{O}))$ .

**DÉFINITION 4.2.** Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas (resp. des  $\hat{S}$ -schémas). Un  $a$ -isomorphisme  $X \xrightarrow{\sim}_a Y$  est la donnée d'un  $S$ -isomorphisme  $\phi : X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$  et d'un isomorphisme de  $\mathrm{gr}_a(A)$ -algèbres graduées  $\phi^{-1} \mathrm{gr}_a(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_a(\mathcal{O}_X)$ . On dit dans ce cas que  $X, Y$  sont  $a$ -proches.

On identifiera alors leurs fibres spéciales  $X_0, Y_0$  grâce à l'isomorphisme  $X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$ .

**4.3.** On adapte ici le théorème 3.2 de [Conrad & de Jong, 2002] (et le lemme clef 3.1 de *loc. cit.*). Commençons par une définition. Soient  $B$  un anneau noethérien et  $I$  un idéal de  $B$ .

**DÉFINITION 4.4.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de  $B$ -modules de type fini. Un entier  $c \geq 0$  est une constante d'Artin-Rees de  $f$  si pour tout  $n \geq c$  on a

$$I^n N \cap \mathrm{Im}(f) \subset I^{n-c} \mathrm{Im}(f).$$

Le lemme d'Artin-Rees assure l'existence d'une constante d'Artin-Rees.

**PROPOSITION 4.5.** Soient  $(L^\bullet, d_L^\bullet), (M^\bullet, d_M^\bullet)$  des complexes de  $B$ -modules libres de type fini concentrés en degré  $[-2, 0]$  avec  $L^i = M^i$  pour tout  $i$ . Soit  $c$  une constante d'Artin-Rees pour  $d_L^{-2}$  et  $d_L^{-1}$  et  $n$  un entier  $\geq c$ . Supposons  $H^{-1}(L^\bullet) = 0$  et

$$d_L^\bullet = d_M^\bullet \pmod{I^{n+1}}.$$

Alors :

- (i)  $c$  est une constante d'Artin-Rees pour  $d_M^{-1}$  ;

- (ii)  $H^{-1}(M^\bullet) = 0$ ;  
 (iii) L'identité de  $L^0 = M^0$  induit un isomorphisme de  $\text{gr}_{n+1-c}(B)$ -modules

$$\text{gr}_{n+1-c}(H^0(L^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n+1-c}(H^0(M^\bullet));$$

- (iv) De plus, si  $L^0 = M^0 = B$ , l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de  $\text{gr}_{n+1-c}(B)$ -algèbres, autrement dit les algèbres  $H^0(L^\bullet)$  et  $H^0(M^\bullet)$  sont  $(n+1-c)$ -isomorphes.

*Démonstration.* Les deux premiers points sont prouvés dans le lemme 3.1 de *loc. cit.*. Le dernier est trivial. Reste le point (iii).

Pour  $n = c$ , c'est le théorème 3.2 de *loc. cit.* dont on ne fait qu'adapter la preuve dans le cas  $n > c$ . Soit  $m \in \mathbf{Z}$ . On écrit  $d_L, d_M$  pour  $d_L^{-1}, d_M^{-1}$ . Pour  $\delta = d_L, d_M$ , on a

$$\text{gr}_{n+1-c}^m(\text{Coker}(\delta)) = I^m L^0 / (I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(\delta))$$

de sorte qu'il s'agit de montrer l'égalité

$$I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) = I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M)$$

pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ . Soit  $x \in L^{-1}$  tel que  $d_L(x) \in I^m L^0$ .

Supposons  $m \leq c$ . Comme

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1} L^0 \text{ et } m \leq c \leq n,$$

on a  $d_L(x) - d_M(x) \in I^m L^0$  de sorte que

$$d_M(x) = d_L(x) + d_M(x) - d_L(x) \in I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

Comme  $n+1 \geq m+n+1-c$ , on a également

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1} L^0 \subset I^{m+n+1-c} L^0$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x) - d_M(x) + d_M(x) \in I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M)$$

et donc

$$I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) \subset I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

Par symétrie des rôles de  $d_L$  et  $d_M$ , on a l'égalité cherchée dans ce cas.

Si  $m > c$ , le calcul est analogue. On a (4.4)

$$I^m L^0 \cap \text{Im}(d_L) \subset I^{m-c} d_L(L^{-1})$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x') \text{ avec } x' \in I^{m-c} L^{-1}.$$

Comme  $d_L - d_M = 0 \pmod{I^{n+1}}$ , la matrice de  $d_L - d_M$  est à coefficients dans  $I^{n+1}$  de sorte que

$$d_L - d_M \in I^{n+1} \text{Hom}_B(L^{-2}, L^{-1}).$$

On a donc

$$d_L(x') - d_M(x') \in I^{n+1} I^{m-c} L^0 = I^{n+1+m-c} L^0.$$

Comme

$$d_M(x') = d_L(x') + d_M(x') - d_L(x') = d_L(x) + d_M(x') - d_L(x'),$$

on a d'une part

$$d_M(x') \in (I^m L^0 + I^{n+1+m-c} L^0) \cap \text{Im}(d_M) \stackrel{n \geq c}{\subset} I^m L^0 \cap \text{Im}(d_M),$$

et, d'autre part,

$$d_L(x) = d_M(x') - d_L(x') + d_L(x') + \in I^{m+n+1-c}L^0 + I^mL^0 \cap \text{Im}(d_M).$$

On conclut comme plus haut par symétrie.  $\square$

### 5. Modèles et $\alpha$ -isomorphismes

**THÉORÈME 5.1 (Approximation).** *Soit  $A$  un anneau local noethérien,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\hat{A}$  son complété. On suppose  $A$  excellent et hensélien. Soit  $\pi : \hat{S} = \text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$  le morphisme canonique. Soit  $X$  de type fini sur  $S$ . On se donne de plus  $\alpha_0 \in E$  et un modèle (cf. 2.2)  $X_{\alpha_0}$  de  $X$  sur  $S_{\alpha_0}$ . Pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$  on note  $X_\alpha = X_{\alpha_0} \times_{S_{\alpha_0}} S_\alpha$  le modèle de  $X$  sur  $S_\alpha$  déduit par changement de base. Il existe  $\alpha_1 \geq \alpha_0$  et des entiers  $n_0 \geq c > 0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\alpha \geq \alpha_1$  et toute section  $u$  de  $t_\alpha$  qui est  $(n+1)$ -proche de  $s_{\alpha}$ , il existe un unique  $(n+1-c)$ -isomorphisme  $X \xrightarrow{\sim}_{n-c} X_u$  au dessus de l'isomorphisme  $X_{n-c} \rightarrow (X_u)_{n-c}$  déduit de (2.b).*

**DÉFINITION 5.2.** Dans les conditions précédentes, on dit que  $(X_\alpha, \alpha, u)$  (ou, si aucune conclusion n'est à craindre,  $X_u$ ) est une *approximation* de  $X$  sur  $S$  (à l'ordre  $n-c$ ).

L'assertion « Il existe  $\alpha_0$ , un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$  et toute section  $u$  de  $t_\alpha$  qui est  $(n+1)$ -proche de  $s_{\alpha}$ ,  $X_u$  vérifie la propriété  $P$  » pourra parfois être condensée en « Toute approximation  $X_u$  assez fine de  $X$  vérifie la propriété  $P$  ». On emploiera une terminologie analogue pour les approximations de  $\hat{S}$ -morphisms.

*Démonstration.* Deux  $(n+1-c)$ -isomorphismes diffèrent par un automorphisme

$$\iota : \text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X)$$

de  $\mathcal{O}_{X_{n-c}}$ -algèbres graduées. Il est en particulier  $\mathcal{O}_S$ -linéaire. Comme  $\text{gr}_{n+1-c}(\mathcal{O}_X)$  est engendré sur  $\text{gr}_a(\mathcal{O}_S)$  par  $\mathcal{O}_{X_{n-c}}$ , l'automorphisme  $\iota$  est l'identité. D'où l'unicité.

On peut donc supposer  $X$  affine. Comme  $X$  est de type fini sur  $\hat{S}$ ,  $X$  se plonge dans l'espace affine

$$\mathbf{A}_{\hat{S}}^m = \text{Spec}(\hat{A}[t])$$

de coordonnées  $t = (t_1, \dots, t_m)$  comme le sous-schéma fermé d'idéal

$$J = \langle \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N \rangle$$

où  $\tilde{P}_i \in B = \hat{A}[t]$ . Choisissons une résolution partielle du  $B$ -module  $C = B/J$  par des  $B$ -modules libres de type fini

$$(5.a) \quad B^a \xrightarrow{\tilde{R}} B^b \xrightarrow{\tilde{P}=(\tilde{P}_i)} B \rightarrow C \rightarrow 0$$

où  $\tilde{R}$  est une matrice à coefficients dans  $B$ .

Pour  $\alpha_0$  assez grand,  $\tilde{P}$  et  $\tilde{R}$  proviennent de matrices  $P_{\alpha_0}, R_{\alpha_0}$  à coefficients dans

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \text{ telles que } PR = 0$$

de sorte que le fermé  $F$  de  $\mathbf{A}_{A_{\alpha_0}}^m$  d'équations  $P_{\alpha_0,1} = \dots = P_{\alpha_0,N} = 0$  est un modèle de  $X$  sur  $S_{\alpha_0}$ . Comme rappelé dans la section 2, quitte à changer  $\alpha_0$  en un indice

plus grand, on peut supposer qu'on a  $F = X_{\alpha_0}$ . Pour  $\alpha \geq \alpha_0$ , note  $P_\alpha, R_\alpha$  les matrices à coefficients dans  $B_\alpha$  déduites de  $P_{\alpha_0}, R_{\alpha_0}$  par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \rightarrow B_\alpha = A_\alpha[t].$$

Pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , les matrices à coefficients dans  $B$  déduites de  $P_\alpha, R_\alpha$  par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \rightarrow B = \hat{A}[t]$$

sont les mêmes : on les note  $P, R$ .

On s'est ramené, pour  $\alpha \geq \alpha_0$ , au cas où

$$X_\alpha = \text{Spec}(C_\alpha) \text{ avec } C_\alpha = B_\alpha/(P_\alpha).$$

On dispose donc d'une part d'un complexe (en degrés  $[-2,0]$ ) de  $B_\alpha$ -modules libres

$$L_\alpha = (B_\alpha^a \xrightarrow{R_\alpha} B_\alpha^b \xrightarrow{P_\alpha=(P_{i,\alpha})} B_\alpha)$$

avec  $H^0(L_\alpha) = C_\alpha$ . Le complexe de  $B$ -modules libres de rang fini

$$L = B \otimes_{B_\alpha} L_\alpha = (B^a \xrightarrow{R} B^b \xrightarrow{P=1 \otimes P_\alpha} B)$$

est acyclique en degré  $-1$  par construction.

**REMARQUE 5.3.** *A priori,  $L_\alpha$  n'a pas de raison d'être acyclique en degré  $-1$ , même pour  $\alpha$  grand.*

D'autre part, la section  $u$  de  $t_\alpha$  est définie par un morphisme de  $A$ -algèbres

$$u^* : A_\alpha \rightarrow A$$

de sorte que

$$u^* \text{ mod } \mathfrak{m}^{n+1} = s_\alpha^* \text{ mod } \hat{\mathfrak{m}}^{n+1},$$

où  $s_\alpha^* : A_\alpha \rightarrow \hat{A}$  est défini par  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$  (2.a). Par action sur les coefficients des polynômes, on obtient un morphisme d'anneau

$$\bar{u} : B_\alpha = A_\alpha[t] \rightarrow A[t] \rightarrow \hat{A}[t] = B$$

d'où un complexe

$$M = (B^a \xrightarrow{\bar{u}(R)} B^b \xrightarrow{\bar{u}(P)} B)$$

Par construction, on a

$$L/\mathfrak{m}^{n+1}L = M/\mathfrak{m}^{n+1}M.$$

On choisit alors une constante d'Artin-Rees  $c$  pour  $B^b \xrightarrow{P} B$  et on invoque la proposition 4.5 pour conclure.  $\square$

**COROLLAIRE 5.4.** *Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas noethériens qui sont  $\alpha$ -proches. Soit  $x \in X_0 = Y_0$ .*

- (i) *Si  $\alpha \geq 1$ , les dimensions de  $X$  et  $Y$  en  $x$  sont les mêmes.*
- (ii) *Si  $\alpha \geq 2$  et  $X$  régulier en  $x$ , alors  $Y$  régulier en  $x$ .*
- (iii) *Supposons  $X \rightarrow \hat{S}$  de type fini et  $X$  régulier. Alors, il existe  $\alpha_0 \in E, n_0 \in \mathbf{N}$  tels que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$ , tout entier  $n \geq n_0$ , toute section  $u$  de  $t_\alpha$  qui est  $n$ -proche de  $s_\alpha : \hat{S} \rightarrow S_\alpha$ , tout modèle  $X_\alpha$  de  $X$  sur  $S_\alpha$ , le schéma  $X_u$  soit régulier dans un voisinage ouvert de la fibre spéciale.*



*Démonstration.* Par hypothèses, les cônes normaux de  $X_0, Y_0$  dans  $X, Y$  sont S-isomorphes. Comme la dimension de  $X$  en  $x$  est égale à celle de son cône normal [Matsumura, 1989, 15.9], le premier point en découle.

Supposons maintenant que  $X, Y$  soient 2-proches. D'après (i), on sait que  $X$  et  $Y$  ont même dimension en  $x$ . Comme  $X, Y$  sont 2-proches,  $X_1$  et  $Y_1$  sont isomorphes. Puisque l'espace tangent de Zariski à  $X$  en un point de  $X_0$  ne dépend que de son second voisinage infinitésimal  $X_1$ , les  $k(x)$ -espaces vectoriels cotangents de Zariski en  $x$  à  $X$  et  $Y$  sont isomorphes, d'où ii).

Pour le dernier point, il suffit d'invoquer les deux premiers et le théorème 5.1 pour conclure qu'une approximation assez fine est régulière au voisinage de la fibre spéciale. Comme  $X_u$  est excellent (puisque de type fini sur  $S$  excellent), son lieu régulier  $R$  est ouvert de sorte que  $R$  est un voisinage ouvert régulier de la fibre spéciale.  $\square$

REMARQUE 5.5. O. Gabber sait généraliser la proposition 4.5 au cas où les complexes envisagés sont seulement de type fini sur un anneau noethérien pour obtenir les proximités de la cohomologie également en degré  $-2$  (et pas seulement en degré  $0, -1$ ). Il peut plus précisément montrer des énoncés de proximité pour les images, noyaux des différentielles<sup>i</sup>. Gabber en déduit de nombreux énoncés de permanence par approximation analogues au corollaire 5.4. Notamment, si  $X, Y$  sont  $\alpha$ -proches pour  $\alpha$  assez grand, alors  $X$  réduit (resp. normal) le long de  $X_0$  entraîne  $Y$  réduit (resp. normal) le long de  $Y_0$ . Cependant, plusieurs questions naturelles restent suspens comme par exemple la permanence des propriétés  $S_n, R_n$ .

## 6. Réduction au cas local noethérien complet

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation

THÉORÈME 6.1 (Uniformisation). Soient  $T$  un schéma noethérien quasi-excellent et  $Z$  un fermé rare de  $T$ . Soit  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $T$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(X_i \rightarrow T)_{i \in I}$  et telle que pour tout  $i \in I$  on ait

- (i) La famille finie de morphismes  $(X_i \rightarrow T)_{i \in I}$  est alt-couvrante (resp. alt $_{\ell}$ -couvrante);
- (ii)  $X_i$  est régulier et connexe;
- (iii) l'image inverse de  $Z$  dans  $X_i$  est vide ou le support d'un diviseur à croisements normaux stricts;

Nous allons montrer l'énoncé de réduction suivant.

PROPOSITION 6.2. Si (6.1) est vrai pour tout  $T$  noethérien, local, complet, alors (6.1) est vrai.

*Démonstration.* On peut d'abord supposer  $T$  local, excellent et hensélien (rappelons (6.3) qu'un schéma local, hensélien et quasi-excellent est excellent).

En effet, supposons le théorème prouvé dans ce cas. D'après [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.7.6], l'hensélisé  $T_{(t)}$  de  $T$  en  $t \in T$  est excellent et  $Z_{(t)}$  est un fermé rare de  $T_{(t)}$ . On peut alors trouver une famille finie  $(f_i : X_i \rightarrow T_{(t)})_{i \in I}$  vérifiant les 3 propriétés (i)-(iii) du théorème. La famille  $f_i$  est dominée par un recouvrement standard  $f : Y \rightarrow T' \rightarrow$

<sup>i</sup>La preuve de cette généralisation a été exposée par A. Moreau lors du séminaire sur les travaux de Gabber.

$T_{(t)}$  avec  $Y \rightarrow T'$  Zariski (resp. Nisnevich) couvrant et  $T' \rightarrow T$  propre et surjectif (resp. propre et surjectif tels que pour tout point maximal  $\eta$  de  $T$ , il existe un point maximal  $\eta'$  de  $T'$  au dessus de  $\eta$  avec  $\ell$  ne divisant pas  $\deg(k(\eta')/k(\eta))$ ). D'après [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.2.2], les  $f_i$  et  $f$  proviennent de morphismes  $\tilde{f}_i : \tilde{X}_i \rightarrow \tilde{T}$  où  $\tilde{T} \rightarrow T$  est un voisinage Nisnevich étale de  $T$  en  $t$ . La topologie de Nisnevich étant moins fine que les topologies  $\text{alt}$  et  $\text{alt}_{\ell'}$  (II-3.2.2 (ii)), les propriétés usuelles de passage à la limite (3.1.1 et [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.4.3], [ÉGA IV<sub>4</sub> 19.8.1]) permettent de conclure comme plus haut.

Supposons donc  $T$ , schéma local, hensélien, excellent.

Quitte à remplacer  $S$  par la somme disjointe de ses composantes réduites, on se ramène au cas où  $S$  est de plus intègre.

On peut supposer de plus  $S = \text{Spec}(A)$  normal intègre. En effet, comme  $A$  est excellent, le morphisme de normalisation est fini de degré générique 1, donc est  $\text{alt}$ -couvrant (resp.  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant). Comme  $A$  est local intègre et hensélien,  $A$  est unibranche de sorte que le normalisé de  $A$  est local, donc intègre puisque normal et est noethérien hensélien puisque fini sur  $A$ .

Comme  $A$  est excellent, la normalisation commute à la complétion (6.2) de sorte que  $\hat{A}$  est dès lors normal comme  $A$ , donc également intègre puisque normal et local.

On peut donc supposer  $T = S$  avec  $S$  schéma local intègre, normal, hensélien et excellent.

Comme  $\hat{S}$  est plat sur  $S$ , l'image inverse  $\hat{Z}$  de  $Z$  est encore un fermé rare de  $\hat{S}$ . Choisissons une uniformisation

$$(\tilde{X}_i \rightarrow \hat{S})_{i \in I'}$$

de  $(\hat{S}, \hat{Z})$  comme dans 6.1. D'après 5.1, 3.1 et 5.4, on peut trouver un entier  $n \geq 0$ , des  $n$ -isomorphismes  $\tilde{X}_i \rightarrow_n (\tilde{X}_i)_u$  de sorte que

a) chaque  $S$ -schéma  $(X_i)_u$  est régulier le long de sa fibre spéciale  $(\tilde{X}_i)_0$ , donc au voisinage (le lieu régulier étant ouvert puisque les schémas considérés sont excellents).

b) la famille  $((\tilde{X}_i)_u)_r$  est  $\text{alt}$ -couvrante (resp.  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrante).

D'après a),  $(\tilde{X}_i)_u$  est régulier au voisinage de la fibre spéciale et  $y$  est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont intègres. Ainsi, au voisinage de la fibre spéciale,  $((\tilde{X}_i)_u)_r$  est schématiquement la réunion disjointe des composantes de  $(\tilde{X}_i)_u$  dominant  $S$ . Comme tout voisinage ouvert de la fibre spéciale  $(\tilde{X}_i)_0$  dans  $((\tilde{X}_i)_u)_r$  est  $\text{alt}$ -couvrant (resp.  $\text{alt}_{\ell'}$ -couvrant) (II-4.1.1), la famille  $(X_i \rightarrow S)_{i \in I'}$  des composantes connexes de voisinages convenables des  $(\tilde{X}_i)_0$  dans  $(\tilde{X}_i)_u$ ,  $i \in I'$  vérifie les conditions (i) et (ii).

Soit  $D'$  l'image inverse de  $\hat{Z}$  dans  $X = \sqcup_{i \in I'} X_i$  qu'on peut supposer non vide. Par hypothèse,  $D = D'_{\text{réd}}$  est un diviseur à croisements normaux strict, c'est-à-dire  $D = \sum_{j \in J} D_j$  avec

$$D_K = \bigcap_{j \in K} D_j$$

régulier de codimension  $\text{card}(J)$  pour toute partie  $K \subset J$ . Quitte à augmenter  $\alpha$ , on peut supposer que les  $D_j$  ont des modèles sur  $S_\alpha$ , ces modèles induisant des modèles des  $D_j$ . Comme  $u$  est une section de  $t_\alpha$ , le schéma  $D_u$  réunion schématique des  $(D_i)_u$  est, topologiquement, l'image inverse de  $Z$  dans  $X_u$ . D'après 5.4, on peut supposer que chaque  $(D_u)_K$  est régulier de codimension  $\text{card}(K)$  (par caténarité de  $X_i$  qui est excellent puisque de type fini sur  $S$ ) de sorte que  $D_u$  est un

diviseur à croisements normaux stricts le long de la fibre spéciale. Les lieux réguliers de  $(D_u)_K$  et  $X_u$  étant ouverts, on peut supposer que  $D_u$  est un diviseur à croisements normaux stricts au voisinage de la fibre spéciale (caténarité de  $X_u$ ).  $\square$



## EXPOSÉ IV

### Le théorème de Cohen-Gabber

Fabrice Orgogozo

#### 1. $p$ -bases et différentielles (rappels)

##### 1.1. Définition et caractérisation différentielle.

**1.1.1.** Pour la commodité du lecteur, et pour fixer les notations, nous rappelons ici quelques résultats bien connus dont nous ferons usage ci-après. Nous conseillons au lecteur de ne s'y reporter qu'en cas de besoin.

**DÉFINITION 1.1.2.** Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $K$  une extension de  $k$ , et  $(b_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $K$ . On dit que les  $(b_i)$  constituent une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$  (resp. sont  $p$ -libres sur  $k$ ) si les monômes  $\prod_i b_i^{n(i)}$  ( $0 \leq n(i) < p$ ,  $(n(i))_{i \in I}$  de support fini) forment une base du  $k(K^p)$ -espace vectoriel  $K$  (resp. sont linéairement indépendants sur  $k(K^p)$ ).

Si  $k = \mathbf{F}_p$ , on parle alors de  $p$ -base *absolue*, ou de  $p$ -base s'il n'y a pas d'ambiguïté. Enfin, on appelle parfois  $p$ -monôme un produit comme ci-dessus. Un lien entre cette notion et la structure des anneaux locaux complets ressort du théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.3** ([Bourbaki, A.C., V, §3, n°3, th. 1 b]). Soient  $A$  un anneau local séparé complet de caractéristique  $p > 0$  et  $(\beta_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $A$  dont les classes modulo l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_A$  forment une  $p$ -base du corps résiduel  $A/\mathfrak{m}_A$ . Il existe alors un unique corps de représentants de  $A$  contenant les éléments  $\beta_i$ .

**REMARQUE 1.1.4.** On peut étendre de façon évidente la notion de  $p$ -base au cas d'un anneau quelconque de caractéristique  $p > 0$ , cf. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.1-4]. Nous n'en aurons pas besoin.

**1.1.5.** On vérifie immédiatement que les  $(b_i)_{i \in I}$  forment une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ , l'élément  $b_i$  n'appartient pas au sous-corps  $k(K^p, (b_j)_{j \neq i})$  de  $K$ . (Voir p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.4.3].)

**1.1.6.** Pour toute extension de corps  $K/k$ , nous noterons  $d_{K/k}$  la différentielle  $K \rightarrow \Omega_{K/k}^1$ .

**PROPOSITION 1.1.7.** Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ , et  $K$  une extension de  $k$ . Une famille  $(b_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $K$  est une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$  si et seulement si les différentielles  $d_{K/k}(b_i)$  forment une base du  $K$ -espace vectoriel  $\Omega_{K/k}^1$ .

*Démonstration.* Soit  $B = (b_i)_{i \in I}$  une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$ . Tout morphisme (ensembliste)  $\Delta : B \rightarrow K$  s'étend de manière unique en une  $k$ -dérivation  $D$  de  $K$  : il suffit de poser  $D(b_1^{n_1} \cdots b_r^{n_r}) = \sum_i n_i b_1^{n_1} \cdots b_i^{n_i-1} \cdots b_r^{n_r}$  et de l'étendre par  $k(K^p)$ -linéarité. Cela est équivalent au fait que les  $d_{K/k}(b_i)$  forment une base de  $\Omega_{K/k}^1$ . (Le fait que  $K$  soit un corps n'est pas utilisé dans cette implication.) Réciproquement, si les  $d_{K/k}(b_i)$  forment une base, on observe que les  $p$ -monômes sont

$k(K^p)$ -linéairement indépendants : dans le cas contraire on aurait, pour un indice  $i$  convenable,  $b_i \in K^p((b_j)_{j \neq i})$ , ce qui se traduirait par une relation linéaire entre les différentielles. Soit  $B'$  une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$  contenant les  $b_i$  (*loc. cit.*, 21.4.2); d'après l'implication précédente, on a nécessairement  $B' = (b_i)_{i \in I}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.1.8.** *Soient  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $K$  une extension de  $k$ . Un élément  $x$  de  $K$  appartient à  $k(K^p)$  si et seulement si  $d_{K/k}(x) = 0$ .*

**1.1.9.** Rappelons que le  $p$ -rang d'un corps est le cardinal d'une  $p$ -base absolue (bien défini en vertu de ce qui précède). On vérifie immédiatement que ce cardinal (fini ou non) est invariant par extension finie de corps.

## 1.2. Stabilisation.

**LEMME 1.2.1** (cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.8.1]). *Soient  $K$  un corps,  $k$  un sous-corps,  $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille de sous-corps de  $K$  telle que  $\bigcap k_\alpha = k$  et filtrante décroissante, c'est-à-dire telle que pour toute paire d'indices  $\alpha, \beta$ , il existe un indice  $\gamma$  tel que  $k_\gamma \subset k_\alpha \cap k_\beta$ . Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, et  $(v_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une famille finie de vecteurs de  $V$ . Si la famille  $(v_i)$  est libre sur  $k$ , il existe un indice  $\gamma$  telle qu'elle soit aussi libre sur  $k_\gamma$ .*

**LEMME 1.2.2.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  $k$  un sous-corps et  $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille filtrante décroissante de sous-corps contenant  $k$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$  ;
- (ii) pour tout ensemble fini  $\{b_1, \dots, b_n\} \subset K$ ,  $p$ -libre sur  $k$ , il existe un indice  $\alpha$  tel qu'il soit  $p$ -libre sur  $K_\alpha$  ;
- (iii) il existe une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$  telle que tout sous-ensemble fini soit  $p$ -libre sur un  $k_\alpha$  pour  $\alpha$  convenable ;
- (iv) le morphisme canonique  $\Omega_{K/k}^1 \rightarrow \lim_\alpha \Omega_{K/K_\alpha}^1$  est injectif.

*Démonstration.* (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate du lemme précédent. (ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial (toute  $p$ -base convient). (iii) $\Rightarrow$ (iv) trivial (utiliser 1.1.7). Vérifions (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit  $x \notin k(K^p)$ . D'après 1.1.8,  $d_{K/k}(x) \neq 0$  de sorte qu'il existe  $\alpha$  tel que  $d_{K/k_\alpha}(x)$  soit également non nul. D'après *loc. cit.*, cela entraîne que  $x \notin k_\alpha(K^p)$ .  $\square$

On en déduit le lemme suivant, qui est un cas particulier de [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.8.5].

**LEMME 1.2.3.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p$ ,  $k$  un sous-corps et  $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille filtrante décroissante de sous-corps de  $K$  contenant  $k$  telle que  $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$ . Pour toute extension finie  $L$  de  $K$ , on a également  $\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = k(L^p)$ .*

*Démonstration.* On se ramène immédiatement au cas où  $L/K$  est monogène. Si  $L/K$  est (algébrique) séparable, la conclusion résulte immédiatement de l'existence des isomorphismes canoniques  $\Omega_{L/k}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{K/k}^1 \otimes_K L$ ,  $\Omega_{L/K_\alpha}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{K/K_\alpha}^1 \otimes_K L$  et du critère (iv) ci-dessus. Dans le cas contraire,  $L = K(\mathfrak{a})$ , où  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^p \in K - K^p$ . On distingue naturellement deux cas. Premier cas :  $d_{K/k}(\mathfrak{b}) = 0$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{b} \in k(K^p)$ . Il en résulte que pour toute sous-extension  $M$  de  $L/k$ , on a l'égalité  $M(L^p) = M(K^p, \mathfrak{b}) = M(K^p)$ . Ainsi,

$$\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = \bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p) = k(L^p),$$

et la conclusion résulte du critère (i) ci-dessus. Second cas :  $d_{K/k}(b) \neq 0$ . On peut alors compléter  $\{b\}$  en une  $p$ -base de  $K$  sur  $k$ , que l'on note  $(b, (b_i)_{i \in I})$ . La famille  $(a, (b_i)_{i \in I})$  est alors une  $p$ -base de  $L$  sur  $k$  et on vérifie immédiatement le critère (iii) ci-dessus : si  $(b, b_1, \dots, b_n)$  est  $p$ -libre sur  $k_\alpha$ , il en est de même de  $(a, b_1, \dots, b_n)$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.2.4** ([Matsumura, 1980b], §30, lemme 6). *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $(K_\alpha)$  une famille filtrante décroissante de sous-corps cofinis — c'est-à-dire tels que les degrés  $[K : K_\alpha]$  soient finis — telle que  $\bigcap_\alpha K_\alpha = K^p$ . Alors, pour toute extension finie  $L/K$ , il existe un indice  $\beta$  tel que pour tout sous-corps cofini  $K' \subset K_\beta$  on ait :*

$$\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1.$$

*Démonstration.* On souhaite se ramener au cas où  $L$  est monogène sur  $K$ . Pour cela considérons une sous- $K$ -extension  $M$  de  $L$  et posons  $M_\alpha = K_\alpha(M^p) \subset M$ . Ce sont des sous-corps cofinis de  $M$  et, pour  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  comme dans l'énoncé, on a  $M_\gamma \subset M_\alpha \cap M_\beta$ . En vertu du lemme précédent, appliqué dans le cas particulier où  $k = K^p$ , on a l'égalité  $\bigcap_\alpha M_\alpha = M^p$ . On se ramène au cas où  $L/M$  est monogène (par récurrence) en remarquant également que les extensions  $M_\alpha/K_\alpha$  sont finies, et que pour tout sous-corps  $K'$  de  $K$  on a  $\Omega_{M/K'}^1 = \Omega_{M/K'(M^p)}^1$ .

Supposons dorénavant l'extension  $L/K$  monogène. Si elle est (algébrique) séparable, le théorème est trivial : on a  $\Omega_{L/K'}^1 \xleftarrow{\sim} \Omega_{K/K'}^1 \otimes_K L$  pour tout  $K' \subseteq K$ . Sinon,  $L = K(a)$ , où  $a^p = b \in K - K^p$ , et, pour chaque  $K' \subseteq K$ ,  $\Omega_{L/K'}^1$  est naturellement isomorphe à

$$(\Omega_{K/K'}^1 / K d_{K/K'}(b)) \otimes_K L \oplus L d_{L/K'}(a).$$

De plus,  $d_{K/K^p}(b)$  et  $d_{L/L^p}(a)$  sont non nuls car  $b$  (resp.  $a$ ) n'appartient pas à  $K^p$  (resp.  $L^p$ ). Puisque  $K^p = \bigcap K_\alpha$  (resp.  $L^p = \bigcap K_\alpha(L^p)$ ), il existe un  $\beta$  tel que  $d_{K/K_\beta}(b) \neq 0$  (resp.  $d_{L/K_\beta}(a) \neq 0$ ). Il résulte de l'isomorphisme ci-dessus que pour chaque  $K' \subseteq K_\beta$ , on a l'égalité  $\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1$ . CQFD.  $\square$

**1.2.5.** Rappelons enfin que si  $A$  et  $B$  sont deux anneaux linéairement topologisés ([ÉGA 0<sub>I</sub> 7.1.1]), et  $A \rightarrow B$  un morphisme continu, le  $B$ -module  $\Omega_{B/A}^1$  est un  $B$ -module topologique, la topologie étant déduite de celle de  $B \otimes_A B$  par restriction et passage au quotient ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 20.4.3]). Le  $B$ -module sous-jacent ne dépend pas des topologies de  $A$  et  $B$ . On note  $\widehat{\Omega}_{B/A}^1$  son séparé complété ; il est isomorphe à une limite de  $\Omega^1$  de morphismes entre anneaux topologiques discrets (*loc. cit.*, 20.7.4). Pour tout  $B$ -module topologique  $L$ , le morphisme canonique induit par la dérivation universelle est un isomorphisme :

$$\text{Hom.cont}_B(\Omega_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér.cont}_A(B, L).$$

Si  $B$  et  $L$  sont séparés et complets, le terme de gauche s'identifie canoniquement à  $\text{Hom.cont}_B(\widehat{\Omega}_{B/A}^1, L)$ . Comme on le constate dans le cas particulier très simple où  $A$  est un corps et  $B$  un anneau de séries formelles, le  $B$ -module  $\widehat{\Omega}_{B/A}^1$  a des propriétés de finitude bien plus remarquables que  $\Omega_{B/A}^1$  (*loc. cit.*, exemple 20.7.6 et prop. 20.7.5).

## 2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique $> 0$

**2.1. Le théorème de Cohen-Gabber non équivariant en caractéristique  $> 0$ .** Le but de ce paragraphe est de démontrer la variante suivante du théorème de structure des anneaux locaux noëthériens complets [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8] (ii), dû à Irving S. Cohen.

**THÉORÈME 2.1.1** (théorème de Cohen-Gabber ; [Gabber, 2005a], lemme 8.1). *Soit  $A$  un anneau local complet noëthérien réduit, d'égale caractéristique  $p > 0$ , équidimensionnel de dimension  $d$  et de corps résiduel  $k$ . Il existe un sous-anneau  $A_0$  de  $A$ , isomorphe à  $k[[t_1, \dots, t_d]]$ , tel que  $A$  soit fini sur  $A_0$ , sans torsion et génériquement étale. De plus, le morphisme  $A_0 \rightarrow A$  induit un isomorphisme sur les corps résiduels.*

**REMARQUES 2.1.2.** Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse, pour  $A$  intègre, dans [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.9.5]. L'expression « génériquement étale » signifie ici qu'il existe un ouvert dense de  $\text{Spec}(A_0)$  au-dessus duquel le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$  est étale.

**2.1.3.** La démonstration du théorème, qui est une adaptation au cas non irréductible de [Gabber, 2005a], occupe le reste de cette section. Nous supposons par la suite  $d > 0$ , sans quoi l'énoncé est évident. Dans les alinéas 2.1.4 à 2.1.11, nous allons montrer qu'il existe un corps de représentants  $\kappa$  de  $A$  tel que le  $A$ -module des formes différentielles complété  $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$  soit de rang générique égal à  $d$  sur chaque composante irréductible. En (2.1.12) nous verrons comment en déduire rapidement le théorème.

**2.1.4.** Soit  $(b_i)_{i \in E}$  une  $p$ -base de  $k = A/\mathfrak{m}_A$ . Choisissons des relèvements arbitraires  $\beta_i$  des  $b_i$  dans  $A$ . Rappelons qu'il existe un unique corps de représentants  $\kappa \subset A$  contenant les  $\beta_i$  et se surjectant sur  $k$  (cf. [Bourbaki, A.C., IX, §2, n°2, th. 1 a)). Changer de corps de représentants revient donc à changer les  $\beta_i$ . Fixons également un système de paramètres  $\tau_1, \dots, \tau_d$  de  $A$  ; nous ne le changerons qu'à la fin de la démonstration (2.1.12).

**2.1.5.** Pour toute partie finie  $e \subset E$ , posons  $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa$ . Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned} & \text{pour toute partie finie } e \subset E, [\kappa : \kappa_e] < +\infty, \\ & \text{pour toutes parties finies } e, e' \subset E, \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'}, \\ & \bigcap_{e \subset E} \kappa_e = \kappa^p. \end{aligned}$$

**2.1.6.** Soient  $\text{Spec}(\overline{A})$  une composante irréductible de  $\text{Spec}(A)$ , munie de la structure réduite, et  $\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d$  les images des  $\tau_i$  dans  $\overline{A}$  par la surjection canonique  $A \twoheadrightarrow \overline{A}$ . Considérons le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_e[[\overline{\tau}_1^p, \dots, \overline{\tau}_d^p]] & \longrightarrow & \kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]] & \longrightarrow & \overline{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{\kappa, e} & \longrightarrow & L_\kappa & \longrightarrow & L \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les inclusions dans les corps de fractions respectifs. Les flèches horizontales sont injectives et correspondent à des morphismes finis. Pour la seconde, cela résulte du fait que le module  $\overline{A}$  est *quasi-fini* ([ÉGA 0<sub>I</sub> 7.4.1]) sur  $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$



donc de type fini car l'idéal  $(\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d)\overline{A}$  est un idéal de définition ([ÉGA 0<sub>I</sub> 7.4.4]). Enfin, les  $\overline{\tau}_i$  sont analytiquement indépendants sur  $\kappa$  : le sous-anneau  $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$  de  $\overline{A}$  est bien un anneau de séries formelles ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 16.3.10]).

On a observé ci-dessus que la famille des  $\kappa_e \subset \kappa$ ,  $e \subset E$ , satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2.4. On vérifie immédiatement qu'il en est de même de la famille des sous-corps  $L_{\kappa,e}$  de  $L_\kappa$  ; on a donc l'égalité

$$(2.a) \quad \text{rang}_L \Omega_{L/L_{\kappa,e}}^1 = \text{rang}_{L_\kappa} \Omega_{L_\kappa/L_{\kappa,e}}^1,$$

dès que l'ensemble fini  $e$  est suffisamment grand.

Posons  $R_\kappa = \kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$  et  $R_{\kappa,e} = \kappa_e[[\overline{\tau}_1^p, \dots, \overline{\tau}_d^p]]$ . Le terme de gauche de (2.a) est le rang générique du  $\overline{A}$ -module  $\Omega_{\overline{A}/R_{\kappa,e}}^1$ , c'est-à-dire le rang de son tensorisé avec  $L$ . Remarquons que d'après [ÉGA 0<sub>IV</sub> 21.9.4],  $\Omega_{\overline{A}/R_{\kappa,e}}^1$  s'identifie au module  $\overline{A}$ -module  $\widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1$  de formes différentielles complété. Le terme de droite est quant à lui le rang du  $R_{\kappa,e}$ -module libre  $\Omega_{R_{\kappa,e}/R_\kappa}^1$ . Ce dernier est égal à  $d + \text{rang}_\kappa \Omega_{\kappa/\kappa_e}^1 = d + |e|$  (où  $| - |$  désigne le cardinal d'un ensemble), de sorte que la formule 2.a se réécrit :

$$(2.b) \quad \text{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|.$$

**2.1.7.** La proposition suivante va nous permettre de modifier le corps des représentants de façon à pouvoir supposer  $e$  vide (de façon équivalente :  $\kappa_e = \kappa$ ).

**PROPOSITION 2.1.8.** *Il existe une partie finie  $e$  de  $E$  et des éléments  $\beta'_i$ , pour  $i \in e$ , relevant les  $b_i$  tels que, pour chaque composante irréductible intègre  $\text{Spec}(\overline{A})$  de  $\text{Spec}(A)$ , les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i)  $\text{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|$ ,
- (ii) *les images des  $d\beta'_i$  dans  $\widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\overline{A}} L$ , où  $L = \text{Frac}(\overline{A})$ , sont  $L$ -linéairement indépendantes.*

L'égalité 2.a (et donc 2.b) étant valable, pour chaque composante irréductible, dès que  $e$  est suffisamment grand, on peut choisir un tel ensemble qui convient pour chacune d'entre elles. La propriété (i) en découle.

Pour démontrer la propriété (ii), nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

**LEMME 2.1.9.** *Soient  $\overline{A}$  et  $L$  comme ci-dessus. Pour tout idéal non nul  $I$  de  $\overline{A}$ , l'ensemble des  $df \otimes_{\overline{A}} L$ , pour  $f \in I$ , est une famille génératrice du  $L$ -espace vectoriel  $\widehat{\Omega}_{\overline{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\overline{A}} L$ .*

*Démonstration.* Soient  $f_0 \in I$  non nul, et  $\omega_0 = df_0$ . Pour tout  $b \in \overline{A}$ ,  $d(bf_0) = b\omega_0 + f_0 db$ . La famille des  $d(bf_0) \otimes 1$  contient  $\omega_0 \otimes 1$  ; d'après la formule précédente, le  $L$ -espace vectoriel qu'elle engendre contient donc les  $db \otimes 1$  pour chaque  $b \in \overline{A}$ .  $\square$

Soit  $\{p_1, \dots, p_c\}$  l'ensemble des idéaux premiers minimaux de  $A$ . Pour chaque  $j \in \{1, \dots, c\}$ , posons  $A_j = A/p_j$  et  $X_j = \text{Spec}(A_j)$  la composante irréductible intègre de  $X = \text{Spec}(A)$  correspondante. Notons pour tous  $i \in e$  et  $j \in \{1, \dots, c\}$ ,  $\beta_{i,j}$  l'image dans  $A_j$  de  $\beta_i \in A$ . (Rappelons que les  $\beta_i$  font partie d'une  $p$ -base de  $\kappa \subset A$ .) Nous allons démontrer par récurrence sur  $j$  ( $0 \leq j \leq c$ ) qu'il existe des éléments  $\{m_{i,j}\}$  dans  $\mathfrak{m}_{A_j}$ , pour  $i \in e$ , tels que les images des éléments  $\beta_i + m_{i,j}$

dans chacun des anneaux  $A_1, \dots, A_j$  aient des différentielles linéairement indépendantes dans chacun des espaces vectoriels  $\Omega_{A_1/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_1} \text{Frac } A_1, \dots, \Omega_{A_j/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ . Pour  $j = 0$ , cette condition est vide. Supposons l'assertion démontrée pour un  $j \leq c - 1$  et montrons la pour  $j + 1$ . Quitte à remplacer  $\beta_i$  par  $\beta_i + m_{i,j}$ , on peut supposer que  $m_{i,j} = 0$  pour tout  $i \in e$ . L'anneau  $A$  étant réduit, les  $\mathfrak{p}_\alpha$  forment une décomposition primaire réduite de  $(0)$ , de sorte que l'idéal  $\mathfrak{q}_j := \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_j (= \text{Ker}(A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_j))$  n'est pas contenu dans  $\mathfrak{p}_{j+1}$ . Si  $j > 0$ , notons  $I_{j+1}$  son image dans  $\bar{A} = A_{j+1} (= A/\mathfrak{p}_{j+1})$ ; c'est un idéal non nul. Si  $j = 0$ , on considère  $m_{\bar{A}}$ . D'après (i),  $\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e| \geq |e|$ ; d'autre part, la famille  $d(I_{j+1})$  est génératrice dans  $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$  (où  $L = \text{Frac } \bar{A}$ ).

**LEMME 2.1.10.** *Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension au moins  $n$ ,  $b_1, \dots, b_n$  des vecteurs de  $V$  et  $W$  une famille génératrice. Il existe une famille  $w_1, \dots, w_n$  d'éléments de  $W \cup \{0\}$  tels que les  $b_i + w_i$  soient linéairement indépendants.*

*Démonstration.* Par récurrence immédiate sur  $n$ . □

Il existe donc des éléments  $m'_{i,j+1} \in I_{j+1}$ ,  $i \in e$ , tels que les différentielles des éléments  $d((\beta_i \bmod \mathfrak{p}_{j+1}) + m'_{i,j+1})$ ,  $i \in e$ , soient linéairement indépendantes dans  $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$ .

Relevons les  $m'_{i,j+1}$  en des éléments  $m_{i,j+1}$  de  $\mathfrak{q}_j$  si  $j > 0$ , ou de  $m_{\bar{A}}$  si  $j = 0$ . Par construction, ils satisfont la propriété escomptée au cran  $j + 1$ .

**2.1.11.** Considérons le sous-corps  $\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta'_i, i \in e) \subset A$ , où les  $\beta'_i$  ( $i \in e$ ) sont comme en 2.1.8. Il s'envoie isomorphiquement sur  $k = A/m_{\bar{A}}$  par réduction : son image contient  $k^p$  et les images des  $\beta_i$  ( $i \notin e$ ),  $\beta'_i$  ( $i \in e$ ), qui constituent une  $p$ -base de  $k$ . Des égalités 2.b et de la propriété (ii) de 2.1.8, on tire :

$$\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa'}^1 = d,$$

pour toute composante irréductible intègre  $\text{Spec}(\bar{A})$  de  $X$ . Par la suite, nous noterons encore  $\kappa$  ce nouveau corps de représentants.

**2.1.12.** Le  $A$ -module  $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$  étant de rang générique  $d$  sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment, qu'il existe des éléments  $f_1, \dots, f_d$  de  $A$  tels que les  $d(f_i \bmod \mathfrak{p}_\alpha) \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$  forment une base de  $\widehat{\Omega}_{A_j/\kappa}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$  pour chaque composante irréductible  $\text{Spec}(A_j)$  de  $X$ . Quitte à les multiplier individuellement par une puissance  $p$ -ième d'un élément appartenant à  $m_{\bar{A}} - \bigcup_j \mathfrak{p}_j$ , on peut les supposer dans  $m_{\bar{A}}$ . Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres  $\tau_1, \dots, \tau_d$  dans  $A$ , de sorte que le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(k[[\tau_1, \dots, \tau_d]])$  soit fini.

Posons, pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$t_i := \tau_i^p(1 + f_i).$$

Soient  $A_0$  le sous-anneau  $\kappa[[t_1, \dots, t_d]]$  de  $A$ ,  $X_0 = \text{Spec}(A_0)$ . Le morphisme  $X \rightarrow X_0$  est fini : cela résulte du fait que les éléments  $1 + f_i$  sont des unités de  $A$ . Vérifions qu'il est génériquement étale. L'anneau  $A$  étant noëthérien complet, le  $A$ -module de type fini  $\Omega_{A/A_0}^1$  est également complet et coïncide donc avec le module des formes différentielles complété  $\widehat{\Omega}_{A/A_0}^1$ . Les anneaux  $A_0$  et  $A$  étant métrisables,

et tout sous- $A$ -module de  $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$  étant fermé, la suite

$$\widehat{\Omega}_{A_0/\kappa}^1 \otimes_{A_0} A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/A_0}^1 = \Omega_{A/A_0}^1 \rightarrow 0$$

est *exacte* ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 20.7.17]). Il résulte de l'hypothèse sur les éléments  $f_i$  et de la formule

$$d(t_i) = \tau_i^p df_i$$

qu'au-dessus de chaque point maximal de  $X = \text{Spec}(A)$ , la première flèche est surjective. On en déduit que le  $A$ -module  $\Omega_{A/A_0}^1$  est génériquement nul, CQFD.

## 2.2. Le théorème de Cohen-Gabber équivariant en caractéristique $> 0$ .

**2.2.1.** Nous allons démontrer ici une généralisation du théorème 2.1.1 dans le cas d'un anneau non nécessairement équidimensionnel, muni d'une action d'un groupe fini.

**THÉORÈME 2.2.2.** *Soient  $A$  un anneau local noëthérien complet réduit, de dimension  $d$ , de corps résiduel  $\kappa$  et  $G$  un groupe fini agissant sur  $A$  avec  $|G|$  inversible dans  $\kappa$ . Alors, il existe un morphisme fini génériquement étale,  $G$ -équivariant,  $\kappa[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow A$ , où  $\kappa \rightarrow A$  relève l'identité de  $\kappa$  et  $G$  agit trivialement sur les  $t_i$ .*

Commençons par une proposition.

**PROPOSITION 2.2.3.** *Soit  $A$  un anneau muni d'une action d'un groupe fini  $G$  d'ordre inversible sur  $A$  et soit  $B = \text{Fix}_G(A)$  le sous-anneau des invariants.*

- (i) *L'anneau  $B$  est*
  - (a) *noëthérien si  $A$  l'est ;*
  - (b) *réduit si  $A$  l'est ;*
  - (c) *local d'idéal maximal  $\mathfrak{m} \cap B$  si  $A$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de corps résiduel isomorphe au sous-corps  $\text{Fix}_G(A/\mathfrak{m})$  de  $\kappa = A/\mathfrak{m}$ .*
- (ii) *Le morphisme  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B) = \text{Spec}(A)/G$  est*
  - (a) *fini si  $A$  est noëthérien ;*
  - (b) *génériquement étale si  $A$  est de plus réduit.*

*Démonstration.* (i) Notons  $\text{Tr}$  le morphisme  $B$ -linéaire  $\text{Tr} : A \rightarrow B, x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x)$ , parfois appelé « opérateur de Reynolds ». Pour tout idéal  $I$  de  $B$ , on a  $IA \cap B = I$ . En effet, l'inclusion  $I \subseteq IA \cap B$  est triviale et l'inclusion opposée résulte du fait que si  $x \in IA \cap B$ , sa « trace »  $x = \text{Tr}(x)$  appartient, par  $I$ -linéarité, à  $IB = I$ . On en déduit immédiatement l'énoncé a). L'énoncé b) est trivial. Si  $A$  est local, on a  $A - \mathfrak{m} = A^\times$ . Il résulte d'une part que  $G$  stabilise globalement  $\mathfrak{m}$  et d'autre part que  $\text{Fix}_G(A) - \text{Fix}_G(\mathfrak{m}) = \text{Fix}_G(A)^\times$ . Ainsi,  $B$  est maximal d'idéal  $\mathfrak{n} = \text{Fix}_G(\mathfrak{m})$ . Enfin, Le morphisme canonique  $B/\mathfrak{n} \rightarrow \text{Fix}_G(\kappa)$  déduit de l'inclusion canonique  $B/\mathfrak{n} \rightarrow \kappa$  est un isomorphisme. En effet, si  $a \in A$  est un relèvement arbitraire de  $\lambda \in \text{Fix}_G(\kappa)$ , l'élément  $b = \text{Tr}(a)$  en est un relèvement  $G$ -équivariant. Ceci achève la démonstration du c). (ii.a). Nous allons montrer que le morphisme entier  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  est fini par réduction au cas bien connu où  $A$  est un corps.

✦ *Réduction au cas réduit.* Soient  $N$  le nilradical de  $A$  et  $M = N \cap B$  celui de  $B$ . Pour chaque entier  $i \in \mathbf{N}$ , le  $A/N$ -module  $N^i/N^{i+1}$  est de type fini, car  $A$  est supposé noëthérien, et nul pour  $i \gg 0$ . Le module  $\text{gr}_N(A) = \bigoplus_{n \geq 0} N^i/N^{i+1}$  est donc de type fini sur  $\text{gr}_N^0(A) = A/N$ . Si ce dernier est de type fini sur  $B/M = \text{gr}_M^0(B)$ , il en est de même de  $\text{gr}_N(A)$  sur  $\text{gr}_M(B)$  et finalement ([Bourbaki, A.C., III, §2, n°9,

cor. 1]) de  $A$  sur  $B$ , par complétude de l'anneau noethérien  $B$  pour la topologie  $M$ -adique.

✦ Réduction au cas d'un produit de corps. Supposons  $A$  réduit et considérons l'ensemble fini  $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in I}$  des idéaux premiers minimaux de  $A$ . Pour chaque  $i$ ,  $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \cap B$  est un idéal premier *minimal* de  $B$ . Cela résulte du théorème de Cohen-Seidenberg ([Bourbaki, A.C., V, §2, n°1, th. 1 et cor. 2]) et de la transitivité de l'action de  $G$  sur les fibres de  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  (*op. cit.*, n°2, th. 2). Soit  $\text{Frac } A$  (resp.  $\text{Frac } B$ ) l'anneau total des fractions de  $A$  (resp.  $B$ ); c'est un produit de corps dans lequel  $A$  (resp.  $B$ ) s'injecte, isomorphe au semi-localisé de  $A$  en les  $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in I}$  (resp.  $\{\mathfrak{q}_i\}_{i \in I}$ ). Soit  $S = A - \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ ; on a donc  $\text{Frac } A = S^{-1}A$ . D'après (*op. cit.*, §1, n°1, prop. 23), on a  $\text{Fix}_G(S^{-1}A) = \text{Fix}_G(S)^{-1}B$ , de sorte que  $\text{Fix}_G(\text{Frac } A) = \text{Frac } B$  et  $A \otimes_B \text{Frac } B \cong \text{Frac } A$ . Supposons  $\text{Frac } A$  fini sur  $\text{Frac } B$ , de sorte qu'il existe d'après l'isomorphisme précédent un nombre fini  $n$  d'éléments de  $A$  qui engendrent  $\text{Frac } A$  sur  $\text{Frac } B$ . Observons que l'opérateur  $\text{Tr} : A \rightarrow B$  définit, par composition avec le produit, un accouplement  $A \otimes_B A \rightarrow B$  qui est parfait sur les anneaux de fractions : on se ramène à montrer que si  $e_i$  est un idempotent correspondant au facteur  $K_i = \text{Frac } A/\mathfrak{p}_i$  de  $\text{Frac } A$ , l'élément  $\text{Tr}(e_i)$  est non nul ; il est en effet égal à  $\frac{|G_i|}{|G|}$ , où  $G_i$  est le stabilisateur de  $e_i$ . Les  $n$  éléments ci-dessus définissent donc un plongement  $A^G$ -linéaire de  $A$  dans  $B^n$ . On peut conclure par noethérianité.

✦ Réduction au cas d'un corps. Soit donc  $A = \prod_i K_i$  un produit fini de corps et posons  $X = \text{Spec}(A) = \coprod_i \eta_i$ . Si  $X = X_1 \coprod X_2$ , où  $X_1$  et  $X_2$  sont  $G$ -stables,  $X/G = (X_1/G) \coprod (X_2/G)$  de sorte que l'on se ramène immédiatement au cas où  $X/G$  est connexe, c'est-à-dire où l'action de  $G$  est *transitive*. Pour tout  $i$ , notons  $G_i$  le groupe de décomposition correspondant. D'après le cas classique (cas d'un corps),  $\eta_i \rightarrow \eta_i/G_i$  est fini étale. Il en résulte que le morphisme  $X \rightarrow \coprod \eta_i/G_i$  est fini. Enfin, puisque pour tout  $i$ ,  $\eta_i/G_i \xrightarrow{\sim} X/G$  (*loc. cit.*, §2, n°2, prop. 4), le résultat (ii.a) en découle.

L'énoncé (ii.b) est désormais évident. □

**2.2.4.** Soient  $A$  et  $G$  comme dans l'énoncé du théorème 2.2.2. Il résulte de la proposition précédente l'on a l'égalité  $\dim(B) = \dim(A) < +\infty$ , où l'on note  $B = \text{Fix}_G(A)$ . Nous noterons  $d$  leur dimension commune. Soit  $B/I$  le quotient maximal  $d$ -équidimensionnel de  $B$ . D'après le théorème de Cohen-Gabber 2.1.1, il existe un corps de représentants  $\lambda \hookrightarrow B/I$  et un système de paramètres  $t_1, \dots, t_d$  de  $B/I$  tel que  $\lambda[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow B/I$  soit fini, génériquement étale. On peut relever l'inclusion  $\lambda \hookrightarrow B/I$  en une inclusion  $\lambda \hookrightarrow B$  : cela résulte par exemple, en caractéristique résiduelle positive (seul cas non trivial), de la correspondance entre sous-corps de représentants et relèvements d'une  $p$ -base donnée du corps résiduel. Enfin, on peut relever le système de paramètres de  $B/I$  en un système de paramètres de  $B$  : cela résulte, par dévissage, du lemme suivant.

**LEMME 2.2.5.** Soient  $A \rightarrow B$  une surjection d'anneaux locaux noethériens et  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{m}_B$  un élément sécant pour  $B$ , c'est-à-dire tel que  $\dim(B/\mathfrak{b}) = \dim(B) - 1$ . Il existe un relèvement de  $\mathfrak{b}$  dans  $A$  sécant pour  $A$ .

Pour des généralités sur les suites sécantes, voir par exemple *op. cit.*, chap. VIII, §3. n°2.

*Démonstration.* On se ramène immédiatement au cas où  $B = A/(f)$ ,  $f \in A$ . Soit  $\mathfrak{a} \in A$  un relèvement arbitraire de  $\mathfrak{b}$ ; par hypothèse, on a  $\dim(A/(f, \mathfrak{a})) =$

$\dim(B) - 1$ . Si  $\dim(B) = \dim(A) - 1$ , on a nécessairement  $\dim(A/\mathfrak{a}) = \dim(A) - 1$  car la dimension chute d'au plus un par équation. Dans le cas contraire,  $f$  appartient à la réunion  $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , où les  $\mathfrak{p}_i$  sont les idéaux premiers de  $A$  de cohauteur  $\dim(A)$ . Supposons que  $f \in \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ , et seulement ces idéaux-ci. La conclusion ne peut être mise en défaut que si  $\mathfrak{a} + (f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ , c'est-à-dire si tous les relèvements de  $b$  sont non sécants. Pour chaque  $i \leq r$ , on a  $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$  car  $f$  appartenant à  $\mathfrak{p}_i$ , on aurait  $\dim(A/(f, \mathfrak{a})) = \dim(A)$ . Il en résulte notamment que  $r \neq n$ . Il suffit donc de montrer que l'hypothèse  $\mathfrak{a} + (f) \subseteq \bigcup_{i=r+1}^n \mathfrak{p}_i$  est absurde. On aurait en effet  $\mathfrak{a} + f^m = \mathfrak{a} + f \cdot f^{m-1} \in \bigcup_{i=r+1}^n \mathfrak{p}_i$  pour tout  $m$  et finalement  $f^m(1 - f^{m-m'}) \in \mathfrak{p}_i$  pour deux entiers  $m > m'$  et un indice  $r+1 \leq i \leq n$ . On en tire immédiatement  $f \in \mathfrak{p}_i$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.  $\square$

**2.2.6.** L'extension  $\kappa/\lambda$  étant étale, car  $\lambda = \text{Fix}_G(\kappa)$ , le morphisme  $\kappa \rightarrow A/m$  se relève *uniquement* en un  $\lambda$ -homomorphisme  $k \rightarrow A$ ; ce morphisme est  $G$ -équivariant. Le morphisme  $A/B$  étant fini, génériquement étale, ceci achève la démonstration du théorème 2.2.2.

### 3. Autour du théorème de Epp

#### 3.1. Énoncé (rappel).

**3.1.1.** Si  $X$  est un schéma *réduit* n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles, nous noterons  $X_{\text{norm}}$  son normalisé ([ÉGA 2 6.3.6–8]).

**THÉORÈME 3.1.2** (Helmut Epp, [Epp, 1973], théorème 1.9). *Soit  $T \rightarrow S$  un morphisme local dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle  $p > 0$ . Notons  $\kappa_S$  et  $\kappa_T$  leurs corps résiduels respectifs. Supposons  $\kappa_S$  parfait et le sous-corps parfait maximal de  $\kappa_T$  algébrique sur  $\kappa_S$ . Il existe une extension finie de traits  $S' \rightarrow S$  telle que le produit fibré réduit normalisé*

$$T' := (T \times_S S')_{\text{red, norm.}}$$

*ait une fibre spéciale réduite au-dessus de  $S'$ .*

**REMARQUE 3.1.3.** En caractéristique mixte, le produit fibré  $T \times_S S'$  est réduit. En effet, le morphisme  $T' \rightarrow S'$  (obtenu par changement de base d'un plat) est plat, et  $S'$  est intègre si bien que l'anneau des fonctions de  $T'$  s'injecte dans l'anneau des fonctions de sa fibre générique. Il suffit donc de prouver que cette dernière est réduite. Or, en caractéristique nulle, toute extension de corps est séparable. On vérifie également sans difficulté que la conclusion du théorème est encore valable si l'on suppose seulement  $S$  complet, mais pas nécessairement  $T$  (cf. *loc. cit.*, §2).

#### 3.2. Sorites.

**3.2.1.** Nous dirons qu'une extension de corps  $K/k$  de caractéristique  $p > 0$  a la *propriété de Epp* si tout élément du sous-corps parfait maximal de  $K$ ,  $K^{p^\infty} := \bigcap_{i \geq 0} K^{p^i}$ , est algébrique séparable sur  $k$ . Pour  $k$  parfait, c'est l'hypothèse faite sur  $\kappa_T/\kappa_S$  dans 3.1.2. Dans ce court paragraphe, on rappelle quelques résultats élémentaires de stabilité pour cette notion. Commençons par un lemme.

**LEMME 3.2.2.** *Pour tout corps  $K$  d'exposant caractéristique  $p > 1$ , on a, dans une clôture séparable  $K^{\text{sep}}$  de  $K$ ,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sep}} = (K^{\text{sep}})^{p^\infty}.$$

*Démonstration.* L'inclusion  $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$  est évidente :  $K^{p^\infty}$  est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable  $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$ , l'est également. Comme cette dernière est contenue dans  $K^{\text{sép}}$ , elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait  $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ .

Réciproquement, considérons  $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ , et notons, pour chaque entier  $n \geq 0$ ,  $x_n$  sa racine  $p^n$ -ième dans  $K^{\text{sép}}$  et  $f_n$  son polynôme minimal (*unitaire*). Compte tenu d'une part de l'expression de  $f_n$  en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de  $x_n$  et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élevation à la puissance  $p^n$ -ième, on a l'égalité  $f_0 = f_n^{(p^n)}$ , où  $f_n^{(p^n)}$  est le polynôme obtenu à partir de  $f_n$  en élevant les coefficients à la puissance  $p^n$ -ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal  $f_0$  de  $x$  appartiennent à  $K^{p^\infty}$ .  $\square$

**PROPOSITION 3.2.3** (Cf. [Epp, 1973], §0.4). *Soit  $k$  un corps d'exposant caractéristique  $p$ .*

- (i) *Soient  $L/K$  et  $K/k$  ayant la propriété de Epp. Alors,  $L/k$  a la propriété de Epp.*
- (ii) *Toute extension finie de  $k$  a la propriété de Epp.*
- (iii) *Si  $p > 1$ , pour tout entier naturel  $d$ , l'extension  $(\text{Frac } k[[x_1, \dots, x_d]])/k$  a la propriété de Epp.*
- (iv) *Si  $p > 1$ , pour toute inclusion  $k \subset A$ , où  $A$  est un anneau local complet noethérien intègre, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, l'extension  $(\text{Frac } A)/k$  a la propriété de Epp.*

*Démonstration.* Supposons immédiatement  $p > 1$  sans quoi (i) et (ii) sont triviaux.

(i) Par hypothèse on a dans une clôture séparable de  $L$  l'inclusion  $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$ . Comme le corps  $L^{p^\infty}$  est *parfait*, on en déduit que  $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset k^{\text{sép}}$ , où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle  $K/k$ . Si elle est de hauteur  $\leq r$ , on a  $K^{p^r} \subset k$  et en particulier  $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sép}}$ .

(iii) Soit  $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$  et  $K$  son corps des fractions. Montrons que  $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$ . Comme  $K$  est contenu dans  $k((x_1, \dots, x_{d-1}))((x_d))$ , on se ramène par récurrence au cas où  $d = 1$ . Tout élément non nul de  $k((t))^{p^\infty}$  a une valuation infiniment  $p$ -divisible donc nulle, de sorte que  $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$  est contenu dans  $k[[t]]^\times$  et finalement dans  $k^{p^\infty}$  par un calcul immédiat. (iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen.  $\square$

## 4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte

### 4.1. Anneaux de Cohen et lissité formelle (rappels).

**4.1.1.** Pour la commodité du lecteur, nous énonçons quelques résultats, principalement dus à Cohen. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [Bourbaki, A.C., IX, §2] et [ÉGA 0<sub>IV</sub> §19].

**DÉFINITION 4.1.2** ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.3.1]). Soit  $A$  un anneau topologique. Une  $A$ -algèbre topologique  $B$  est dite *formellement lisse* si pour toute  $A$ -algèbre topologique *discrète*  $C$ , et tout idéal *nilpotent*  $I$  de  $C$ , tout  $A$ -morphisme continu  $u : B \rightarrow C/I$  se factorise en  $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{\varphi} C/I$ , où  $v$  est un  $A$ -morphisme continu et  $\varphi$  l'homomorphisme canonique.

On dit aussi que  $A \rightarrow B$  est un *morphisme formellement lisse*. La proposition suivante énonce une propriété de relèvement un peu plus générale que celle de la définition.

**PROPOSITION 4.1.3** (*loc. cit.*, 19.6.1). *Soient  $A$  un anneau topologique, et  $B$  un  $A$ -algèbre formellement lisse. Soient  $C$  une  $A$ -algèbre topologique,  $I$  un idéal de  $C$  vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $C$  est métrisable et complet ;
- (ii)  $I$  est fermé et la suite  $(I^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers zéro.

*Alors, tout  $A$ -morphisme continu  $u : B \rightarrow C/I$  se factorise en  $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/I$ , où  $v$  est un  $A$ -morphisme continu.*

Les deux théorèmes suivants donnent deux critères importants de lissité formelle.

**THÉORÈME 4.1.4** (*loc. cit.*, 19.6.1). *Une extension de corps munis de la topologie discrète est formellement lisse si et seulement si l'extension est séparable.*

**THÉORÈME 4.1.5** (*loc. cit.*, 19.7.1). *Soient  $A, B$  deux anneaux locaux noëthériens,  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$  leurs idéaux maximaux respectifs et  $k = A/\mathfrak{m}$  le corps résiduel de  $A$ . Munissons  $A$  et  $B$  respectivement des topologies  $\mathfrak{m}$ -adique et  $\mathfrak{n}$ -adique. Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme local, et posons  $B_0 = B \otimes_A k$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $B$  est une  $A$ -algèbre formellement lisse ;
- (ii)  $B$  est un  $A$ -module plat, et  $B_0$  munie de la topologie quotient est une  $k$ -algèbre formellement lisse.

Le théorème suivant, joint au précédent, est à la base de la démonstration de l'existence des anneaux de Cohen définis ci-après.

*Dans les énoncés qui suivent, les anneaux locaux sont munis de la topologie de l'idéal maximal.*

**THÉORÈME 4.1.6** (*loc. cit.*, 19.7.2). *Soient  $A$  un anneau local noëthérien,  $I$  un idéal strict,  $A_0 = A/I$ ,  $B_0$  un anneau local noëthérien complet,  $A_0 \rightarrow B_0$  un morphisme local formellement lisse. Il existe alors un anneau local noëthérien complet  $B$ , un morphisme local  $A \rightarrow B$  faisant de  $B$  un  $A$ -module plat, et un  $A_0$ -isomorphisme  $u : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$ .*

**DÉFINITION 4.1.7** (*loc. cit.*, 19.8.4 et 5). On appelle *anneau de Cohen* un anneau qui est soit un corps de caractéristique nulle, soit un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel de caractéristique  $p > 0$  et d'idéal maximal engendré par  $p$ .

**THÉORÈME 4.1.8** (Cohen, *loc. cit.*, 19.8.6 et 21.5.3). (i) *Soient  $W$  un anneau de Cohen de corps résiduel  $K$ ,  $C$  un anneau local noëthérien complet, et  $I$  un idéal strict de  $C$ . Alors, tout morphisme local  $u : W \rightarrow C/I$  se factorise en  $W \xrightarrow{v} C \rightarrow C/I$ , où  $v$  est local. De plus, la factorisation est unique si et seulement si  $\Omega_K^1 = 0$ .*

(ii) *Soit  $K$  un corps. Il existe un anneau de Cohen  $W$  de corps résiduel isomorphe à  $K$ . Si  $W'$  est un second anneau de Cohen, de corps résiduel  $K'$ , tout isomorphisme  $u : K \xrightarrow{\sim} K'$  provient par passage au quotient d'un isomorphisme  $v : W \xrightarrow{\sim} W'$ .*

**4.1.9.** Rappelons que l'hypothèse  $\Omega_K^1 = 0$  est équivalente au fait que  $K$  est *parfait* s'il est de caractéristique  $> 0$  ou bien est une extension algébrique de  $\mathbf{Q}$  s'il est de caractéristique nulle.

Signalons que si  $K$  est *parfait* de caractéristique  $p > 0$ , le morphisme  $v$  de (ii) est *unique*. Dans ce cas,  $W$  est d'ailleurs isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur  $K$ .

## 4.2. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte.

**4.2.1.** Soit  $A$  un anneau local noëthérien complet de caractéristique résiduelle  $p > 0$ . Le schéma  $X = \text{Spec}(A)$  est de manière unique un  $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ -schéma. Notons  $X_p$  le sous-schéma fermé de  $X$ , fibre au-dessus du point fermé de  $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ . Nous dirons qu'un ouvert  $U \subset X$  est *p-dense* si  $U \cap X_p$  est dense dans  $X_p$ .

**THÉORÈME 4.2.2.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma local noëthérien complet normal de corps résiduel  $k$ , de dimension  $d \geq 2$  et de point générique de caractéristique nulle. Il existe un morphisme fini surjectif  $X' \rightarrow X$ , où  $X'$  est normal intègre de corps résiduel  $k'$ , et un morphisme fini surjectif  $X' \rightarrow \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ , où  $V$  est un anneau de valuation discrète de corps résiduel  $k'$ , étale au-dessus d'un ouvert p-dense du but.*

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent.

**4.2.3.** Soit  $X$  comme dans l'énoncé. Considérons le sous-corps parfait maximal  $k_0 = k^{p^\infty}$  du corps résiduel  $k$  de  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  et notons  $W_0 = W(k_0)$  l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen qu'il existe un unique morphisme  $X \rightarrow S_0 = \text{Spec}(W_0)$  qui étende le morphisme  $\text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(k_0)$  entre les points fermés (4.1.8, (i)).

Pour tout point maximal  $\mathfrak{p}$  de la fibre spéciale  $X_p$  de ce morphisme, l'anneau de valuation discrète  $A_{\mathfrak{p}}$  a pour corps résiduel  $\text{Frac } A/\mathfrak{p}$ , où l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est local noëthérien complet intègre de corps résiduel  $k$ . D'après 3.2.3 (i) & (iv), l'extension  $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$  a la propriété de Epp. De tels idéaux  $\mathfrak{p}$  étant en nombre fini et la conclusion du théorème de Epp (3.1.2, 3.1.3) étant stable par changement de base fini car c'est un résultat de lissité formelle, il existe donc un changement de base fini  $S'_0 = \text{Spec}(W'_0) \rightarrow S_0$  tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé  $X'_0 := (X \times_{S_0} S'_0)_{\text{norm.}} = \text{Spec}(A'_0)$  soit réduite en ses points maximaux. (On utilise le fait que les points maximaux de la fibre spéciale de  $X'_0 \rightarrow S'_0$  se trouvent au-dessus des points maximaux de la fibre spéciale de  $X \rightarrow S_0$ ; cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 16.1.6].)

D'après le lemme suivant, la fibre spéciale du morphisme  $X'_0 \rightarrow S'_0$  est alors réduite.

**LEMME 4.2.4.** *Soit  $X$  un schéma noëthérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.*

*Démonstration.* On peut supposer  $X$  affine égal à  $\text{Spec}(A)$  et le diviseur de Cartier effectif défini par une fonction  $f \in A$ . Soient  $a \in A$  et  $n \geq 1$  tels que  $a^n \in fA$ ; on souhaite montrer que  $a \in fA$ . L'anneau  $A/f$  étant génériquement réduit, l'élément  $a/f$  de  $\text{Frac } A$  appartient à  $A_{\mathfrak{p}}$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  contenant  $f$  (un tel idéal est de hauteur 1 s'il est minimal ([Bourbaki, A.C., VIII, §3, n°1 prop. 1])). Il en est évidemment de même pour  $f \notin \mathfrak{p}$ . L'anneau  $A$  étant normal,  $\bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = A$  où  $\mathfrak{p}$  parcourt les idéaux de hauteur 1 (cf. loc. cit. VII, §1, n°7, th. 4) de sorte que  $a/f \in A$ . CQFD.  $\square$



**4.2.5.** Notons  $k'_0$  le corps résiduel de  $W'_0$ ,  $\varpi'$  une uniformisante de  $W'_0$ , et considérons une composante connexe  $X' = \text{Spec}(A')$  de  $X'_0$ ; c'est un schéma fini surjectif au-dessus de  $X$ . Soit  $k'$  son corps résiduel. L'inclusion  $k'_0 \hookrightarrow k'$  déduite du morphisme  $X' \rightarrow S'_0$  est formellement lisse, car  $k'_0$  est parfait, donc se relève d'après 4.1.5 et 4.1.6 en un morphisme *formellement lisse*  $W'_0 \rightarrow V$  où  $V$  est un anneau local complet noëthérien. Cet anneau est un anneau de valuation discrète. L'anneau  $A'/\varpi'$  étant *réduit*, équidimensionnel de dimension  $d-1$ , de corps résiduel  $k'$ , il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (2.1.1), un relèvement  $k'_0$ -linéaire  $k' \hookrightarrow A'/\varpi'$  et des éléments  $x_1, \dots, x_{d-1}$  dans l'idéal maximal de  $A'/\varpi'$  tels que le morphisme induit  $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$ , envoyant l'indéterminée  $t_i$  sur  $x_i$ , soit fini, *génériquement étale* en haut et en bas.

Par lissité formelle de  $W'_0 \rightarrow V$ , le morphisme composé  $V \rightarrow k' \rightarrow A'/\varpi'$  se relève en un  $W'_0$ -morphisme  $V \rightarrow A'$ . En relevant les  $x_i$  dans  $A'$ , nous obtenons un morphisme  $V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A'$ , fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale. CQFD.

### 4.3. Le théorème de Cohen-Gabber premier à $\ell$ en caractéristique mixte.

**THÉORÈME 4.3.1.** Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma local noëthérien complet normal de dimension  $d \geq 2$ , de corps résiduel  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et de point générique de caractéristique nulle. Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Il existe alors :

- (i) un schéma local noëthérien intègre normal  $Y$  muni d'une action d'un  $\ell$ -groupe fini  $H$  et un morphisme fini surjectif  $H$ -équivariant  $Y \rightarrow X$  tel que le quotient  $Y/H$  soit de degré (générique) premier à  $\ell$  sur  $X$ ;
- (ii) un anneau de valuation discrète complet  $V$  de même corps résiduel  $k'$  que  $Y$ , de caractéristique mixte, muni d'une action de  $H$  compatible avec son action sur  $k'$ ;
- (iii) un morphisme local  $Y \rightarrow Y' = \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$  qui soit fini, étale au-dessus d'un ouvert  $p$ -dense de  $Y'$ , et  $H$ -équivariant avec action triviale de  $H$  sur les  $t_i$ .

Ces morphismes sont représentés dans le diagramme ci-dessous, où toutes les flèches sont des morphismes finis surjectifs.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]]) = Y' & \xleftarrow{p\text{-génériquement étale}} & Y & \xrightarrow{\quad} & Y/H \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & X & & \end{array}$$

ordre premier à  $\ell$

**REMARQUE 4.3.2.** Observons que les conditions (i) — (iii) sur les morphismes  $Y \rightarrow X$  et  $Y \rightarrow Y'$  n'entraînent pas que le schéma  $Y/H$  soit étale au-dessus d'un ouvert  $p$ -dense de  $\text{Spec}(\text{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]]) = Y'/H$ . Voici un exemple, dû à Takeshi Saitô. Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ ,  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt sur  $k$ ,  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ ,  $A = W[[x, y]]/(x^\ell y - p)$ . Soient  $W' = W[\pi]/(\pi^\ell - p)$  et  $B$  le normalisé de  $A \otimes_W W'$ ,  $W'$ -isomorphe à  $W'[[x, z]]/(xz - \pi)$ . Le groupe  $H = \mu_\ell(k)$  agit sur  $B$ , via son action sur  $W' : \zeta \cdot x = x$  et  $\zeta \cdot z = \zeta z$ . Le morphisme  $Y = \text{Spec}(B) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$  défini par  $x \mapsto x$  et  $y \mapsto z^\ell$  satisfait les propriétés du théorème car  $Y/H \xrightarrow{\sim} X$  et  $Y \rightarrow Y' = \text{Spec}(W'[[x]])$ ,  $x \mapsto x$ , est  $p$ -génériquement étale. Cependant,  $Y/H$  a une

fibre spéciale isomorphe au schéma non réduit  $\text{Spec}(k[[x, y]]/(x^\ell \cdot y))$ . Elle n'est donc pas étale au-dessus d'un ouvert dense de la fibre spéciale de  $Y'$ .

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent. Notons que si la fibre spéciale  $X_p$  de  $X$  sur  $\text{Spec}(\mathbf{Z}_p)$  est réduite, ce théorème — comme le précédent — résulte simplement du théorème 2.2.2, dans le cas particulier où le groupe  $G$  est trivial : on peut prendre  $Y = X$  et  $H$  trivial.

**4.3.3.** Considérons à nouveau le sous-corps parfait maximal  $k_0$  du corps résiduel  $k$  de  $A$  et  $W_0 = W(k_0) \hookrightarrow A$  l'unique morphisme relevant l'inclusion  $k_0 \hookrightarrow k$ . Soit  $W_0^\vee$  la clôture intégrale de  $W_0$  dans  $A$ .

LEMME 4.3.4. *L'extension  $W_0^\vee/W_0$  est finie, totalement ramifiée.*

*Démonstration.* Soit  $W'/W_0$  une extension finie de traits, où  $W'$  est contenu dans  $A$ . Le corps résiduel de  $W'$  est une extension finie de  $k_0$  ; c'est donc un corps parfait, contenu dans  $k$  et contenant  $k_0$ . Il est donc égal à  $k_0$  : l'extension est totalement ramifiée. Le degré de l'extension  $W'/W_0$  est par conséquent égal à son indice de ramification, qui est majoré par tout entier  $N$  tel que  $p$  appartienne à  $\mathfrak{m}_A^N - \mathfrak{m}_A^{N+1}$ . Si  $W''$  est tel que le degré de l'extension  $\text{Frac}(W'')/\text{Frac}(W_0)$  soit maximal, on a nécessairement  $W' \subseteq W''$ , comme on le voit immédiatement en considérant la sous-extension composée, dans  $\text{Frac}(A)$ , des corps des fractions. Ainsi,  $W_0^\vee = W''$  est fini sur  $W_0$ .  $\square$

**4.3.5.** D'après le théorème de Epp (3.1.2), il existe une extension finie d'anneaux de valuation discrète  $W_0^\vee \rightarrow W'_0$ , que l'on peut supposer génériquement galoisienne de groupe un groupe fini  $G$ , telle que la fibre spéciale sur  $W'_0$  de la normalisation  $A'$  de  $A \otimes_{W_0^\vee} W'_0$  soit réduite. Observons que l'anneau  $W'_0$  étant intégralement clos dans  $A$ , l'anneau  $A'$  est local. Notons  $k'_0$  (resp.  $k'_0$ ) le corps résiduel de  $W'_0$  (resp.  $W'_0$ ) et  $k'$  le corps résiduel de  $A'$ . Choisissons des anneaux de Cohen  $I(k')$  et  $I(k'^G)$  relatifs aux corps  $k'$  et  $k'^G$ . Il existe un morphisme  $I(k'^G) \rightarrow I(k')$  relevant l'inclusion. Ce morphisme étant fini étale entre anneaux locaux complets donc henséliens, l'action du quotient  $\text{Gal}(k'/k'^G)$  de  $G$  sur  $k'$  se relève en une action  $I(k'^G)$ -linéaire sur  $I(k')$  (cf. p. ex. [Serre, 1968], III, §5, th. 3). Le corps  $k'_0$  étant parfait, il existe d'après le théorème 4.1.8 un morphisme  $G$ -équivariant  $W(k'_0) \rightarrow I(k')$ . Soient enfin  $V = W'_0 \otimes_{W(k'_0)} I(k')$ ,  $\varpi$  une uniformisante de  $W'_0$ ,  $\overline{A'} = A'/\varpi A'$  et  $H$  un  $\ell$ -Sylow de  $G$ . D'après le théorème 2.2.2, il existe un morphisme fini, étale,  $H$ -équivariant,  $\varphi : k'[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow \overline{A'}$ , où les  $t_i$  s'envoient dans  $\overline{A'}^H$ . Le morphisme  $A'^H \rightarrow \overline{A'}^H$  étant surjectif — comme cela se voit en utilisant la trace — on peut relever les images des  $t_i$  en des  $x'_i$  dans  $A'^H$ . De plus, par lissité formelle de  $V/W'_0$ , on peut relever  $k' \rightarrow \overline{A'}$  en un  $W'_0$ -morphisme  $\psi : V \rightarrow A'$  : cela résulte par exemple de [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.3.10]. En procédant cran par cran, et en considérant des isobarycentres dans les espaces affines définis par le lemme bien connu suivant, on constate qu'existe même un tel relèvement qui est  $H$ -invariant.

LEMME 4.3.6. *Soit  $(A, I) \rightarrow (B, J)$  un morphisme formellement lisse, où  $A$  (resp.  $B$ ) est muni de la topologie définie par son idéal  $I$  (resp.  $J$ ). Soit  $C \twoheadrightarrow C'$  une surjection de  $A$ -algèbres, de noyau  $\mathcal{N}$  tel que  $\mathcal{N}^2 = I\mathcal{N} = 0$ . Alors, l'ensemble des  $A$ -linéaires relèvements d'un morphisme  $B \rightarrow C'$  à  $C$  est soit vide soit un torseur sous  $\text{Dér}_A(B, \mathcal{N})$ .*

**4.3.7.** Le  $X$ -schéma  $Y = \text{Spec}(A')$  est bien fini  $p$ -génériquement étale sur  $Y' = \text{Spec}(V[[t_1, \dots, t_d]])$  si l'on envoie  $V$  dans  $A'$  par  $\psi$  comme ci-dessus et les

variables  $t_i$  sur les  $x'_i$ . Par construction  $Y$  est, génériquement sur  $X$ , galoisien de groupe un sous-groupe de  $G$  ; son quotient  $Y/H$  est donc génériquement d'ordre premier à  $\ell$ . Ceci achève la démonstration du théorème.



## EXPOSÉ V

### Algébrisation partielle

Fabrice Orgogozo

#### 1. Préparatifs (rappels)

**1.1. Le théorème de préparation de Weierstraß.** On trouvera dans [Bourbaki, A.C., VII, §3, n°7-8] une démonstration du théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.1.** Soient  $A$  un anneau local séparé complet d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,  $d > 0$  un entier et  $f \in A[[\underline{X}, T]]$  une série formelle, où l'on pose  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$ .

- (i) Soit  $\rho$  un entier naturel tel que  $f$  soit  $\rho$ -régulière relativement à  $T$ , c'est-à-dire congrue à  $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^\rho$  modulo  $(\mathfrak{m}, \underline{X})$ . Alors, pour tout  $g \in A[[\underline{X}, T]]$ , il existe un unique couple  $(q, r) \in A[[\underline{X}, T]] \times A[[\underline{X}]][[T]]$  tel que  $g = qf + r$  et  $\deg_T(r) < \rho$ . De plus, il existe un unique polynôme  $P = T^\rho + \sum_{i < \rho} p_i T^i$ , où les coefficients  $p_i$  appartiennent à  $(\mathfrak{m}, \underline{X})A[[\underline{X}]]$ , et une unité  $u \in A[[\underline{X}, T]]^\times$  tels que  $f = uP$ .
- (ii) Si  $f$  est non nulle modulo  $\mathfrak{m}$ , il existe un entier naturel  $\rho$  et un automorphisme  $A[[T]]$ -linéaire  $c$  de  $A[[\underline{X}, T]]$ , tel que  $c(X_i) = X_i + T^{N_i}$  ( $N_i > 0$ ) et la série entière  $c(f)$  soit  $\rho$ -régulière.

**1.1.2.** Signalons que l'on peut satisfaire la condition (ii) simultanément pour un nombre fini d'éléments : cf. *loc. cit.*, n°7, lemme 2 où l'on considérera un produit (fini) de séries formelles.

Nous ferons usage de la propriété suivante des polynômes comme en (ii) ci-dessus.

**LEMME 1.1.3.** Soient  $B$  un anneau local complet noëthérien et  $P \in B[X]$  un polynôme de la forme  $X^\rho + \sum_{i < \rho} b_i X^i$ , où  $b_i \in \mathfrak{m}_B$  et  $\rho > 0$ . Alors, le complété  $(P)$ -adique de  $B\{X\}$  s'identifie à  $B[[X]]$ .

Rappelons que  $B\{X\}$  désigne l'hensélisé en l'origine de l'anneau  $B[X]$ . Un polynôme  $P$  comme ci-dessus est parfois dit *de Weierstraß*.

*Démonstration.* Soient  $N$  un entier naturel et  $Q = P^N$ . Il résulte de **1.1.1** (i), que l'anneau quotient  $B[[X]]/(Q)$  est isomorphe comme  $B$ -module à  $B[X]/(X^{\deg(Q)})$  et en particulier fini sur  $B$ . Par fidèle platitude du morphisme  $B\{X\} \rightarrow B[[X]]$ , on a  $QB[[X]] \cap B\{X\} = QB\{X\}$  de sorte que le  $B$ -morphisme  $B\{X\}/Q \rightarrow B[[X]]/Q$  est *injectif*. L'anneau  $B\{X\}/Q$  est donc également fini sur l'anneau complet  $B$ ; il est donc isomorphe à son complété  $B[[X]]/Q$ . En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on en déduit que le séparé-complété  $(P)$ -adique de  $B\{X\}$  est donc isomorphe à celui de  $B[[X]]$ ; ce dernier est isomorphe à  $B[[X]]$  puisque  $\deg(P) > 0$ .  $\square$

#### 1.2. Le théorème d'algébrisation d'Elkik.

**DÉFINITION 1.2.1.** Une paire  $(\text{Spec}(C), V(J))$  est dite *hensélienne* si pour tout polynôme  $f \in C[T]$ , toute racine  $\beta$  de  $f$  dans  $C/J$  telle que  $f'(\beta)$  soit une unité de  $C/J$  se relève en une racine dans  $C$ .

**1.2.2.** Il résulte de [Crépeaux, 1967], prop. 2, (iii) $\Rightarrow$ (i) et [Raynaud, 1970], chap. XI, §2, prop. 1, 4) $\Rightarrow$ 1) (voir aussi [Gabber, 1992], déf. p. 59) que la définition précédente est équivalente à la définition [ÉGA IV 18.5.5] (relèvement d'ouverts-fermés). Remarquons que la notion de *racine simple* introduite dans la définition est plus forte que celle de [Bourbaki, A., IV, §2, n°1, déf. 1] et que le relèvement ci-dessus est nécessairement unique. Notons également que l'idéal  $I$  est nécessairement contenu dans le radical de Jacobson de l'anneau  $C$ .

**LEMME 1.2.3.** Soient  $C$  un anneau local hensélien d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et  $J \subseteq \mathfrak{m}$  un idéal. La paire  $(\text{Spec}(C), V(J))$  est hensélienne.

En particulier, pour  $B$  et  $P$  comme dans le lemme 1.1.3, la paire  $(\text{Spec}(B[X]), V(P))$  est hensélienne.

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $\beta$  comme ci-dessus. L'anneau  $C$  étant local hensélien, l'image  $\gamma$  de  $\beta$  dans le corps résiduel  $C/\mathfrak{m}$  se relève en une racine  $\alpha$  de  $P$ . Notons  $\beta'$  son image dans  $C/J$  et vérifions que  $\beta = \beta'$ . Remarquons tout d'abord que puisque  $P'(\alpha)$  est une unité de  $C$ ,  $P'(\beta')$  est une unité de  $C/J$ . De plus, l'égalité  $P(\beta) = P(\beta') + (\beta - \beta')P'(\beta') + (\beta - \beta')^2b$  où  $b \in B/J$  se réduit à  $\beta - \beta' = (\beta - \beta')^2 \frac{-b}{P'(\beta')}$ ; si l'on pose  $x = \beta - \beta'$ , on a donc  $x(1 - ax) = 0$  pour un  $a \in C/J$ . Comme  $x$  appartient à  $\mathfrak{m}$  (car  $\beta$  et  $\beta'$  ont pour image  $\gamma$  dans  $C/\mathfrak{m}$ ), on a  $x = 0$ .  $\square$

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation de Renée Elkik ([Elkik, 1973a], théorème 5).

**THÉORÈME 1.2.4.** Soient  $(X = \text{Spec}(A), Y = V(I))$  une paire hensélienne avec  $A$  noethérien, et  $\mathcal{U}$  le sous-schéma ouvert complémentaire de  $Y$  dans  $X$ . Notons  $X_{\widehat{\gamma}}$  le complété de  $X$  le long de  $Y$ ,  $\widehat{Y}$  le fermé correspondant à  $Y$  et  $\widehat{\mathcal{U}}$  son complémentaire dans  $X_{\widehat{\gamma}}$ . Le foncteur  $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{\gamma}}$  induit une équivalence de catégories entre la catégorie des  $X$ -schémas finis, étales sur  $\mathcal{U}$ , et la catégorie des  $X_{\widehat{\gamma}}$ -schémas finis, étales sur  $\widehat{\mathcal{U}}$ .

## 2. Algébrisation partielle en égale caractéristique

### 2.1. Énoncé.

**2.1.1.** Soient  $A$  un anneau local noethérien complet et  $\{I_e\}_{e \in E}$  une collection d'idéaux de  $A$ . On dit que la paire  $(A, \{I_e\}_{e \in E})$  est *partiellement algébrisable* s'il existe un anneau local noethérien complet  $B$  de dimension strictement inférieure à celle de  $A$ , une  $B$ -algèbre de type fini  $C$ , un idéal maximal  $\mathfrak{n}$  au-dessus de l'idéal maximal de  $B$ , et un isomorphisme  $A \simeq \widehat{C}_{\mathfrak{n}}$  tel que les idéaux  $I_e$  ( $e \in E$ ) proviennent d'idéaux de  $C_{\mathfrak{n}}$ .

**THÉORÈME 2.1.2.** Soit  $A$  un anneau local noethérien complet réduit d'égale caractéristique qui ne soit pas un corps. Alors,  $A$  muni d'un ensemble fini quelconque d'idéaux est partiellement algébrisable.

### 2.2. Démonstration.

**2.2.1.** Soient  $X = \text{Spec}(A)$  et  $I_1, \dots, I_n \subseteq A$  comme dans l'énoncé. Il résulte de la définition **2.1.1** que si un idéal  $I$  de  $A$  est de la forme  $J_1 \cap \dots \cap J_r$  et que les  $J_i$  sont partiellement algébrisables, l'idéal  $I$  l'est également. D'après le théorème de décomposition primaires des idéaux, on peut supposer les  $I_i$  *primaires*.

**2.2.2.** Notons  $k$  le corps résiduel de  $A$  et  $d > 0$  sa dimension. D'après **IV-2.1.1** si  $X$  est équidimensionnel ou bien **IV-2.2.2** (avec  $G = \{1\}$ ) dans le cas général, il existe un morphisme fini génériquement étale  $\pi : X \rightarrow X_0$ , où  $X_0 = \text{Spec}(k[[t_1, \dots, t_d]])$ .

**2.2.3.** Soit  $I$  l'un des  $I_i$ . Deux cas se présentent.

- (i)  $\dim(A/I) = d$ . L'idéal  $I$  est donc un idéal premier minimal de  $A$ .
- (ii)  $\dim(A/I) < d$ . L'image de  $V(I)$  dans  $X_0$  est donc de dimension au plus  $d - 1$  donc contenue dans un fermé  $V(g_I)$  où  $g_I \in A_0 = \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) - \{0\}$ .

Soient  $g = \prod_{I_i} g_{I_i}$  où  $I_i \in \{I_1, \dots, I_n\}$  parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et  $f \in A_0 - \{0\}$  telle que le lieu de ramification de  $\pi$  soit contenu dans  $V(f)$ . Posons  $h = gf$ . D'après **1.1.1** (ii) et (i), quitte à changer de base par un automorphisme (c'est-à-dire changer les coordonnées), on peut supposer que  $h$  est un polynôme unitaire en  $t_d$ . Considérons le sous-anneau  $\widetilde{A}_0 = k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$  de  $A_0$ . Il est hensélien et contient  $h$ . D'après les lemmes **1.1.3** et **1.2.3**, la paire  $(\widetilde{X}_0 = \text{Spec}(\widetilde{A}_0), V(h))$  est hensélienne. On est donc en mesure d'appliquer le théorème **1.2.4** et d'en déduire qu'il existe un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & \widetilde{X}_0 \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est, par hypothèse, étale hors de  $V(h)$  et les flèches horizontales sont des morphismes de complétion (à la fois pour la topologie  $h$ -adique et celle définie par leurs idéaux maximaux respectifs).

Les idéaux  $I$  du premier type (c'est-à-dire premier minimaux) se descendent à  $\widetilde{X}$  d'après le lemme suivant.

**LEMME 2.2.4.** *Soit  $B$  un anneau local hensélien quasi-excellent de complété noté  $\widehat{B}$ . Tout idéal premier minimal de  $\widehat{B}$  provient par image inverse d'un idéal premier minimal de  $B$ .*

*Démonstration.* Par restriction à l'adhérence du point générique du fermé, il suffit de démontrer que le complété d'un intègre hensélien quasi-excellent est intègre. Ce fait est bien connu et résulte d'ailleurs immédiatement du théorème d'approximation de Popescu, appliqué à l'équation  $xy = 0$ .  $\square$

**2.2.5.** Quant aux idéaux  $I$  du second type, il suffit d'observer que chaque  $V(I)$  est fini sur  $\text{Spec}(k[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ , donc sur  $\widetilde{X}$ , et d'appliquer le

**LEMME 2.2.6.** *Soient  $B$  un anneau local noethérien,  $J \subseteq \mathfrak{m}_B$  un idéal, et  $\widehat{B}$  le complété  $J$ -adique de  $B$ . Tout quotient de  $\widehat{B}$  fini sur  $B$  se descend à  $B$ .*

**2.2.7.** Admettons momentanément ce lemme et achevons la démonstration de **2.1.2**. Comme on l'a vu, les idéaux  $I_1, \dots, I_n$  proviennent d'idéaux de  $\widetilde{A}$ . Cet anneau est fini — donc *a fortiori* de présentation finie par noethérianité — sur l'anneau  $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$ . Ce dernier est l'hensélisé en l'origine de  $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$  ;

il est isomorphe à la colimite filtrante d'anneaux de type fini sur  $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]][[t_d]]$  donc sur l'anneau  $B = k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$ . La conclusion résulte de [ÉGA IV 8.8.2] qui assure l'existence d'une  $B$ -algèbre  $C$  comme en 2.1.1 dont proviennent les idéaux  $I_i$ .

**2.2.8.** Revenons à la démonstration du lemme 2.2.6 ci-dessus. Soit  $I \subseteq \widehat{B}$  tel que  $\widehat{B}/I$  soit fini sur  $B$ . Quitte à remplacer  $B$  par  $B/\text{Ker}(B \rightarrow \widehat{B}/I)$ , c'est-à-dire  $\text{Spec}(B)$  par l'image schématique de  $V(I)$ , on peut supposer  $B \rightarrow \widehat{B}/I$  injectif, c'est-à-dire  $V(I) \rightarrow \text{Spec}(B)$  schématiquement dominant. Le  $B$ -module  $\widehat{B}/I$  étant fini, la topologie  $J$ -adique sur  $\widehat{B}/I$  induit la topologie  $J$ -adique sur  $B$ . Puisque l'application  $B \rightarrow \widehat{B}/I$  est injective, d'image dense, et continue, il en résulte que  $\widehat{B}/I$  est le *séparé-complété* de  $B$  pour la topologie  $J$ -adique. On a donc  $I = (0)$ ; il se descend tautologiquement à  $B$ .

### 3. Algébrisation partielle première à $\ell$ en caractéristique mixte

#### 3.1. Énoncé.

**THÉORÈME 3.1.1.** *Soient  $A$  un anneau local noëthérien complet normal de caractéristique mixte  $(0, p)$  de dimension  $d \geq 2$  et  $\ell \neq p$  un nombre premier. Il existe un morphisme injectif fini  $A \rightarrow A'$  de degré générique premier à  $\ell$ , où  $A'$  est un anneau normal intègre dont toute famille finie d'idéaux est partiellement algébrisable.*

**REMARQUE 3.1.2.** Signalons qu'il suffit pour démontrer XIII-1.1.1 d'établir la variante affaiblie de l'énoncé précédent selon laquelle — en reprenant les notations de 2.1.1 — tout fermé rare de  $\text{Spec}(A') \simeq \text{Spec}(\widehat{C}_n)$  est ensemblistement contenu dans l'image inverse d'un *diviseur* de  $\text{Spec}(C_n)$ .

**3.1.3. Reformulation géométrique.** Soit  $X$  un schéma local noëthérien complet de caractéristique mixte, de dimension  $d \geq 2$  et soit  $\{Z_i\}_{i \in I}$  une famille finie de fermés de  $X$ . Pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$ , il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & X' \xrightarrow{\alpha} Y \\ & & \downarrow f \\ & & S \end{array}$$

où :

- $S$  est un schéma noëthérien régulier complet de caractéristique mixte et de dimension  $d - 1$  ;
- $X'$  est un schéma local normal ;
- $\pi$  est un morphisme fini de degré générique premier à  $\ell$  ;
- $f$  est un morphisme de type fini ;
- $\alpha$  induit un isomorphisme entre  $X'$  et le complété de  $Y$  en un point fermé de la fibre spéciale de  $f$ ,

et des fermés  $F_i$  de  $Y$  tels que  $\pi^{-1}(Z_i) = \alpha^{-1}(F_i)$  pour tout  $i \in I$ .

**REMARQUE 3.1.4.** Il découle de 2.1.2 que le résultat précédent est également vrai en égale caractéristique, et que l'on peut alors supposer  $X = X'$ .

#### 3.2. Démonstration.



**3.2.1.** Soient  $X = \text{Spec}(A)$  de dimension  $d \geq 2$  et  $\ell$  comme dans l'énoncé. D'après le théorème IV-4.3.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] = B_0 & \longrightarrow & B & \longleftarrow & A' = \text{Fix}_H(B) \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ & & A & & \end{array}$$

où  $V$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_V$ , et  $H$  est un  $\ell$ -groupe agissant sur l'anneau normal  $B$ , son sous-anneau  $V$ , et trivialement sur les variables  $t_i$  ( $1 \leq i \leq d-1$ ). De plus,  $A \rightarrow A'$  est une injection finie de rang générique premier à  $\ell$  et  $\pi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B_0)$  est fini,  $p$ -génériquement étale.

**3.2.2.** Nous allons montrer que toute famille finie d'idéaux de  $A'$  est partiellement algébrisable. Soit  $I'_1, \dots, I'_n$  une telle famille, que l'on peut supposer constituée d'idéaux primaires (cf. §2).

**3.2.3.** Soit  $I'$  l'un des  $I_i$ . Deux cas se présentent.

- (i)  $\dim(A'/I + \mathfrak{p}) = d - 1$ . Supposons  $I' \neq (0)$  et notons  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier, nécessairement de hauteur un, pour lequel  $I'$  est primaire. Par hypothèse, l'idéal premier  $\mathfrak{p}$  contient  $\mathfrak{p}$ ; c'est un idéal premier minimal de  $A'/\mathfrak{p}$ . D'autre part,  $A'$  est normal car  $B$  l'est. Il résulte par exemple de [Serre, 1965], chap. III, C, §1 que  $I'$  est une *puissance symbolique* de  $\mathfrak{p}$ , c'est-à-dire l'image inverse dans  $A'$  d'une puissance de l'idéal (principal)  $\mathfrak{p}A'_\mathfrak{p}$ .
- (ii)  $\dim(A'/(I + \mathfrak{p})) < d - 1$ . L'image de  $V(I)$  dans  $\text{Spec}(V^H[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$  est donc contenu dans un fermé  $V(g_{I'})$  où  $g_{I'} \in V^H[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$  est *non nulle modulo*  $\mathfrak{m}_{V^H}$ .

Soient  $g = \prod_{I'_i} g_{I'_i}$  où  $I'_i \in \{I'_1, \dots, I'_n\}$  parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et  $f \in V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] - \mathfrak{m}_V$  telle que le lieu de ramification de  $\pi$  soit contenu dans  $V(f)$ . Posons  $h = gf$ . D'après le théorème de préparation (1.1.1) et l'observation lui faisant immédiatement suite, on peut supposer que  $h$  est un polynôme de Weierstraß en  $t_{d-1}$ ,  $H$ -équivariant. (Rappelons que  $H$  agit trivialement sur les variables). Comme en §2, le morphisme  $B_0 \rightarrow B$  se descend donc d'après 1.2.4 en un morphisme  $\widetilde{B}_0 \rightarrow \widetilde{B}$ , où  $\widetilde{B}_0 = V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$ . Le groupe  $H$  préservant l'ouvert  $D(f)$  de  $\text{Spec}(B_0)$ , son action se descend. Le diagramme ci-dessus se complète donc en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\} = \widetilde{B}_0 & \longrightarrow & \widetilde{B} & \longleftarrow & \widetilde{A}' = \widetilde{B}^H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_0 & \longrightarrow & B & \longleftarrow & A' \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de complétion et les flèches horizontales sont finies.

**3.2.4.** Les idéaux  $I'$  du second type se descendent de  $A'$  à  $\widetilde{A}'$  car  $A'/I'$  est fini sur  $V^H[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$  donc *a fortiori* sur  $\widetilde{A}'$  (cf. 2.2.6). Quant aux idéaux du premier type (puissances symboliques), il suffit d'appliquer le lemme 2.2.4 à la paire constituée de  $\widetilde{A}'/\mathfrak{p}$  et de son complété  $A'/\mathfrak{p}$ . Comme en §2, on utilise le fait que

$\widetilde{A}'$  soit fini — de type fini suffirait — sur  $V^H[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-2}\}$  pour descendre, par passage à la limite, les idéaux à un anneau de type fini sur  $V^H[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$ .

## EXPOSÉ VI

### Log régularité, actions très modérées

Luc Illusie

#### 1. Log régularité

**1.1.** Pour le langage des log schémas nous renvoyons le lecteur à [Kato, 1988], [Nizioł, 2006], [Gabber & Ramero, 2009]. Sauf mention du contraire, les log structures considérées le seront au sens de la topologie étale. Un log schéma *fin* (resp. *fs*, i. e. *fin et saturé*) [Kato, 1988] est un schéma muni d'une log structure admettant localement (pour la topologie étale) une carte sur un monoïde fin (resp. fin et saturé). On note en général  $M_X$  le faisceau de monoïdes d'un log schéma  $X$ ,  $\alpha : M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  le morphisme structural, et  $\overline{M}_X = M_X/\mathcal{O}_X^*$ . Sauf mention du contraire, les log schémas considérés sont supposés localement noethériens.

Dans ce qui suit,  $X$  désigne un fs log schéma.

**1.2.** Soient  $\overline{x}$  un point géométrique de  $X$ , d'image  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$  le localisé strict de  $X$  en  $\overline{x}$ . Notons  $I_{\overline{x}}$  l'idéal de  $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$  engendré par  $\alpha(M_{X,\overline{x}} - \mathcal{O}_{X,\overline{x}}^*)$ ,  $C_{X,\overline{x}}$  le sous-schéma fermé de  $X_{(\overline{x})} = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,\overline{x}}$  défini par  $I_{\overline{x}}$ .  $C_{X,\overline{x}}$  est la trace sur  $X_{(\overline{x})}$  de la strate de  $X$  où le rang de  $\overline{M}^{\text{gp}}$  est égal à  $r(x) = \text{rg}(\overline{M}_{X,\overline{x}}^{\text{gp}})$ .

On dit que  $X$  est *log régulier* en  $x$  (ou  $\overline{x}$ ) si  $C_{X,\overline{x}}$  est régulier et de codimension égale à  $r(x)$  (cette condition ne dépend que de  $x$ ). On dit que  $X$  est *log régulier* si  $X$  est log régulier en tout point. La définition analogue pour les log schémas zariski est due à Kato [Kato, 1994]. La variante dans le cadre étale a été traitée par Nizioł [Nizioł, 2006]. Nous rappelons ci-après quelques propriétés de cette notion.

**1.3.**  $X$  est log régulier en  $x$  si et seulement si  $X$ , muni de la log structure Zariski  $M_X^{\text{Zar}} := \varepsilon_* M_X$ , où  $\varepsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ , est log régulier en  $x$  au sens de Kato [Kato, 1994], ([Tsuji, 1997, 4.6], [Nizioł, 2006, 2.4]). En particulier, si  $X$  est log régulier en  $x$ ,  $X$  est log régulier en toute généralisation  $y$  de  $x$  ([Kato, 1994, 7.1]).

Si la log structure de  $X$  est triviale,  $X$  est log régulier si et seulement si  $X$  est régulier au sens usuel.

**1.4.** Supposons  $X$  log régulier. Soit  $j : U \hookrightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert de trivialité de sa log structure. Alors  $U$  est un ouvert dense de  $X$  et on a

$$M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^*$$

([Nizioł, 2006, 2.6]).

Nous dirons qu'un couple  $(X, Z)$  formé d'un schéma  $X$  et d'un fermé  $Z$  est un couple *log régulier* si, pour la log structure sur  $X$  définie par  $M_X = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^*$ , où  $j : U \hookrightarrow X$  est l'ouvert complémentaire de  $Z$ ,  $X$  est log régulier et  $Z$  est le complément de l'ouvert de trivialité de sa log structure. La log structure précédente sur  $X$  sera dite *associée* au couple  $(X, Z)$ .

**1.5.** Supposons  $X$  log régulier. Pour  $i \in \mathbf{N}$ , soit  $X^{(i)}$  l'ensemble des points  $x$  de  $X$  tels que  $r(x) = i$ , avec la notation de 1.2. C'est une partie localement fermée, sous-jacente à un sous-schéma régulier de  $X$ , de codimension  $i$ , dont la trace sur  $X_{(\bar{x})}$ , en chaque point géométrique  $\bar{x}$  localisé en  $x \in X^{(i)}$ , est  $C_{X,\bar{x}}$ . On dit que  $X^{(i)}$  est la *strate de codimension  $i$*  définie par le rang de  $\overline{M}^{\text{gp}}$ . La stratification par les  $X^{(i)}$  est appelée *stratification par le rang de  $\overline{M}^{\text{gp}}$* , ou *stratification canonique*. Voici deux exemples.

(i) Si  $X$  est un schéma noethérien régulier, muni de la log structure définie par un diviseur à croisements normaux  $D$ ,  $X^{(i)}$  est l'ensemble des points où passent exactement  $i$  branches de  $D$ , i. e. tels que le normalisé de  $D$  ait  $i$  points au-dessus de  $x$ .

(ii) Si  $X$  est une variété torique sur un corps  $k$ , de tore  $T$ , munie de sa log structure canonique,  $X$  est un log schéma log régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est  $\overline{T}$ , et  $X^{(i)}$  est la réunion des orbites de  $T$  de codimension  $i$ .

**1.6.** Supposons  $X$  log régulier en  $x$ , image du point géométrique  $\bar{x}$ , soient  $P = \overline{M}_{X,\bar{x}}$ ,  $k = k(\bar{x})$ . Notons que  $P$  est un monoïde fs *saillant* (i. e. tel que  $P^* = 0$ ). Soit  $\widehat{X}_{\bar{x}}$  le complété de  $X_{(\bar{x})}$  au point fermé. Alors, d'après [Kato, 1994, 3.2],  $X$  admet une carte modelée sur  $P$  en  $\bar{x}$ , qui donne lieu à des isomorphismes

$$(i) \quad \widehat{X}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } k[[P]][[t_1, \dots, t_n]]$$

si  $\mathcal{O}_{X,x}$  est d'égale caractéristique,

$$(ii) \quad \widehat{X}_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } C(k)[[P]][[t_1, \dots, t_n]]/(f)$$

si  $\mathcal{O}_{X,x}$  est d'inégale caractéristique  $(0, p)$ , où  $C(k)$  est un anneau de Cohen pour  $k$ , et  $f$  est congru à  $p$  modulo l'idéal engendré par  $P - \{0\}$  et les  $t_i$ .

**1.7.** Supposons  $X$  log régulier. Alors  $X$  est régulier en  $x$ , image de  $\bar{x}$ , si et seulement si  $\overline{M}_{\bar{x}} \simeq \mathbf{N}^r$  ([Nizioł, 2006, 5.2], voir aussi [Vidal, 2001b, 1.8]). Il en résulte que l'ensemble des points de régularité de  $X$  coïncide avec l'ensemble des points de régularité du monoïde  $\overline{M}_{\bar{x}}$ , et en particulier est ouvert dans  $X$  ([Nizioł, 2006, 5.3]). Si  $X$  est log régulier et régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est alors le complément d'un diviseur à croisements normaux.

**1.8.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de log schémas fs. Si  $Y$  est log régulier et  $f$  log lisse,  $X$  est log régulier.

L'analogie pour les log structures Zariski est [Kato, 1994, 8.2]. La démonstration de (*loc. cit.*) s'applique, *mutatis mutandis*, dans le cadre étale.

Le corollaire suivant jouera un rôle clé dans l'application des résultats de de Jong à la démonstration du théorème d'uniformisation de Gabber. Rappelons que, si  $S$  est un schéma, une *courbe nodale*  $f : C \rightarrow S$  est un morphisme propre et plat, purement de dimension relative 1, dont les fibres géométriques ont pour seules singularités des croisements normaux.

**PROPOSITION 1.9.** *Soit  $(Y, T)$  un couple log régulier (1.4). Soit  $f : X \rightarrow Y$  une courbe nodale, lisse au-dessus de  $Y - T$ . Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ , de support contenu dans le lieu de lissité de  $f$ , et étale sur  $Y$ . Alors le couple  $(X, f^{-1}(T) \cup D)$  est log régulier, et pour les log structures associées,  $f$  est un morphisme de log schémas et est log lisse.*

La question est locale sur  $X$  et l'assertion est triviale sur l'ouvert de lissité de  $f$  et sur  $f^{-1}(Y - T)$ . Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de non lissité de  $f$ , d'image  $\bar{y}$  dans  $Y$ . D'après [SGA 7 XV 1.3.2] (voir aussi [de Jong, 1996, 2.23], on a

$$(1.a) \quad \mathcal{O}_{X, \bar{x}} \simeq \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}\{u, v\}/(uv - h),$$

où  $\mathcal{O}_{Y, \bar{y}}\{u, v\}$  désigne le localisé strict de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}[u, v]$  au point  $(u = v = 0)$  au-dessus du point fermé de  $Y(\bar{y})$ , et  $h$  est un élément de  $\mathcal{O}_{Y, \bar{y}}$  inversible sur  $Y - T$ , donc appartenant à  $M_{Y, \bar{y}}$  (1.4). Soit  $c$  une carte locale de  $Y$  en  $\bar{y}$  définie par une section de  $M_{Y, \bar{y}} \rightarrow P := \overline{M}_{Y, \bar{y}}$ . Écrivons  $h = \varepsilon a$ , avec  $\varepsilon \in \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^*$  et  $a \in P$ . Soit  $Q$  le monoïde fs défini par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & Q \\ \uparrow & & \uparrow g \\ \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times P \end{array},$$

où la flèche  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^2$  (resp.  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z} \times P$ ) est donnée par  $1 \mapsto (1, 1)$  (resp.  $1 \mapsto (1, a)$ ). Le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}\{u, v\}/(uv - h) & \xrightarrow{d} & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow & & \downarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[g] \\ \text{Spec } \mathcal{O}_{Y, \bar{y}} & \xrightarrow{c'} & \text{Spec } \mathbf{Z}[\mathbf{Z} \times P] \end{array}$$

où la flèche  $c'$  est donnée par  $c$  et  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}$ ,  $1 \mapsto \varepsilon$ , et  $d$  par  $(1, 0) \mapsto u$ ,  $(0, 1) \mapsto v$  sur  $\mathbf{N}^2$  et  $c'$  sur  $\mathbf{Z} \times P$ , est cartésien. Comme  $c'$  est une carte de  $Y$  en  $\bar{y}$ ,  $d$  est une carte en  $\bar{x}$  de  $X$  muni de la log structure image inverse par  $f$ , i. e. définie par  $\mathcal{O}_X \cap \mathcal{O}_{f^{-1}(Y-T)}^*$ , et  $(c', d, g)$  est une carte de  $f$ . Comme  $g$  est injectif et  $\text{Cokerg}^{gp} \simeq \mathbf{Z}$ ,  $f$  est log lisse en  $\bar{x}$ , et le couple  $(X, f^{-1}(T) \cup D)$  est log régulier en  $\bar{x}$ .

## 2. Revêtements Kummer étales

Dans cette section et la suivante, nous aurons à considérer des action de groupes sur des schémas ou des log schémas : sauf mention du contraire, il s'agira d'actions à droite.

**2.1.** Rappelons quelques définitions (cf. [Illusie, 2002, 3], [Stix, 2002, 3.1], [Vidal, 2001a]). Un homomorphisme  $h : P \rightarrow Q$  de monoïdes intègres est dit *de Kummer* si  $h$  est injectif et, pour tout  $q \in Q$ , il existe  $n \geq 1$  et  $p \in P$  tel que  $nq = h(p)$ . On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de fs log schémas est *de Kummer* si, pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  d'image  $\bar{y} = f(\bar{x})$  dans  $Y$ , l'homomorphisme induit  $\overline{M}_{\bar{y}} \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$  est de Kummer. On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est *Kummer étale* si  $f$  est de Kummer et log étale. On dit que  $f$  est un *revêtement Kummer étale* si  $f$  est de Kummer étale et le morphisme de schémas sous-jacent est fini.

Le *site Kummer étale* d'un fs log schéma  $X$  est la catégorie des fs log schémas de Kummer étales au-dessus de  $X$  munie de la topologie définie par les familles surjectives de  $X$ -morphisms (lesquels sont automatiquement de Kummer étale). Pour  $X$  connexe, les revêtements Kummer étales de  $X$  forment une catégorie galoisienne, équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe profini, le *groupe fondamental logarithmique* de  $X$ ,  $\pi_1^{\text{log}}(X, x)$ , où  $x$  est un *point géométrique logarithmique* de  $X$ , cf. (loc. cit.).

**2.2.** Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de log schémas fs qui est déduit par changement de base par un morphisme strict  $g : Y \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  d'un morphisme  $\text{Spec } \mathbf{Z}[h] : \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ , où  $h : P \rightarrow Q$  est un homomorphisme de Kummer entre monoïdes fs tels que le conoyau de  $h^{\text{gp}}$  soit annulé par un entier  $n$  inversible sur  $Y$ , est un revêtement Kummer étale. On dit qu'un tel revêtement est un revêtement Kummer étale *standard*.

Un revêtement Kummer étale standard  $f : X \rightarrow Y$  comme ci-dessus est *galoisien* dans le sens suivant : le groupe diagonalisable (étale)  $G = \text{Hom}(Q^{\text{gp}}/P^{\text{gp}}, \mathbf{G}_{m,Y})$  opère sur  $X$  par automorphismes de  $Y$ -log schémas, et le morphisme canonique

$$X \times_Y G \rightarrow X \times_Y X, (x, g) \mapsto (x, xg),$$

où le produit au second membre est pris dans la catégorie des fs log schémas, est un isomorphisme (cf. [Illusie, 2002, 3.2]).

Tout morphisme de Kummer étale est, localement pour la topologie étale, isomorphe à un revêtement Kummer étale standard (cf. [Stix, 2002, 3.1.4]). Plus précisément, si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de Kummer étale surjectif, avec  $X$  (resp.  $Y$ ) strictement local de point fermé  $x$  (resp.  $y$ ), on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[h] \\ Y & \xrightarrow{b} & \text{Spec } \mathbf{Z}[P] \end{array},$$

où  $a$  (resp.  $b$ ) est une carte de  $X$  (resp.  $Y$ ), et  $h : P \rightarrow Q$  un morphisme de Kummer tel que  $\text{Coker} h^{\text{gp}}$  soit annulé par un entier  $n$  inversible sur  $Y$ . Alors  $f$  est un revêtement Kummer étale galoisien de groupe  $G = \text{Hom}(\text{Coker} h^{\text{gp}}, \mu_n(k(y)))$ .

**2.3.** Dans ce cas, l'action de  $G$  sur  $X$  peut se décrire de la manière suivante. Soit  $C = \text{Coker} h^{\text{gp}}$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow P^{\text{gp}} \rightarrow Q^{\text{gp}} \rightarrow C \rightarrow 0$$

donne, par application du dual de Cartier  $\text{Hom}(-, \mathbf{G}_m)$ , une suite exacte de groupes diagonalisables

$$0 \rightarrow \Gamma \rightarrow T_Q \rightarrow T_P \rightarrow 0,$$

où  $T_P$  (resp.  $T_Q$ ) est le tore sur  $\mathbf{Z}$  dual de  $P$  (resp.  $Q$ ), et  $\Gamma$  est la valeur du groupe fini constant  $\Gamma_Y$ . Posons  $Z_P = \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ ,  $Z_Q = \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$ . L'accouplement canonique

$$T_P \otimes P^{\text{gp}} \rightarrow \mathbf{G}_m$$

définit une famille de caractères

$$(\chi_p : T_P \rightarrow \mathbf{G}_m)_{p \in P^{\text{gp}}},$$

qui détermine l'action de  $T_P$  sur  $Z_P$  par

$$g \cdot p = \chi_p(g)p,$$

pour un point  $g$  de  $T_P$  (à valeurs dans  $S$ ), et  $p \in P$ , vu comme un point de  $Z_P$  à valeurs dans  $S$ . L'action de  $T_Q$  sur  $Z_Q$  est décrite de façon similaire, et la carte  $a : X \rightarrow Z_Q$  est équivariante relativement aux actions de  $G$  et  $T_Q$  sur  $X$  et  $Z_Q$  respectivement : pour  $g \in G$  et  $q \in Q$ ,

$$(2.a) \quad g \cdot a^*(q) = \chi_q(g)a^*(q),$$

où  $\alpha^*(q) \in M_{X,x}$  est l'image de  $q$  par  $\alpha$ . En particulier,  $G$  opère *trivialement* sur  $\overline{M}_{X,x} = M_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^*$ .

Par ailleurs,  $P = Q \cap P^{\text{gp}}$ , donc

$$P = \{q \in Q; \chi_q(g) = 1 \forall g \in G\}.$$

Ainsi,  $Y$  est un quotient de  $X$  par  $G$ , en tant que log schéma, et en tant que schéma :

$$\mathcal{O}_Y = (f_*\mathcal{O}_X)^G; \quad M_Y = (f_*M_X)^G.$$

Supposons de plus  $Y$  log régulier, de sorte que  $X$  l'est également. Alors  $G$  opère librement au-dessus de l'ouvert (dense) de  $Y$  où la log structure est triviale, et fait de  $X$  un revêtement étale galoisien de  $Y$  de groupe  $G$ . De plus,  $G$  opère *trivialement* sur la strate  $C_{X,x}$  (1.5). Pour le voir, on peut remplacer  $X$  (resp.  $Y$ ) par son complété en  $x$  (resp.  $y$ ). On peut supposer de plus  $P$  saillant, i. e.  $P^* = \{0\}$  (et même  $P = \overline{M}_{Y,y}$ ). Alors  $Q$  est également saillant : on a  $Q = Q^* \oplus Q_1$  avec  $Q_1$  saillant, et  $Q^* \cap P = \{0\}$ , donc comme  $Y \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q_1]$  est local,  $Q^* = \{0\}$ . D'après 1.6, la carte  $(h, \alpha, b)$  de  $f$  permet d'identifier  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  à un homomorphisme de la forme

$$k[[t_1, \dots, t_r]][[P]] \rightarrow k[[t_1, \dots, t_r]][[Q]],$$

dans le cas d'égale caractéristique (resp.

$$C[[t_1, \dots, t_r]][[P]]/(u) \rightarrow C[[t_1, \dots, t_r]][[Q]]/(u)$$

dans le cas d'inégale caractéristique  $(p, 0)$ , où  $k = k(x) = k(y)$  (resp.  $C$  est un anneau de Cohen de  $k$ , et  $u$  est congru à  $p$  modulo l'idéal engendré par  $P - \{0\}$  et les  $t_i$ ), les  $t_i$  et  $u$  étant fixes par  $G$ . Les strates  $C_{X,x}$  et  $C_{Y,y}$  sont respectivement  $\text{Spec } B$  et  $\text{Spec } A$ , où  $A$  et  $B$  sont les réductions de  $\mathcal{O}_{Y,y}$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$  modulo les idéaux engendrés par  $P - \{0\}$  et  $Q - \{0\}$ . Comme  $G$  opère par 2.a sur  $Q$ ,  $G$  opère donc trivialement sur  $C_{X,x}$ , et  $f : X \rightarrow Y$  induit un isomorphisme  $C_{X,x} \xrightarrow{\sim} C_{Y,y}$ .

### 3. Actions très modérées

**3.1.** Soit  $X$  un log schéma fs, muni d'une action d'un groupe fini  $G$ . On se propose de dégager des conditions suffisantes sur l'action de  $G$  pour que, lorsque  $X$  est log régulier, le quotient de  $X$  par  $G$  existe comme log schéma et soit log régulier.

On dit que  $G$  opère *modérément* sur  $X$  en un point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  localisé en  $x$ , si le stabilisateur  $G_{\bar{x}}$  de  $\bar{x}$  (*groupe d'inertie en  $x$* ) est d'ordre premier à la caractéristique de  $k(x)$ . On dit que  $G$  opère modérément sur  $X$  si  $G$  opère modérément en  $\bar{x}$  pour tout  $\bar{x}$ . Ces définitions ne font pas intervenir la log structure de  $X$ .

La définition et les résultats qui suivent sont dues à Gabber. On dit que  $G$  opère *très modérément* sur  $X$  en  $\bar{x}$  si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $G$  opère modérément en  $\bar{x}$ ;
- (ii)  $G$  opère trivialement sur  $\overline{M}_{X,\bar{x}}$ ;
- (iii)  $G_{\bar{x}}$  opère trivialement sur la strate  $C_{X,\bar{x}}$  (1.2).

On dit que  $G$  opère *très modérément* sur  $X$  si  $G$  opère très modérément sur  $X$  en tout point géométrique.

Le résultat principal est le suivant :

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $X$  un log schéma fs log régulier, muni d'une action d'un groupe fini  $G$ . On suppose que  $G$  opère de façon admissible sur le schéma sous-jacent à  $X$ , librement sur un ouvert dense, et très modérément. Alors le quotient  $Y = X/G$  existe comme*

log schéma, est un log schéma fs log régulier, et la projection  $f : X \rightarrow Y$  est un revêtement Kummer étale de groupe  $G$ .

Rappelons ([SGA 1 V 1]) que dire que  $G$  opère de façon admissible signifie que  $X$  est réunion d'ouverts affines stables par  $G$ , de sorte que le quotient  $X/G$  est un schéma.

Compte tenu de 2.2, on en déduit :

**COROLLAIRE 3.3.** *Sous les hypothèses de 3.2, pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  localisé en  $x$ , d'image  $\bar{y}$  dans  $Y$ , le groupe d'inertie  $H = G_{\bar{x}}$  en  $x$  est abélien, d'ordre premier à la caractéristique de  $k(x)$ . Le localisé strict  $X_{(\bar{x})}$  est un revêtement Kummer étale du localisé strict  $Y_{(\bar{y})}$  de groupe  $H$ , et le revêtement Kummer étale  $Y_{(\bar{y})} \times_Y X$  induit sur  $Y_{(\bar{y})}$  s'en déduit par extension du groupe  $H$  à  $G$ .*

**3.4.** Nous démontrerons un résultat plus précis que 3.2, pour lequel nous aurons besoin de la notion suivante. Soient  $n$  un entier  $\geq 1$ ,  $G$  un groupe fini, et  $Q$  un monoïde fs. Supposons donné un homomorphisme

$$\chi : G^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n := \mu_n(\mathbf{C}), \quad g \otimes q \mapsto \chi_q(g).$$

Soit  $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$ . On déduit de  $\chi$  une action de  $G$  sur le log schéma  $\text{Spec } \Lambda[Q]$ , caractérisée par

$$g \cdot q = \chi_q(g)q$$

pour  $g \in G, q \in Q$ .

Soit  $X$  un log schéma fs muni d'une action de  $G$ . Par une carte  $G$ -équivariante de  $X$  modelée sur  $\chi$  et  $Q$ , on entend un morphisme strict,  $G$ -équivariant

$$c : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q].$$

**PROPOSITION 3.5.** *Soit  $X$  un fs-log schéma, muni d'une action d'un groupe fini  $G$ , et soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$  localisé en  $x$ . On note  $H = G_{\bar{x}}$  le groupe d'inertie en  $x$ .*

(a) *On suppose que les conditions (i) et (ii) de 3.1 sont vérifiées en  $\bar{x}$ . Soit  $n$  l'exposant de  $|H|$ . Il existe, localement pour la topologie étale au voisinage de  $\bar{x}$ , une carte  $H$ -équivariante de  $X$  modelée sur  $Q = \overline{M}_{\bar{x}}$  et un homomorphisme  $\chi : H^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu_n$ .*

(b) *On suppose de plus que  $G$  agit très modérément en  $\bar{x}$ , i. e. que  $H$  agit trivialement sur la strate  $C_{\bar{x}}(X)$ . Alors, localement pour la topologie étale au voisinage de  $\bar{x}$  et de son image  $\bar{y}$  dans  $Y$ , le quotient  $Y = X/H$  existe comme log schéma, et  $X$  est un  $Y$ -sous log schéma fermé strict d'un revêtement Kummer étale standard de  $Y$ .*

(c) *Si, sous les hypothèses de (ii),  $X$  est supposé en outre log régulier, alors  $Y_{(\bar{y})}$  est log régulier, et  $X_{(\bar{x})}$  est un revêtement Kummer étale standard de  $Y_{(\bar{y})}$  de groupe  $H$ .*

Sous les hypothèses de 3.2, le log schéma de schéma sous-jacent  $Y = X/G$ , muni de la log structure  $M_Y = (f_* M_X)^G$  est log régulier, et s'identifie, par localisation stricte en  $\bar{y}$  au quotient  $Y_{(\bar{y})} = X_{(\bar{x})}/H$ . Le fait que  $G$  opère génériquement librement implique la dernière assertion de 3.3, et 3.2 s'en déduit.

Par ailleurs, compte tenu de la description locale 2.3 des revêtements Kummer étales standard, 3.5 implique :

**COROLLAIRE 3.6.** *Sous les hypothèses de 3.5, si  $X$  est log régulier et si  $G$  agit très modérément en  $\bar{x}$ , alors  $G$  agit très modérément sur  $X$  dans un voisinage étale de  $\bar{x}$ .*



**3.7. Preuve de 3.5**

(a) Considérons la suite exacte de groupes abéliens

$$(3.a) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^* \rightarrow M_{X, \bar{x}}^{gp} \rightarrow \overline{M}_{X, \bar{x}}^{gp} \rightarrow 0.$$

Elle est H-équivariante, et si  $Q = \overline{M}_{\bar{x}}$ ,  $Q^{gp}$  est de type fini sans torsion. Choisissons un scindage  $s : Q^{gp} \rightarrow M_{X, \bar{x}}^{gp}$  de 3.a (comme suite exacte de groupes abéliens). Comme H agit trivialement sur  $Q^{gp}$ , on a, pour  $a \in Q^{gp}$  et  $g \in H$

$$g.s(a) = z(g, a)s(a)$$

avec  $z(g, a) \in \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*$ . Pour  $g_1, g_2$  dans H, on a

$$z(g_1 g_2, a) = (g_1 z(g_2, a)).z(g_2, a),$$

en d'autres termes,  $g \mapsto (a \mapsto z(g, a))$  est un 1-cocycle

$$z \in Z^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)).$$

L'image  $[z]$  de  $z$  dans  $H^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*))$  est la classe de cohomologie de 3.a. Dans le carré commutatif de flèches canoniques

$$\begin{array}{ccc} Z^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)) & \longrightarrow & Z^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, k(\bar{x})^*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^*)) & \longrightarrow & H^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, k(\bar{x})^*)) \end{array}$$

la flèche verticale de droite est (trivialement) un isomorphisme. Comme  $n$  est premier à la caractéristique de  $k(\bar{x})$ ,  $z$  est l'unique relèvement de son image  $\chi$  dans  $Z^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, k(\bar{x})^*))$ , et la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme, puisque  $(1 + \mathfrak{m}_{X, \bar{x}})^*$  est  $n$ -divisible. Identifiant  $Z^1(H, \text{Hom}(Q^{gp}, k(\bar{x})^*))$  à  $\text{Hom}(H, \text{Hom}(Q^{gp}, k(\bar{x})^*))$ , on trouve ainsi un homomorphisme

$$\chi : H^{ab} \otimes Q^{gp} \rightarrow \mu_n,$$

et la restriction de  $s$  à  $Q$  est, au voisinage de  $\bar{x}$ , une carte H-équivariante  $\alpha$  de  $X$  modelée sur  $Q$  et  $\chi$ .

(b) On peut remplacer  $X$  par son localisé strict  $X_{(\bar{x})}$  et  $G$  par  $H$ . Le quotient  $Y = X/G$  existe alors comme schéma, est strictement local, de point fermé  $\bar{y}$ , avec  $k(\bar{y}) = k(\bar{x})$ , et  $X \rightarrow Y$  est fini. Soit  $P'$  le sous-groupe de  $Q^{gp}$  défini par

$$P' = \{q \in Q^{gp} \mid \chi_q(g) = 1 \quad \forall g \in G\}.$$

Il est d'indice fini, premier à la caractéristique de  $k(\bar{x})$ . Soit

$$P = P' \cap Q.$$

La carte équivariante  $\alpha : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$  de (a) (où  $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$ ) définit, par passage au quotient, un morphisme  $b : Y \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$ . Ce morphisme  $b$  définit une log structure sur  $Y$  pour laquelle  $(f_* M_X)^G = M_Y$  ( $f : X \rightarrow Y$  désignant la projection), et une carte de  $f$

$$(3.b) \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[Q] \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[P] \end{array}$$

modélée sur l'homomorphisme de Kummer  $P \subset Q$ . Comme  $G$  agit trivialement sur la strate  $C_{\bar{x}}(X) = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}}$ , et que  $G$  est d'ordre premier à la caractéristique de  $k(\bar{x})$ , l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{Y,\bar{y}} (= \mathcal{O}_{X,\bar{x}}^G) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}} (= (\mathcal{O}_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}})^G)$$

est surjectif, donc il en est de même de l'homomorphisme

$$k(\bar{y})[Q] = k(\bar{x})[Q] \rightarrow \mathcal{O}_{X,\bar{x}}/\mathfrak{m}_{Y,\bar{y}}\mathcal{O}_{X,\bar{x}}.$$

Par Nakayama, il en résulte que le morphisme

$$(3.c) \quad i : X \rightarrow Y \times_{\text{Spec } \Lambda[\mathbb{P}]} \text{Spec } \Lambda[Q]$$

déduit de 3.b est une immersion fermée stricte.

(c) Dans ce cas, la strate  $C_{\bar{x}}(X)$  est régulière, et se projette isomorphiquement sur  $C_{\bar{y}}(Y)$ . Comme  $\text{rg}(\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}) = \text{rg}(\overline{M}_{\bar{y}}^{\text{gp}}) = \text{codim}(C_{\bar{y}}(Y), Y_{(\bar{y})})$ ,  $Y$  est log régulier en  $\bar{y}$ , et l'immersion  $i$  est un isomorphisme, de sorte que  $X_{(\bar{x})}$  est un revêtement Kummer étale de  $Y_{(\bar{y})}$  de groupe  $H$ .

#### 4. Points fixes

**4.1.** Soit  $X$  un schéma noethérien séparé sur lequel opère un groupe fini  $G$ . Pour chaque sous-groupe  $H$  de  $G$ , on note  $X^H$  le schéma des points fixes de  $H$ . C'est un sous-schéma fermé de  $X$ , représentant le foncteur  $S \mapsto X(S)^H$ , intersection des graphes des translations  $h : X \rightarrow X$  pour  $h \in H$ . En chaque point géométrique  $\bar{x}$  de  $X^H$  d'image  $x$ , le sous-groupe d'inertie  $G_{\bar{x}}$  de  $G$  contient  $H$ , et est égal à  $H$  si et seulement si  $x$  appartient au sous-schéma (localement fermé)

$$X_H = X^H - \bigcup_{H' \supset H, H' \neq H} X^{H'}.$$

Pour  $g \in G$ , on a

$$gX^H = X^{gHg^{-1}},$$

et de même

$$gX_h = X_{gHg^{-1}}$$

de sorte que la réunion  $X^C$  (resp.  $X_C$ ) des  $X^H$  (resp.  $X_H$ ) pour  $H$  dans une classe de conjugaison  $C$  de sous-groupes de  $G$  est  $G$ -stable. Les  $X_C$ , pour  $C$  parcourant les classes de conjugaison de sous-groupes de  $G$ , forment une stratification de  $X$  par des sous- $G$ -schémas, avec la propriété que pour tout point géométrique  $\bar{x}$  localisé en  $X_C$ , le groupe d'inertie  $G_{\bar{x}}$  appartient à  $C$ . Nous appellerons cette stratification la *stratification par l'inertie*.

Le but de ce numéro est de donner des exemples d'actions très modérées de groupes finis  $G$  sur des log schéma log réguliers et réguliers  $X$ , où un raffinement de la stratification par l'inertie est déduite de la stratification canonique d'un diviseur à croisements normaux  $G$ -stable.

Le résultat suivant est classique, nous en donnons une démonstration, faute de référence.

**PROPOSITION 4.2.** *Soit  $X$  un schéma noethérien régulier sur lequel opère un groupe fini  $G$  de façon modérée 3.1. Alors le schéma des points fixes  $X^G$  est régulier.*

On peut supposer  $X$  local,  $X = \text{Spec } A$ , de sorte que  $X^G = \text{Spec } A_G$ , où  $A_G$  est l'algèbre des co-invariants  $A/I$ ,  $I$  l'idéal engendré par les  $ga - a$ , pour  $g$  dans  $G$  et  $a$  dans l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . On peut supposer de plus que  $G$  est contenu dans le groupe d'inertie au point fermé, sinon  $X^G$  est vide. Comme  $\widehat{X}^G = \text{Spec } \widehat{A}/I\widehat{A} =$

$(\hat{X})^G$ , on peut supposer  $X$  local et complet. On démontre le lemme en *linéarisant* l'action de  $G$ .

Supposons d'abord que  $G$  soit d'égale caractéristique  $p$ . Choisissons une base  $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$  de l'espace cotangent  $T = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  et des éléments  $x_i$  dans  $\mathfrak{m}$  relevant les  $t_i$ . Choisissons un corps de représentants, noté encore  $k$ , de  $k$  dans  $A$ , et notons

$$\varphi : k[[T]] \rightarrow A$$

l'homomorphisme envoyant  $t_i$  sur  $x_i$ . L'homomorphisme

$$f : k[[T]] \rightarrow A$$

envoyant  $t$  sur le système

$$y = (1/\text{card}(G)) \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1}t$$

est  $G$ -équivariant. En outre,  $y$  est congru à  $x$  modulo  $\mathfrak{m}^2$ , donc est un système régulier de paramètres de  $A$ , et donc  $f$  est un isomorphisme. Par suite  $f$  induit un isomorphisme

$$k[[T]]_G = k[[T_G]] \rightarrow A_G,$$

où  $T_G$  est l'espace des co-invariants de  $G$  sur  $T$ , ce qui démontre le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que  $A$  soit de caractéristique mixte  $(0, p)$ . Soit  $C$  un anneau de Cohen pour  $k$ . Choisissons un homomorphisme  $C \rightarrow A$  relevant  $C \rightarrow k$ . Comme  $G$  est d'ordre premier à  $p$ , il existe un unique  $C[G]$ -module  $V$ , libre de type fini sur  $C$ , relevant  $T$ . Soit  $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$  une base de  $T$ ,  $v = (v_i)$  une base de  $V$  relevant  $t$ . Comme plus haut, choisissons des relèvements  $x_i$  dans  $\mathfrak{m}$  des  $t_i$ , qui forment donc une suite régulière de paramètres dans  $A$ . Prolongeons l'homomorphisme  $C \rightarrow A$  en

$$\varphi : C[[V]] \rightarrow A$$

en envoyant  $v_i$  sur  $x_i$ . L'homomorphisme

$$f : C[[V]] \rightarrow A$$

envoyant  $v = (v_i)$  sur

$$y = (1/\text{card}(G)) \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1}v$$

est  $G$ -équivariant, et  $y$  est congru à  $x$  modulo  $\mathfrak{m}^2$ , donc est un système régulier de paramètres de  $A$ . L'homomorphisme  $f$  est donc surjectif, et son noyau est défini par un élément  $F$  congru à  $p$  modulo l'idéal engendré par les  $v_i$ . Ainsi  $X$  est un diviseur régulier  $G$ -équivariant dans  $X' = \text{Spec } C[[V]]$ , d'équation  $F = 0$ . L'image de  $F$  dans  $C[[V_G]]$  est un paramètre régulier, donc, comme  $X'^G = \text{Spec } C[[V_G]]$ ,  $X^G = X \times_{X'} X'^G$  est régulier.

**COROLLAIRE 4.3.** *Soit  $X$  un schéma noethérien séparé, régulier, muni d'une action modérée d'un groupe fini  $G$ . Alors la stratification de  $X$  par l'inertie est formée de schémas réguliers.*

**4.4.** Sous les hypothèses de **4.3**, soit  $Y$  un diviseur à croisements normaux stricts  $G$ -stable, réunion de composantes irréductibles  $Y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . On munit  $X$  de la log structure définie par  $Y$ . Rappelons (cf. [de Jong, 1996, 7.1]) qu'on dit que  $Y$  est  $G$ -strict si la condition suivante est réalisée : pour tout  $i$  et pour tout  $g \in G$ , si  $gY_i \cap Y_i \neq \emptyset$ , alors  $gY_i = Y_i$ . Si  $Y$  est  $G$ -strict, alors la condition (ii) de **3.1** est vérifiée en chaque point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ . En effet, si  $(D_i)_{1 \leq i \leq r}$  est l'ensemble des branches de  $Y$  passant par  $\bar{x}$ , alors  $gD_i = D_i$  pour tout  $i$ . Comme  $\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{Z}e_i$ ,  $e_i$  correspondant à  $D_i$ , le groupe d'inertie  $G_{\bar{x}}$  opère trivialement sur  $\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}$ . Rappelons également ([de Jong, 1996, 7.2]) qu'il existe une modification  $G$ -équivariante canonique  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  telle que  $f^{-1}(Y)_{\text{red}}$  soit  $G$ -strict.

**COROLLAIRE 4.5.** *Supposons que  $Y$  soit  $G$ -strict, que  $G$  opère de façon modérée, admissible et génériquement libre, et que la stratification canonique de  $X$  soit plus fine que la stratification par l'inertie. Alors  $G$  opère très modérément sur  $X$  (et donc la conclusion de **3.2** s'applique). Le groupe d'inertie le long de la strate  $X^{(i)}$  (**1.5** (i)) est constant, de valeur  $G_i$ , avec  $\text{rg}(G_i) = \text{codim}(X^{(i)}, X)$ . En particulier,  $G$  opère librement sur la strate  $X^{(0)} = X - Y$ .*

**4.6. Exemples.**

(a) Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $n$  un entier  $\geq 2$  premier à la caractéristique résiduelle de  $k$ ,  $G$  le groupe  $\mu_n = \mu_n(k)$ . On fait opérer  $G$  sur  $X = \mathbf{A}_k^2$  par homothéties  $((\lambda, x) \mapsto \lambda x$  pour  $\lambda \in G, x \in X(k)$ ). La stratification par l'inertie comporte deux strates,  $X - \{0\}$ , où  $G$  opère librement, et  $X^G = \{0\}$ . La donnée de deux droites  $Y_1, Y_2$  telles que  $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$  définit un diviseur à croisements normaux  $G$ -strict  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , et le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de **4.5**. Le choix de paramètres  $t_1, t_2$  tels que  $Y_i = V(t_i)$  permet de définir une carte équivariante **3.4 c** :  $\text{Spec } \mathbf{Z}[\mathbf{N}^2] \leftarrow X, e_i \mapsto t_i$ , associée à l'homomorphisme  $\chi : G \otimes \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mu_n$  tel que  $\chi(\lambda \otimes e_i) = \lambda$ . Le quotient  $X/G$  est le schéma torique  $\text{Spec } k[x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n]$ .

Plus généralement, soient  $n$  un entier  $\geq 1$ ,  $G$  un groupe abélien d'ordre  $n$ ,  $S$  un schéma noethérien régulier au-dessus de  $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/n, \mu_n]$ ,  $E$  un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang fini, muni d'une action linéaire de  $G$ ,  $X$  le fibré vectoriel  $V(E)$ . Pour chaque caractère  $\chi : G \rightarrow \mu_n$ , notons  $L_\chi$  le  $G$ - $\mathcal{O}_S$ -module correspondant. L'homomorphisme canonique  $G$ -équivariant

$$\bigoplus_{\chi} L_\chi \otimes E_\chi \rightarrow E,$$

où  $E_\chi = \mathcal{H}om_G(L_\chi, E)$  et  $\chi$  parcourt le groupe des caractères de  $G$ , est un isomorphisme. Il définit une décomposition  $G$ -équivariante

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\chi} X_\chi,$$

où  $X_\chi = V(E_\chi)$ , muni de l'action de  $G$  à travers  $\chi$ . En particulier,  $X^G = X_1$ , où  $1 : G \rightarrow \mu_n$  est le caractère trivial. Supposons  $S$  local,  $S = \text{Spec } A$ . Pour chaque  $\chi \in \text{Hom}(G, \mu_n)$ , choisissons une base  $(t_i)_{i \in I_\chi}$  de  $\text{Hom}(E_\chi, A)$ , de sorte que  $X_\chi = \text{Spec } A[(t_i)_{i \in I_\chi}]$ , avec  $gt_i = \chi(g)t_i$  pour  $g \in G, i \in I_\chi$ . Le couple formé de  $X$  et du diviseur à croisements normaux (relatifs à  $S$ )  $Y = \sum_{\chi, i \in I_\chi} Y_i$ , où  $Y_i = (t_i = 0)$  pour  $i \in I_\chi$ , vérifie les conditions de **4.5** (et les vérifie d'ailleurs fibre à fibre).

(b) Soient  $k$  un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique  $p$ ,  $n$  un entier  $\geq 2$  tel que  $(2n, p) = 1$ ,  $G$  le groupe diédral  $D_n = \langle s, r : s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1} \rangle$ . Soit  $\zeta \in k$  une racine primitive  $n$ -ième de 1. Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$

la représentation de degré 2 induite du caractère  $\chi$  de  $\mu_n \subset G$  tel que  $\chi(r) = \zeta : \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\rho(r) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$ . Soit  $X$  le  $G$ -schéma  $V(E) = \text{Spec } k[u, v]$ ,  $s(u) = v, r(u) = \zeta u$ . Pour  $0 \leq i \leq n-1$ , notons  $Z_i \subset X$  la droite  $v = \zeta^i u$ , et  $Z = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Z_i$ . La stratification par l'inertie comporte  $n+2$  strates :  $X - Z$ , où  $G$  opère librement,  $Z_i - \{0\}$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), où le groupe d'inertie est d'ordre 2 (de générateur  $sr^i$ ), et  $\{0\} = X^G$ .

Pour  $n = 2$ ,  $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ ,  $Z$  est un diviseur à croisements normaux  $G$ -strict, et le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de 4.5. Pour  $n > 2$ ,  $Z$  n'est plus un diviseur à croisements normaux, et l'inertie en  $\{0\}$  n'est plus abélienne. Soient  $f : X' \rightarrow X$  l'éclaté de  $\{0\}$  dans  $X$ ,  $E = f^{-1}(0)$  le diviseur exceptionnel,  $Z' = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Z'_i$  le transformé strict de  $Z$ . Alors  $G$  opère de façon naturelle sur  $X'$ , la projection  $f$  est  $G$ -équivariante, et  $Y' = f^{-1}(Z) = E \cup Z'$  est un diviseur à croisements normaux  $G$ -strict. Le couple  $(X', Y')$  vérifie les conditions de 4.5. La stratification de  $X'$  par l'inertie se compose des strates  $Z'_i$ , où l'inertie est un groupe à deux éléments, et de  $X' - Z'$ , où  $G$  opère librement. La stratification canonique associée à  $Y'$  la raffine :  $X'^{(0)} = X' - Y'$ ,  $X'^{(1)} = Y' - \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (E \cap Z'_i)$ ,  $X'^{(2)} = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (E \cap Z'_i)$ .

**4.7.** La construction précédente, qui rend les inerties abéliennes, se généralise. Soit  $X$  un schéma noethérien régulier, séparé, muni d'une action modérée d'un groupe fini  $G$ , et soit  $Y$  un diviseur à croisements normaux  $G$ -strict. Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ ,  $X^H$  est régulier (et séparé), donc il en est de même de l'éclaté  $X' = \text{Écl}_{X^H}(X)$  de  $X$  le long de  $X^H$ . Le normalisateur  $N = N_G(H)$  de  $H$  dans  $G$  stabilise  $X^H$ , donc agit sur  $X'$ , et le morphisme  $f : X' \rightarrow X$  est équivariant relativement à  $N \rightarrow G$ . De plus,  $f^{-1}(X^H)$  est un diviseur régulier dans  $X'$ . Si  $D$  est une composante de  $Y$ , comme  $D$  est  $H$ -stable,  $D \times_X X^H = D^H$  est régulier, et le transformé strict  $\tilde{D} = \text{Écl}_{D^H}(D)$  est un diviseur régulier croisant  $f^{-1}(X^H)$  transversalement. Il s'ensuit que le transformé total réduit  $Y' = f^{-1}(Y)_{\text{red}}$  est un diviseur à croisements normaux  $N$ -strict dans  $X'$ .

**PROPOSITION 4.8.** *Sous les hypothèses de 4.7, soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$  en lequel le groupe d'inertie  $G_{\bar{x}}$  n'est pas abélien, et soit  $H$  le sous-groupe des commutateurs  $(G_{\bar{x}}, G_{\bar{x}})$ . Alors  $G_{\bar{x}} = N_{G_{\bar{x}}}(H)$  agit sur  $X' = \text{Écl}_{X^H}(X)$ , et en chaque point géométrique  $\bar{y}$  de  $X'$  au-dessus de  $\bar{x}$ , le groupe d'inertie  $(G_{\bar{x}})_{\bar{y}}$  est strictement plus petit que  $G_{\bar{x}}$ .*

En effet, le point  $\bar{y}$  correspond à une droite  $L$  dans la fibre en  $\bar{x}$  du fibré normal  $T_{\bar{x}}/T_{\bar{x}}^H$  de  $X^H$  dans  $X$ , où  $T_{\bar{x}} = T_{\bar{x}}(X)$ . Supposons que  $\bar{y}$  soit fixe sous  $G_{\bar{x}}$ . Alors  $G_{\bar{x}}$  agit sur  $L$  par un caractère, donc  $H$  agit trivialement sur  $L$ . Or  $(T_{\bar{x}}/T_{\bar{x}}^H)^H = 0$ , contradiction. (Noter que cet argument montre en particulier que, si  $H \neq \{1\}$ ,  $X^H$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $X$  en  $\bar{x}$ .)



## EXPOSÉ VII

### Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)

Fabrice Orgogozo

#### 1. Énoncé

L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème **II-4.3.1** (voir aussi **0-4**), dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous :

**THÉORÈME 1.1.** *Soient  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent et  $Z$  un fermé rare de  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout  $i \in I$  on ait :*

- (i) *le schéma  $X_i$  est régulier et connexe ;*
- (ii) *l'image inverse de  $Z$  dans  $X_i$  est le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.*

#### 2. Réductions : rappel des résultats antérieurs

**2.1. Réduction au cas local, normal de dimension finie.** Nous avons vu en **II-4.3.3** qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque le schéma  $X$  est local noëthérien normal hensélien excellent. Faisons cette hypothèse supplémentaire. Un tel schéma est nécessairement de dimension finie, que nous noterons ici  $d$ . De plus, on a vu en *loc. cit.* que si le théorème est établi pour chaque schéma local noëthérien hensélien excellent de dimension au plus  $d$ , il en est de même pour les schémas noëthériens quasi-excellents de dimension au plus  $d$ .

**2.2. Réduction au cas complet.** Il résulte de la proposition **III-6.2** qu'il suffit de démontrer le théorème pour le schéma local noëthérien complet  $\widehat{X}$ , ce dernier étant de même dimension que  $X$  et également normal.

**2.3. Récurrence.** Il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer le schéma  $X$  local noëthérien complet normal de dimension  $d$  et le théorème connu pour chaque schéma noëthérien quasi-excellent de dimension au plus  $d - 1$ . Lorsque  $d = 1$ , le théorème est bien connu ; nous supposons dorénavant  $d \geq 2$ .

#### 3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong

**3.1.** Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma local noëthérien complet normal comme en **2.3** et  $Z$  un fermé rare. Quitte à remplacer  $X$  (resp.  $Z$ ) par un  $X$ -schéma fini également local noëthérien normal excellent de dimension  $d$  (resp. par son image inverse), on peut supposer d'après **V-3.1.3**, qu'il existe un schéma local noëthérien régulier  $S$  de dimension  $d - 1$ , un  $S$ -schéma de type fini dominant  $X'$  intègre et affine, un point fermé  $x'$  de la fibre spéciale de  $f : X' \rightarrow S$ , et un fermé rare  $Z'$  de  $X'$  satisfaisant les conditions suivantes :

- le morphisme  $c$  induit un isomorphisme  $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X',x'}})$  ;
- l'image inverse  $c^{-1}(Z')$  de  $Z'$  coïncide avec  $Z$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & S \end{array}$$

**3.2.** Supposons l'existence d'une famille  $(X'_i \rightarrow X')$  couvrante pour la topologie des altérations (**II-2.3**) telle que chaque  $X'_i$  soit régulier et chaque image inverse  $Z'_i$  de  $Z'$  dans  $X'_i$  soit le support d'un diviseur à croisements normaux. Il résulte de **II-2.3.4** que la famille  $(X_i \rightarrow X)$  obtenue par changement de base (plat)  $X \rightarrow X'$  est également alt-couvrante. D'autre part, l'hypothèse d'excellence faite sur les schémas garantit que le morphisme de complétion  $c$  est *régulier* (**I-2.10**). La régularité d'un morphisme étant stable par changement de base localement de type fini ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.8.3]), et préservant la régularité des schémas ([ÉGA IV<sub>2</sub> 6.5.2 (ii)]) il en résulte que chaque  $X_i$  est régulier. De même, l'image inverse  $Z_i$  de  $Z'_i$  dans  $X_i$  — qui coïncide avec l'image inverse de  $Z$  dans  $X_i$  par le morphisme évident — est le support d'un diviseur à croisements normaux pour chaque indice  $i$ .

**3.3.** Quitte à remplacer  $X$  par  $X'$ , ce qui est licite d'après ce qui précède, nous pouvons supposer le schéma  $X$  intègre de dimension  $d$ , équipé d'un morphisme dominant de type fini  $f : X \rightarrow S$  où  $S$  est local noethérien régulier de dimension  $d-1$ . Quitte à compactifier  $f$ , on peut le supposer *propre*; quitte à éclater, on peut supposer que le fermé  $Z$  est un *diviseur*.

**3.4.** Nous sommes dans les conditions d'application du théorème [de Jong, 1997, 2.4], d'après lequel, quitte à altérer  $S$  et  $X$ , on peut supposer les faits suivants :

- le morphisme  $f$  est une courbe nodale ;
- le diviseur  $Z$  est contenu dans la réunion d'un diviseur  $D$  étale sur  $S$ , contenu dans le lieu lisse de  $f$ , et de l'image inverse  $f^{-1}(T)$  d'un fermé rare  $T$  de  $S$ .

## 4. Résolution des singularités

**4.1. Résolution des singularités de la base.** Les altérations précédentes conduisent à une situation où le schéma  $X$  n'est plus local (ni même affine) et le schéma  $S$  n'est plus nécessairement régulier. Il est cependant excellent de dimension  $d-1$  donc justiciable de l'hypothèse de récurrence **2.3**. Ainsi, on peut supposer que la paire  $(S, T)$  est régulière, c'est-à-dire que le schéma  $S$  est régulier et que  $T$  est un diviseur à croisements normaux. En effet, il en est ainsi localement pour la topologie des altérations.

**4.2.** D'après **VI-1.9**, la paire  $(X, D \cup f^{-1}(T))$  est log-régulière au sens de **VI-1.2**. Observons qu'un diviseur contenu dans un diviseur à croisements normaux est lui-même à croisements normaux. Ceci nous permet de supposer d'agrandir  $Z$  si nécessaire et auquel on applique alors le théorème suivant de Katô K. ([Kato, 1994, 10.3, 10.4]), complété par W. Nizioł ([Nizioł, 2006, 5.7]). (Voir aussi [Gabber & Ramero, 2009, §5.6] et **VIII-3.4**.)

**THÉORÈME 4.3.** *Soit  $(X, Z)$  une paire log-régulière, où  $X$  est un schéma noethérien. Il existe un schéma noethérien régulier  $Y$ , un diviseur à croisements normaux  $D \subset Y$*



*et un morphisme projectif birationnel  $\pi : Y \rightarrow X$  tel que l'image inverse  $\pi^{-1}(Z)$  soit contenue dans  $D$ .*



**Gabber's modification theorem (absolute case)**Luc Illusie and Michael Temkin <sup>i</sup>

In this exposé we state and prove Gabber's modification theorem mentioned in the introduction (see step (C)). Its main application is to Gabber's refined – i.e. prime to  $\ell$  – local uniformization theorem. This is treated in exposé IX. A relative variant of the modification theorem, also due to Gabber, has applications to prime to  $\ell$  refinements of theorems of de Jong on alterations of schemes of finite type over a field or a trait. This is discussed in exposé X. In §1, we state Gabber's modification theorem in its absolute form (Theorem 1.1). The proof of this theorem occupies §§4–5. A key ingredient is the existence of functorial (with respect to regular morphisms) resolutions in characteristic zero; the relevant material is collected in §2. We apply it in §3 to get resolutions of log regular log schemes, using the language of Kato's fans and Ogus's monoschemes. The main results, on which the proof of 1.1 is based, are Theorems 3.3.15 and 3.4.15. §§2 and 3 can be read independently of §§1, 4, 5.

We wish to thank Sophie Morel for sharing with us her notes on resolution of log regular log schemes and Gabber's magic box. They were quite useful.

**1. Statement of the main theorem**

**THEOREM 1.1** (Gabber). Let  $X$  be a noetherian, qc, separated, log regular fs log scheme (VI-1.2), endowed with an action of a finite group  $G$ . We assume that  $G$  acts tamely (VI-3.1) and generically freely on  $X$  (i.e. there exists a  $G$ -stable, dense open subset of  $X$  where the inertia groups  $G_{\bar{x}}$  are trivial). Let  $Z$  be the complement of the open subset of triviality of the log structure of  $X$ , and let  $T$  be the complement of the largest  $G$ -stable open subset of  $X$  over which  $G$  acts freely. Then there exists an fs log scheme  $X'$  and a  $G$ -equivariant morphism  $f = f_{(G,X,Z)}: X' \rightarrow X$  of log schemes having the following properties:

- (i) As a morphism of schemes,  $f$  is a projective modification, i.e.  $f$  is projective and induces an isomorphism of dense open subsets.
- (ii)  $X'$  is log regular and  $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$  is the complement of the open subset of triviality of the log structure of  $X'$ .
- (iii) The action of  $G$  on  $X'$  is very tame (VI-3.1).

When proving the theorem we will construct  $f_{(G,X,Z)}$  that satisfies a few more nice properties that will be listed in Theorem 5.6.1. We remark that Gabber also proves the theorem, more generally, when  $X$  is not assumed to be qc. However, the quasi-excellence assumption simplifies the proof so we impose it here. Most of the proof works for a general noetherian  $X$ , so we will assume that  $X$  is qc only when this will be needed in §5.

---

<sup>i</sup>The research of M.T. was partially supported by the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement 268182.

**1.2.** (a) Note that we do not demand that  $f$  is log smooth. In general, it is not. Here is an example. Let  $k$  be an algebraically closed field of characteristic  $\neq 2$ . Let  $G = \{\pm 1\}$  act on the affine plane  $X = \mathbf{A}_k^2$ , endowed with the trivial log structure, by  $x \mapsto \pm x$ . Then  $X$  is regular and log regular, and  $T = \{0\}$ . The action of  $G$  on  $X$  is tame, but not very tame, as  $G_{\{0\}}$  ( $= G$ ) does not act trivially on the (only) stratum  $X$  of the stratification by the rank of  $M^{\text{gp}}/\mathcal{O}^*$ . Let  $f: X' \rightarrow X$  be the blow up of  $T$ , with its natural action of  $G$ . Then the pair  $(X', Z' = f^{-1}(T))$  is log regular,  $f$  is a  $G$ -equivariant morphism of log schemes,  $X' - Z'$  is at the same time the open subset of triviality of the log structure and the largest  $G$ -stable open subset of  $X'$  where  $G$  acts freely, and  $G$  acts very tamely on  $X'$ . However,  $f$  is not log smooth (the fiber of  $f$  at  $\{0\}$  is the line  $Z'$  with the log structure associated to  $\mathbf{N} \rightarrow \mathcal{O}, 1 \mapsto 0$ , which is not log smooth over  $\text{Spec } k$  with the trivial log structure).

(b) In the above example, let  $D_1, D_2$  be distinct lines in  $X$  crossing at  $\{0\}$ , and put the log structure  $M(D)$  on  $X$  defined by the divisor with normal crossings  $D = D_1 \cup D_2$ . Then  $\tilde{X} = (X, M(D))$  is log smooth over  $\text{Spec } k$  endowed with the trivial log structure, and  $G$  acts very tamely on  $(X, M(D))$  (VI-4.5). Moreover, the modification  $f$  considered above underlies the log blow up  $\tilde{f}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$  of  $X$  at (the ideal in  $M(D)$ ) of  $\{0\}$ . While  $f$  depends only on  $X$ , the log étale morphism  $\tilde{f}$  is not canonical, as it depends on the choice of  $D$ . However, one can recover  $f$  from the *canonical* resolutions of toric singularities (discussed in the next section). Namely, as  $G$  acts very tamely on  $\tilde{X}$ , the quotient  $\tilde{Y} = \tilde{X}/G$  is log regular (VI-3.2):  $\tilde{Y} = \text{Spec } k[\mathbf{P}]$ , where  $\mathbf{P}$  is the submonoid of  $\mathbf{Z}^2$  generated by  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  and  $(0, 2)$ , and the projection  $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  is a Kummer étale cover of group  $G$ , in particular is a  $G$ -étale cover of  $V = p(U)$ , where  $U = X - D$ . Let  $g: \tilde{Y}' \rightarrow \tilde{Y}$  be the log blow up of  $\{0\} = p(\{0\})$  in  $\tilde{Y}$ . We then have a cartesian diagram of log schemes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \longrightarrow & \tilde{Y}' \\ \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & \tilde{Y} \end{array},$$

where the horizontal maps are Kummer étale covers of group  $G$ . Now, as a morphism of schemes,  $\tilde{Y}' \rightarrow \tilde{Y}$  is the *canonical resolution* of  $\tilde{Y}$ , and the underlying scheme  $X'$  of  $\tilde{X}'$  is the *normalization* of  $\tilde{Y}'$  in the  $G$ -étale cover  $p: U \rightarrow V$ . This observation, suitably generalized, plays a key role in the proof of 1.1.

## 2. Functorial resolutions

All schemes considered from now on will be assumed to be noetherian.

**2.1. Towers of blow ups.** In this section we review various known results on the following related topics: blow ups and their towers, various operations on towers, such as strict transforms and pushforwards, associated points of schemes and schematic closure.

**2.1.1. Blow ups.** We start with recalling basic properties of blow ups; a good reference is [Conrad, 2007, §1]. Let  $X$  be a scheme. By a *blow up* of  $X$  we mean a triple consisting of a morphism  $f: Y \rightarrow X$ , a closed subscheme  $V$  of  $X$  (the *center*), and an  $X$ -isomorphism  $\alpha: Y \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{I}^n)$ , where  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$  is the ideal of  $V$ . We will write  $Y = \text{Bl}_V(X)$ . When there is no risk of confusion we will omit  $V$  and  $\alpha$  from the notation. A blow up  $(f, V, \alpha)$  is said to be *empty* if  $V = \emptyset$ . In this

case,  $Y = X$  and  $f$  is the identity. The only  $X$ -automorphism of a blow up is the identity. Also, it is well known that  $Y$  is the universal  $X$ -scheme such that  $V \times_X Y$  is a Cartier divisor (i.e. the ideal  $\mathcal{I}_{\mathcal{O}_Y}$  is invertible).

**2.1.2. Total and strict transforms.** Given a blow up  $f: Y = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$ , there are two natural ways to pullback closed subschemes  $i: Z \hookrightarrow X$ . The *total transform* of  $Z$  under  $f$  is the scheme-theoretic preimage  $f^{\text{tot}}(Z) = Z \times_X Y$ . The *strict transform*  $f^{\text{st}}(Z)$  is defined as the schematic closure of  $f^{-1}(Z - V) \xrightarrow{\sim} Z - V$ .

**REMARK 2.1.3.** (i) The strict transform depends on the centers and not only on  $Z$  and the morphism  $Y \rightarrow X$ . For example, if  $D \hookrightarrow X$  is a Cartier divisor then the morphism  $\text{Bl}_D(X) \rightarrow X$  is an isomorphism but the strict transform of  $D$  is empty.

(ii) While  $f^{\text{tot}}(Z) \rightarrow Z$  is just a proper morphism, the morphism  $f^{\text{st}}(Z) \rightarrow Z$  can be provided with the blow up structure because  $f^{\text{st}}(Z) \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{V \times_X Z}(Z)$  (e.g., if  $Z \hookrightarrow V$  then  $f^{\text{st}}(Z) = \emptyset = \text{Bl}_Z(Z)$ ). Thus, the strict transform can be viewed as a genuine blow up pullback of  $f$  with respect to  $i$ .

**2.1.4. Towers of blow ups.** Next we introduce blow up towers and study various operations with them (see also [Temkin, 2011a, §2.2]). By a *tower of blow ups* of  $X$  we mean a finite sequence of length  $n \geq 0$

$$X_{\bullet} = ( X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_0} X_0 = X )$$

of blow ups. In particular, this data includes the centers  $V_i \hookrightarrow X_i$  for  $0 \leq i \leq n-1$ . Usually, we will denote the tower as  $X_{\bullet}$  or  $(X_{\bullet}, V_{\bullet})$ . Also, we will often use notation  $X_n \dashrightarrow X_0$  to denote a sequence of morphisms.

If  $n = 0$  then we say that the tower is *trivial*. Note that the morphism  $X_n \rightarrow X$  is projective, and it is a modification if and only if the centers  $V_i$  are nowhere dense. If  $X_{\bullet}$  is a tower of blow ups, we denote by  $(X_{\bullet})_c$  the *contracted* tower deduced from  $X_{\bullet}$  by omitting the empty blow ups.

**2.1.5. Strict transform of a tower.** Assume that  $\mathcal{X} = (X_{\bullet}, V_{\bullet})$  is a blow up tower of  $X$  and  $h: Y \rightarrow X$  is a morphism. We claim that there exists a unique blow up tower  $\mathcal{Y} = (Y_{\bullet}, W_{\bullet})$  of  $Y$  such that  $Y_i \rightarrow Y \rightarrow X$  factors through  $X_i$  and  $W_i = V_i \times_{X_i} Y_i$ . Indeed, this defines  $Y_0, W_0$  and  $Y_1$  uniquely. Since  $V_0 \times_X Y_1 = W_0 \times_{Y_0} Y_1$  is a Cartier divisor,  $Y_1 \rightarrow X$  factors uniquely through  $X_1$ . The morphism  $Y_1 \rightarrow X_1$  uniquely defines  $W_1$  and  $Y_2$ , etc. We call  $\mathcal{Y}$  the *strict transform* of  $\mathcal{X}$  with respect to  $h$  and denote it  $h^{\text{st}}(\mathcal{X})$ .

**REMARK 2.1.6.** The following observation motivates our terminology: if  $h: Y \hookrightarrow X$  is a closed immersion then  $Y_i \hookrightarrow X_i$  is a closed immersion and  $Y_{i+1}$  is the strict transform of  $Y_i$  under the blow up  $X_{i+1} \rightarrow X_i$ .

**2.1.7. Pullbacks.** One can also define a naive base change of  $\mathcal{X}$  with respect to  $h$  simply as  $(Y_{\bullet}, W_{\bullet}) = \mathcal{X} \times_X Y$ . This produces a sequence of proper morphisms  $Y_n \dashrightarrow Y_0$  and closed subschemes  $W_i \hookrightarrow Y_i$  for  $0 \leq i \leq n-1$ . If this datum is a blow up sequence, i.e.  $Y_{i+1} \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{W_i}(Y_i)$ , then we say that  $\mathcal{X} \times_X Y$  is the *pullback* of  $\mathcal{X}$  and use the notation  $h^*(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \times_X Y$ .

**REMARK 2.1.8.** The pullback exists if and only if  $\mathcal{X} \times_X Y \xrightarrow{\sim} h^{\text{st}}(\mathcal{X})$ . Indeed, this is obvious for towers of length one, and the general case follows by induction on the length.

**2.1.9. Flat pullbacks.** Blow ups are compatible with flat base changes  $h: Y \rightarrow X$  in the sense that  $\mathrm{Bl}_{V \times_X Y}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}_V(X) \times_X Y$  (e.g. just compute these blow ups in the terms of Proj). By induction on length of blow up towers it follows that pullbacks of blow up towers with respect to flat morphisms always exist. One can slightly strengthen this fact as follows.

**REMARK 2.1.10.** Assume that  $X_\bullet$  is a blow up tower of  $X$  and  $h: Y \rightarrow X$  is a morphism. If there exists a flat morphism  $f: X \rightarrow S$  such that the composition  $g: Y \rightarrow S$  is flat and the blow up tower  $X_\bullet$  is the pullback of a blow up tower  $S_\bullet$ , then the pullback  $h^*(X_\bullet)$  exists and equals to  $g^*(S_\bullet)$ .

**2.1.11. Equivariant blow ups.** Assume that  $X$  is an  $S$ -scheme acted on by a flat  $S$ -group scheme  $G$ . We will denote by  $p, m: X_0 = G \times_S X \rightarrow X$  the projection and the action morphisms. Assume that  $V \hookrightarrow X$  is a  $G$ -equivariant closed subscheme (i.e.,  $V \times_X (X_0; m)$  coincides with  $V_0 = V \times_X (X_0; p)$ ) then the action of  $G$  lifts to the blow up  $Y = \mathrm{Bl}_V(X)$ . Indeed, the blow up  $Y_0 = \mathrm{Bl}_{V_0}(X_0) \rightarrow X_0$  is the pullback of  $Y \rightarrow X$  with respect to both  $m$  and  $p$ , i.e. there is a pair of cartesian squares

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \longrightarrow & X_0 \\ p' \downarrow & m' & \downarrow p \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

So, we obtain an isomorphism  $Y_0 \xrightarrow{\sim} G \times_S Y$  (giving rise to the projection  $p': Y_0 \rightarrow Y$ ) and a group action morphism  $m': Y_0 \rightarrow Y$  compatible with  $m$ . Furthermore, the unit map  $e: X \rightarrow X_0$  satisfies the condition of Remark 2.1.10 (with  $X = S$ ), hence we obtain the base change  $e': Y \rightarrow Y_0$  of  $e$ .

It is now straightforward to check that  $m'$  and  $e'$  satisfy the group action axioms, but let us briefly spell this out using simplicial nerves. The action of  $G$  on  $V$  defines a cartesian sub-simplicial scheme  $\mathrm{Ner}(G, V) \hookrightarrow \mathrm{Ner}(G, X)$ . By the flatness of  $G$  over  $S$  and Remark 2.1.10,  $\mathrm{Bl}_{\mathrm{Ner}(G, V)}(\mathrm{Ner}(G, X))$  is cartesian over  $\mathrm{Ner}(G)$ , hence corresponds to an action of  $G$  on  $\mathrm{Bl}_V(X)$ .

**2.1.12. Flat monomorphism.** Flat monomorphisms are studied in [Raynaud, 1968]. In particular, it is proved in [Raynaud, 1968, Prop. 1.1] that  $i: Y \hookrightarrow X$  is a flat monomorphism if and only if  $i$  is injective and for any  $y \in Y$  the homomorphism  $\mathcal{O}_{X, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  is an isomorphism. Moreover, it is proved in [Raynaud, 1968, Prop. 1.2] that in this case  $i$  is a topological embedding and  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$ . In addition to open immersions, the main source of flat monomorphisms for us will be morphisms of the form  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X, x}) \hookrightarrow X$  and their base changes.

**2.1.13. Pushouts of ideals.** Let  $i: Y \rightarrow X$  be a flat monomorphism, e.g.  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X, x}) \hookrightarrow X$ . By the *pushout*  $U = i_*(V)$  of a closed subscheme  $V \hookrightarrow Y$  we mean its schematic image in  $X$ , i.e.  $U$  is the minimal closed subscheme such that  $V \hookrightarrow X$  factors through  $U$ . It exists by [ÉGA I 9.5.1].

**LEMMA 2.1.14.** The pushout  $U = i_*(V)$  extends  $V$  in the sense that  $U \times_X Y = V$ .

*Proof.* By minimality of  $U$ , it suffices to show that  $V$  admits some extension to a closed subscheme of  $X$ . Furthermore, it suffices to extend  $V$  to a neighborhood  $X'$  of  $i(Y)$  because closed subschemes of  $X'$  can be extended to  $X$  by the schematic image. Thus we can replace  $X$  with  $X'$ , in particular, by [Raynaud, 1968, 1.5(i)] we can assume that  $i: Y \rightarrow X$  is affine. Then  $i$  is a limit of affine finite type morphisms  $X_i \rightarrow X$  by [ÉGA I 9.6.6], and by [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.8.2 and 8.10.5(iv)]  $V$  is the preimage

of a closed subscheme  $V_i \hookrightarrow X_i$  for large enough  $i$ . We claim that the morphism  $Y \rightarrow X_i$  factors through a small enough neighborhood  $X'$  of  $i(Y)$ . Indeed, by quasi-compactness of  $Y$  it suffices to check that for any  $y \in Y$  the morphism  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow X_i$  factors through a neighborhood of  $y$ . Since  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$  is the limit of all affine neighborhoods of  $y$  the latter follows from [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.13.2]. Having such a factoring  $Y \rightarrow X' \rightarrow X_i$  it remains to note that  $U$  is the preimage of  $V' = V_i \times_{X_i} X'$ , hence  $U$  extends to  $V'$  in  $X'$ , and as we observed earlier this implies the lemma.  $\square$

**2.1.15. Pushouts of blow up towers.** Given a blow up  $f: \text{Bl}_V(Y) \rightarrow Y$  and a flat monomorphism  $i: Y \hookrightarrow X$  we define the pushforward  $i_*(f)$  as the blow up along  $U = i_*(V)$ . Using Lemma 2.1.14 and flat pullbacks we see that  $i^*i_*(f) = f$  and  $\text{Bl}_V(Y) \hookrightarrow \text{Bl}_U(X)$  is a flat monomorphism. So, we can iterate this procedure to construct pushforward with respect to  $i$  of any blow up tower  $Y_\bullet$  of  $Y$ . It will be denoted  $(X_\bullet, U_\bullet) = i_*(Y_\bullet, V_\bullet)$ .

REMARK 2.1.16. (i) Clearly,  $i^*i_*(Y_\bullet) = Y_\bullet$ .

(ii) In the opposite direction, a blow up tower  $(X_\bullet, U_\bullet)$  of  $X$  satisfies  $i_*i^*(X_\bullet) = X_\bullet$  if and only if the preimage of  $Y$  in each center  $U_i$  of the tower is schematically dense.

**2.1.17. Associated points of a scheme.** Recall that a point  $x \in X$  is called associated if  $\mathfrak{m}_x$  is an associated prime of  $\mathcal{O}_{X,x}$ , i.e.  $\mathcal{O}_{X,x}$  contains an element whose annihilator is  $\mathfrak{m}_x$ , see [ÉGA IV<sub>2</sub> 3.1.1]. The set of all such points will be denoted  $\text{Ass}(X)$ . The following result is well known but difficult to find in the literature.

LEMMA 2.1.18. Let  $i: Y \hookrightarrow X$  be a flat monomorphism. Then the schematic image of  $i$  coincides with  $X$  if and only if  $\text{Ass}(X) \subseteq i(Y)$ .

*Proof.* Note that the schematic image of  $i$  can be described as  $\text{Spec}(\mathcal{F})$ , where  $\mathcal{F}$  is the image of the homomorphism  $\phi: \mathcal{O}_X \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)$ . Thus, the schematic image coincides with  $X$  if and only if  $\text{Ker}(\phi) = 0$ .

If  $i(Y)$  omits a point  $x$  then any  $\mathfrak{m}_x$ -torsion element  $s \in \mathcal{O}_{X,x}$  is in the kernel of  $\phi_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)_x$  (we use that  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X|_Y$  by §2.1.12 and since  $\bar{x}$  is the support of  $s$ , the restriction  $s|_Y$  vanishes). So, if there exists  $x \in \text{Ass}(X)$  with  $x \notin i(Y)$  then  $\text{Ker}(\phi) \neq 0$ .

Conversely, if the kernel is non-zero then we take  $x$  to be any maximal point of its support and choose any non-zero  $s \in \text{Ker}(\phi_x)$ . In particular,  $s|_{Y \cap X_x} = 0$  and hence  $x \notin i(Y)$ . For any non-trivial generalization  $y$  of  $x$  the image of  $s$  in  $\mathcal{O}_{X,y}$  vanishes because  $\text{Ker}(\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)_y) = 0$  by maximality of  $x$ . Thus,  $x$  is the support of  $s$ , and hence  $s$  is annihilated by a power of  $\mathfrak{m}_x$ . Since  $X$  is noetherian, we can find a multiple of  $s$  whose annihilator is  $\mathfrak{m}_x$ , thereby obtaining that  $x \in \text{Ass}(X)$ .  $\square$

**2.1.19. Associated points of blow up towers.** If  $(X_\bullet, V_\bullet)$  is a blow up tower of  $X$  then by the set  $\text{Ass}(X_\bullet)$  of its associated points we mean the union of the images of  $\text{Ass}(V_i)$  in  $X$ . Combining Remark 2.1.16(i) and Lemma 2.1.18 we obtain the following:

LEMMA 2.1.20. Let  $i: Y \hookrightarrow X$  be a flat monomorphism and let  $X_\bullet$  be a blow up tower of  $X$ . Then  $i_*i^*(X_\bullet) = X_\bullet$  if and only if  $\text{Ass}(X_\bullet) \subseteq i(Y)$ .

**2.2. Normalized blow up towers.** For reduced schemes most of the notions, constructions and results of §2.1 have normalized analogs. We develop such a "normalized" theory in this section.

**2.2.1. Normalization.** The normalization of a reduced noetherian scheme  $X$ , as defined in [ÉGA III 6.3.8], will be denoted  $X^{\text{nor}}$ . Recall that normalization is compatible with open immersions and for an affine  $X = \text{Spec}(A)$  its normalization is  $X^{\text{nor}} = \text{Spec}(B)$  where  $B$  is the integral closure of  $A$  in its total ring of fractions (which is a finite product of fields). The normalization morphism  $X^{\text{nor}} \rightarrow X$  is integral but not necessarily finite (since we do not impose the quasi-excellence assumption on schemes).

**2.2.2. Functoriality.** Recall (see exposé II) that a morphism  $f: Y \rightarrow X$  is called *maximally dominating* if it takes generic points of  $Y$  to generic points of  $X$ . Normalization is a functor on the category of reduced schemes with maximally dominating morphisms. Furthermore, it possesses the following universal property: any maximally dominating morphism  $Y \rightarrow X$  with normal  $Y$  factors uniquely through  $X^{\text{nor}}$ . (Both claims are local on  $Y$  and  $X$  and are obvious for affine schemes.)

**2.2.3. Normalized blow ups.** By the *normalized blow up* of a reduced scheme  $X$  along a closed subscheme  $V$  we mean the morphism  $f: \text{Bl}_V(X)^{\text{nor}} \rightarrow X$ . Note that  $f$  is universally closed but does not have to be of finite type. As in the case of usual blow ups,  $V$  is a part of the structure. In particular,  $\text{Bl}_V(X)$  has no  $X$ -automorphisms and we can talk about equality of normalized blow ups (as opposed to an isomorphism).

**PROPOSITION 2.2.4.** (i) *Keep the above notation. Then  $\text{Bl}_V(X)^{\text{nor}} \rightarrow X$  is the universal maximally dominating morphism  $Y \rightarrow X$  such that  $Y$  is normal and  $V \times_X Y$  is a Cartier divisor.*

(ii) *For any blow up  $f: Y = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$  its normalization  $f^{\text{nor}}: Y^{\text{nor}} \rightarrow X^{\text{nor}}$  is the normalized blow up along  $V \times_X X^{\text{nor}}$ .*

*Proof.* Combining the universal properties of blow ups and normalizations we obtain (i), and (ii) is its immediate corollary.  $\square$

Towers of normalized blow ups and their transforms can now be defined similarly to their non-normalized analogs.

**2.2.5. Towers of normalized blow ups.** A *tower of normalized blow ups* is a finite sequence  $X_n \dashrightarrow X_0$  of normalized blow ups with centers  $V_i \hookrightarrow X_i$  for  $0 \leq i \leq n-1$ . The centers are part of the datum.

**2.2.6. Normalization of a blow up tower.** Using induction on length and Proposition 2.2.4(ii), we can associate to a blow up tower  $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$  of a reduced scheme  $X$  a normalized blow up tower  $\mathcal{X}^{\text{nor}} = (Y_\bullet, W_\bullet)$ , where  $Y_0 = X$ ,  $Y_i = X_i^{\text{nor}}$  for  $i \geq 1$ , and  $W_i = V_i \times_{X_i} X_i^{\text{nor}}$ . We call  $\mathcal{X}^{\text{nor}}$  the *normalization* of  $\mathcal{X}$ .

**2.2.7. Strict transforms.** If  $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$  is a normalized blow up tower of  $X = X_0$  and  $f: Y \rightarrow X$  is a morphism then we define the *strict transform*  $f^{\text{st}}(\mathcal{X})$  as the normalized blow up tower  $(Y_\bullet, W_\bullet)$  such that  $Y_0 = Y$  and  $W_i = V_i \times_{X_i} Y_i$ . Using induction on the length and the universal property of normalized blow ups, see 2.2.4(i), one shows that such a tower exists and is the universal normalized blow up tower of  $Y$  such that  $f = f_0$  extends to a compatible sequence of morphisms  $f_i: Y_i \rightarrow X_i$ .

**2.2.8. Pullbacks.** The strict transform  $f^{\text{st}}(\mathcal{X})$  as above will be called the *pullback* and denoted  $f^*(\mathcal{X})$  if  $Y_i \xrightarrow{\sim} X_i \times_X Y$  for any  $0 \leq i \leq n$ .



**LEMMA 2.2.9.** If  $f: Y \rightarrow X$  is regular then any normalized blow up tower  $\mathcal{X}$  of  $X$  admits a pullback  $f^*(\mathcal{X})$ .

*Proof.* Blow ups are compatible with flat morphisms hence we should only show that normalization is compatible with regular morphisms: if  $f: Y \rightarrow X$  is a regular morphism of reduced schemes then the morphism  $h: Y^{\text{nor}} \rightarrow X^{\text{nor}} \times_X Y$  is an isomorphism. Note that  $h$  is an integral morphism which is generically an isomorphism and the target is normal because it is regular over a normal scheme, see [Matsumura, 1980a, 21.E(iii)]. Hence  $h$  is an isomorphism.  $\square$

**REMARK 2.2.10.** Using [ÉGA IV<sub>2</sub> 6.14.1] instead of the reference in the proof, one obtains that the claim of the lemma holds, more generally, whenever  $f$  is a normal morphism (i.e. flat with geometrically normal fibres). We will use in the sequel only the case when  $f$  is regular.

**2.2.11.** *Fpqc descent of blow up towers.* The classical fpqc descent of ideals (and modules) implies that there is also an fpqc descent for blow up towers. Namely, if  $Y \rightarrow X$  is an fpqc covering and  $Y_\bullet$  is a blow up tower of  $Y$  whose both pullbacks to  $Y \times_X Y$  are equal then  $Y_\bullet$  canonically descends to a blow up tower of  $X$  because the centers descend. In the same way, normalized blow up towers descend with respect to quasi-compact surjective regular morphisms.

**2.2.12.** *Associated points.* The material of §§2.1.15–2.1.19 extends to normalized blow up towers almost verbatim. In particular, if  $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$  is such a tower then  $\text{Ass}(\mathcal{X})$  is the union of the images of  $\text{Ass}(V_i)$  and for any flat monomorphism  $i: Y \hookrightarrow X$  (which is a regular morphism by §2.1.12) with a blow up tower  $\mathcal{Y}$  of  $Y$  we always have that  $i^*i_*\mathcal{Y} = \mathcal{Y}$ , and we have that  $i_*i^*\mathcal{X} = \mathcal{X}$  if and only if  $\text{Ass}(\mathcal{X}) \subset i(Y)$ .

**2.3. Functorial desingularization.** In this section we will formulate the desingularization result about toric varieties that will be used later in the proof of Theorem 1.1. Then we will show how it is obtained from known desingularization results.

**2.3.1.** *Desingularization of a scheme.* By a *resolution* (or *desingularization*) tower of a scheme  $X$  we mean a tower of blow ups with nowhere dense centers  $X_\bullet$  such that  $X = X_0$ ,  $X_n$  is regular and no  $f_i$  is an empty blow up. For example, the trivial tower is a desingularization if and only if  $X$  itself is regular.

**2.3.2.** *Normalized desingularization.* We will also consider normalized blow up towers such that each center is non-empty and nowhere dense,  $X = X_0$  and  $X_n$  is regular. Such a tower will be called a *normalized desingularization tower* of  $X$ .

**REMARK 2.3.3.** (i) For any desingularization tower  $\mathcal{X}$  of  $X$  its normalization  $\mathcal{X}^{\text{nor}}$  is a normalized desingularization tower of  $X$ .

(ii) Usually one works with non-normalized towers; they are subtler objects that possess more good properties. All known constructions of functorial desingularization (see below) produce blow up towers by an inductive procedure, and one cannot work with normalized towers instead. However, it will be easier for us to deal with normalized towers in log geometry because in this case one may work only with fs log schemes.

**2.3.4.** *Functoriality of desingularization.* For concreteness, we will consider desingularizations in §2.3.4, but all what we say holds for normalized desingularizations too. Assume that a family  $\mathcal{S}^0$  of schemes is provided with desingularizations  $\mathcal{F}(X) = X_\bullet$  for any  $X \in \mathcal{S}^0$ . We say that the desingularization (family)

$\mathcal{F}$  is *functorial* with respect to a family  $\mathcal{S}^1$  of morphisms between the elements of  $\mathcal{S}^0$  if for any  $f: Y \rightarrow X$  from  $\mathcal{S}^1$  the desingularization of  $X$  induces that of  $Y$  in the sense that  $f^* \mathcal{F}(X)$  is defined and its contraction coincides with  $\mathcal{F}(Y)$  (so,  $\mathcal{F}(Y) = (Y \times_X \mathcal{F}(X))_c$ ). Note that we put the  $=$  sign instead of an isomorphism sign, which causes no ambiguity by the fact that any automorphism of a blow up is the identity as we observed above.

**REMARK 2.3.5.** (i) Contractions in the pulled back tower appear when some centers of  $\mathcal{F}(X)$  are mapped to the complement of  $f(Y)$  in  $X$ . In particular, if  $f \in \mathcal{S}^1$  is surjective then the precise equality  $\mathcal{F}(Y) = Y \times_X \mathcal{F}(X)$  holds.

(ii) Assume that  $X = \cup_{i=1}^n X_i$  is a Zariski covering and the morphisms  $X_i \hookrightarrow X$  and  $\coprod_{i=1}^n X_i \rightarrow X$  are in  $\mathcal{S}^1$ . In general, one cannot reconstruct  $\mathcal{F}(X)$  from  $\mathcal{F}(X_i)$ 's because the latter are contracted pullbacks and it is not clear how to glue them with correct synchronization. However, all information about  $\mathcal{F}(X)$  is kept in  $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)$ . The latter is the pullback of  $\mathcal{F}(X)$  hence we can reconstruct  $\mathcal{F}(X)$  by gluing the restricted blow up towers  $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)|_{X_i}$ . Note that  $\mathcal{F}(\coprod_{i=1}^n X_i)|_{X_i}$  can be obtained from  $\mathcal{F}(X_i)$  by inserting empty blow ups, and these empty blow ups make the gluing possible. This trick with synchronization of the towers  $\mathcal{F}(X_i)$  by desingularizing disjoint unions is often used in the modern desingularization theory, and one can formally show (see [Temkin, 2011a, Rem. 2.3.4(iv)]) that such approach is equivalent to the classical synchronization of the algorithm with an invariant.

(iii) Assume that  $\mathcal{S}^1$  contains all identities  $\text{Id}_X$  with  $X \in \mathcal{S}^0$  and a morphism  $Y \coprod Z \rightarrow X$  is in  $\mathcal{S}^1$  whenever its restrictions  $Y \rightarrow X$  and  $Z \rightarrow X$  are in  $\mathcal{S}^1$ . As an illustration of the above trick, let us show that even if  $f, g: Y \rightarrow X$  are in  $\mathcal{S}^1$  but not surjective, we have an equality  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, f) = \mathcal{F}(X) \times_X (Y, g)$  of non-contracted towers. Indeed, set  $Y' = Y \coprod X$  and consider the morphisms  $f', g': Y' \rightarrow X$  that agree with  $f$  and  $g$  and map  $X$  by identity. Then  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y', f')$  and  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y', g')$  are equal because  $f'$  and  $g'$  are surjective, hence their restrictions onto  $Y$  are also equal, but these are precisely  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, f)$  and  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y, g)$ .

**2.3.6. Gabber's magic box.** Now we have tools to formulate the aforementioned desingularization result.

**THEOREM 2.3.7.** Let  $\mathcal{S}^0$  denote the family of disjoint unions of affine toric varieties over  $\mathbf{Q}$ , i.e.  $X \in \mathcal{S}^0$  if it is of the form  $\coprod_{i=1}^n \text{Spec}(\mathbf{Q}[P_i])$ , where  $P_1, \dots, P_n$  are fs torsion free monoids. Let  $\mathcal{S}^1$  denote the family of smooth morphisms

$$f: \prod_{j=1}^m \text{Spec}(\mathbf{Q}[Q_j]) \rightarrow \prod_{i=1}^n \text{Spec}(\mathbf{Q}[P_i])$$

such that for each  $1 \leq j \leq m$  there exists  $1 \leq i = i(j) \leq n$  and a homomorphism of monoids  $\phi_j: P_i \rightarrow Q_j$  so that the restriction of  $f$  onto  $\text{Spec}(\mathbf{Q}[Q_j])$  factors through the toric morphism  $\text{Spec}(\mathbf{Q}[\phi_j])$ . Then there exists a desingularization  $\mathcal{F}$  on  $\mathcal{S}^0$  which is functorial with respect to  $\mathcal{S}^1$  and, in addition, satisfies the following compatibility condition: if  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_l$  are complete noetherian rings containing  $\mathbf{Q}$ ,  $Z = \coprod_{i=1}^l \text{Spec}(\mathcal{O}_i)$ , and  $g, h: Z \rightarrow X$  are two regular morphisms with  $X \in \mathcal{S}^0$  then

$$(2.a) \quad (Z, g) \times_X \mathcal{F}(X) = (Z, h) \times_X \mathcal{F}(X)$$

Before showing how this theorem follows from known desingularization results, let us make few comments.

**REMARK 2.3.8.** (i) Gabber's original magic box also requires that the centers are smooth schemes. This (and much more) can also be achieved as will be explained later, but we prefer to emphasize the minimal list of properties that will be used in the proof of Theorem 1.1.

(ii) It is very important to allow disjoint unions in the theorem in order to deal with synchronization issues, as explained in Remark 2.3.5(ii). This theme will show up repeatedly throughout the paper.

**2.3.9. Desingularization of  $qe$  schemes over  $\mathbf{Q}$ .** Gabber's magic box 2.3.7 is a particular case of the following theorem, see [Temkin, 2011a, Th. 1.2.1]. Indeed, due to Remark 2.3.5(iii), functoriality with respect to regular morphisms implies (2.a).

**THEOREM 2.3.10.** There exists a desingularization algorithm  $\mathcal{F}$  defined for all reduced quasi-excellent schemes over  $\mathbf{Q}$  and functorial with respect to all *regular* morphisms. In addition,  $\mathcal{F}$  blows up only regular centers.

**REMARK 2.3.11.** Although this is not stated in [Temkin, 2011a], one can strengthen Theorem 2.3.10 by requiring that  $\mathcal{F}$  blows up only regular centers contained in the singular locus. An algorithm  $\mathcal{F}$  is constructed in [Temkin, 2011a] from an algorithm  $\mathcal{F}_{\text{var}}$  that desingularizes varieties of characteristic zero, and one can check that if the centers of  $\mathcal{F}_{\text{var}}$  lie in the singular loci (of the intermediate varieties) then the same is true for  $\mathcal{F}$ . Let us explain how one can choose an appropriate  $\mathcal{F}_{\text{var}}$ . In [Temkin, 2011a], one uses the algorithm of Bierstone-Milman to construct  $\mathcal{F}$ , see Theorem 6.1 and its Addendum in [Bierstone et al., 2011] for a description of this algorithm and its properties. It follows from the Addendum that the algorithm blows up centers lying in the singular loci until  $X$  becomes smooth, and then it performs some additional blow ups to make the exceptional divisor snc. Eliminating the latter blow ups we obtain a desingularization algorithm  $\mathcal{F}_{\text{var}}$  which only blows up regular centers lying in the singular locus.

It will be convenient for us to use the algorithm  $\mathcal{F}$  from Theorem 2.3.10 in the sequel. Also, to simplify the exposition we will freely use all properties of  $\mathcal{F}$  but the careful reader will notice that only the properties of Gabber's magic box will be crucial in the end. Also, instead of working with  $\mathcal{F}$  itself we will work with its normalization  $\mathcal{F}^{\text{nor}}$  which assigns to a reduced  $qe$  scheme over  $\mathbf{Q}$  the normalized blow up tower  $\mathcal{F}(X)^{\text{nor}}$ . It will be convenient to use the notation  $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{\text{nor}}$  in the sequel.

**REMARK 2.3.12.** (i) Since normalized blow ups are compatible with regular morphisms, it follows from Theorem 2.3.10 that the normalized desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}$  is functorial with respect to all regular morphisms.

(ii) The feature which is lost under normalization (and which is not needed for our purposes) is some control on the centers. The centers  $\widetilde{V}_i$  of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$  are preimages of the centers  $V_i \hookrightarrow X_i$  of  $\mathcal{F}(X)$  under the normalization morphisms  $X_i^{\text{nor}} \rightarrow X_i$ , so they do not have to be even reduced. It will only be important that  $\widetilde{V}_i$ 's are equivariant when a smooth group acts on  $X$ . In the original Gabber's argument it was important to blow up only regular centers because they were not

part of the blow up data, and one used that a regular center without codimension one components intersecting the regular locus is determined already by the underlying morphism of the blow up.

**2.3.13. *Alternative desingularization inputs.*** For the sake of completeness, we discuss how other algorithms could be used instead of  $\mathcal{F}$ . Some desingularization algorithms for reduced varieties over  $\mathbf{Q}$  are constructed in [Bierstone & Milman, 1997], [Włodarczyk, 2005] and [Kollár, 2007]. They all are functorial with respect to equidimensional smooth morphisms (though usually one "forgets" to mention the equidimensionality restriction). It is shown in [Bierstone et al., 2011, §6.3] how to make the algorithm of [Bierstone & Milman, 1997] fully functorial by a slight adjusting of the synchronization of its blow ups. There are also a few other canonical constructions (e.g. due to Villamayor), which are probably functorial with respect to equidimensional smooth morphisms too. All these algorithms can be used to produce a desingularization of log regular schemes (see §3), so the only difficulty is in establishing the compatibility (2.a).

For the algorithm of [Bierstone et al., 2011] it was shown by Bierstone-Milman (unpublished, see [Bierstone et al., 2011, Rem. 7.1(2)]) that the induced desingularization of a formal completion at a point depends only on the formal completion as a scheme. This is precisely what we need in (2.a).

Finally, there is a much more general result by Gabber, see Theorem 2.4.1, whose proof uses Popescu's theorem and the cotangent complex. It implies that, actually, any desingularization of reduced varieties over  $\mathbf{Q}$  which is functorial with respect to smooth morphisms automatically satisfies (2.a). So, in principle, any functorial desingularization of varieties over  $\mathbf{Q}$  could be used for our purposes. Since Gabber's result and its proof are powerful and novel for the desingularization theory (and were missed in [Bierstone et al., 2011], mainly due to a not so trivial involvement of the cotangent complex), we include them in §2.4.

**2.3.14. *Invariance of the regular locus.*** Until the end of §2.3 we consider only qc schemes of characteristic zero, and our aim is to establish a few useful properties of  $\mathcal{F}$  (and  $\widetilde{\mathcal{F}}$ ) that are consequences of the functoriality property  $\mathcal{F}$  satisfies. First, we claim that  $\mathcal{F}$  does not modify the regular locus of  $X$ , and even slightly more than that:

**COROLLARY 2.3.15.** All centers of  $\mathcal{F}(X)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$  sit over the singular locus of  $X$ . In particular,  $X$  is regular if and only if  $\mathcal{F}(X)$  is the trivial tower.

*Proof.* It suffices to study  $\mathcal{F}$ . The claim is obvious for  $S = \text{Spec}(\mathbf{Q})$  because  $S$  does not contain non-dense non-empty subschemes. By functoriality,  $\mathcal{F}(T)$  is trivial for any regular  $T$  of characteristic zero, because it is regular over  $S$ . Finally, if  $T$  is the regular locus of  $X$  then  $\mathcal{F}(T) = (\mathcal{F}(X) \times_X T)_c$  and hence any center  $V_i \hookrightarrow X_i$  of  $\mathcal{F}(X)$  does not intersect the preimage of  $T$ .  $\square$

**2.3.16. *Equivariance of the desingularization.*** It is well known that functorial desingularization is equivariant with respect to any smooth group action (and, moreover, extends to functorial desingularization of stacks). For the reader's convenience we provide an elementary argument.

**COROLLARY 2.3.17.** Let  $S$  be a qc scheme over  $\mathbf{Q}$ ,  $G$  be a smooth  $S$ -group and  $X$  be a reduced  $S$ -scheme of finite type acted on by  $G$ . Then the action of  $G$  on  $X$  extends naturally to an action of  $G$  on  $\mathcal{F}(X)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$ .

*Proof.* Again, it suffices to study  $\mathcal{F}$ . Let  $\mathcal{F}(X)$  be given by  $X_n \dashrightarrow X_0 = X$  and  $V_i \hookrightarrow X_i$  for  $0 \leq i \leq n-1$ . By  $p, m: Y = G \times_S X \rightarrow X$  we denote the projection and the action morphisms. Note that  $m$  is smooth (e.g.  $m$  is the composition of the automorphism  $(g, x) \rightarrow (g, gx)$  of  $G \times_S X$  and  $p$ ). Therefore,  $\mathcal{F}(X) \times_X (Y; m) = \mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(X) \times_S G$  by Theorem 2.3.10 and Remark 2.3.5(i). In particular,  $V_0 \times_X (Y; p) = V_0 \times_X (Y; m)$ , i.e.  $V_0$  is  $G$ -equivariant. By §2.1.11,  $X_1$  inherits a  $G$ -action. Then the same argument implies that  $V_1$  is  $G$ -equivariant and  $X_2$  inherits a  $G$ -action, etc.  $\square$

**2.4. Complements on functorial desingularizations.** This section is devoted to Gabber's result on a certain non-trivial compatibility property that any functorial desingularization satisfies. It will not be used in the sequel, so an uninterested reader may safely skip it.

**THEOREM 2.4.1.** Assume that  $S$  is a scheme,  $\mathcal{S}^0$  is a family of reduced  $S$ -schemes of finite type and  $\mathcal{S}^1$  is a family of morphisms between elements of  $\mathcal{S}^0$  such that if  $f: Y \rightarrow X$  is smooth and  $X \in \mathcal{S}^0$  then  $Y \in \mathcal{S}^0$  and  $f \in \mathcal{S}^1$ . Let  $\mathcal{F}$  be a desingularization on  $\mathcal{S}^0$  which is functorial with respect to all morphisms of  $\mathcal{S}^1$ . Then any pair of regular morphisms  $g: Z \rightarrow X$  and  $h: Z \rightarrow Y$  with targets in  $\mathcal{S}^0$  induces the same desingularization of  $Z$ ; namely,  $\mathcal{F}(X) \times_X Z = \mathcal{F}(Y) \times_Y Z$ .

Note that the theorem has no restrictions on the characteristic (because no such restriction appears in Popescu's theorem). Before proving the theorem let us formulate its important corollary, whose main case is when  $S = \text{Spec}(k)$  for a field  $k$  and  $\mathcal{S}^0$  is the family of all reduced  $k$ -schemes of finite type.

**COROLLARY 2.4.2.** Keep the notation of Theorem 2.4.1. Then  $\mathcal{F}$  canonically extends to the family  $\widehat{\mathcal{S}^0}$  of all schemes that admit a regular morphism to a scheme from  $\mathcal{S}^0$  and the extension is functorial with respect to all regular morphisms between schemes of  $\widehat{\mathcal{S}^0}$ .

The main ingredient of the proof will be the following result that we are going to establish first.

**PROPOSITION 2.4.3.** Consider a commutative diagram of schemes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & g \swarrow & \downarrow f & \searrow h & \\
 X & \xleftarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & Y \\
 & \searrow a & & \swarrow b & \\
 & & S & & 
 \end{array}$$

such that  $a$  and  $b$  are of finite type,  $g$  and  $h$  are regular and  $g'$  is smooth. Then  $h'$  is smooth around the image of  $f$ .

For the proof we will need the following three lemmas. In the first one we recall the Jacobian criterion of smoothness, rephrased in terms of the cotangent complex.

**LEMMA 2.4.4.** Let  $f: X \rightarrow S$  be a morphism which is locally of finite presentation, and let  $x \in X$ . Then the following conditions are equivalent:

- (i)  $f$  is smooth at  $x$ ;
- (ii)  $H_1(L_{X/S} \otimes^L k(x)) = 0$ .

In the lemma we use the convention  $H_i = H^{-i}$ , and  $L_{X/S}$  denotes the cotangent complex of  $X/S$ .

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) is trivial: as  $f$  is smooth at  $x$ , up to shrinking  $X$  we may assume  $f$  smooth, then  $L_{X/S}$  is cohomologically concentrated in degree zero and locally free [Illusie, 1972, III 3.1.2]. Let us prove (ii)  $\Rightarrow$  (i). We may assume that we have a factorization

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ \downarrow f & \searrow g & \\ S & & \end{array}$$

where  $i$  is a closed immersion of ideal  $I$  and  $g$  is smooth. Consider the standard exact sequence

$$(*) \quad I/I^2 \rightarrow i^* \Omega_{Z/S}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0.$$

By the Jacobian criterion [ÉGA IV<sub>4</sub> 17.12.1] and [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.1.12], the smoothness of  $f$  at  $x$  is equivalent to the fact that the morphism

$$(**) \quad (I/I^2) \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{Z/S}^1 \otimes k(x)$$

deduced from the left one in (\*) is injective. Now,  $(I/I^2) \otimes k(x) = H_1(L_{X/Z} \otimes^L k(x))$  [Illusie, 1972, III 3.1.3], and (\*\*) is a morphism in the exact sequence associated with the triangle deduced from the transitivity triangle  $Li^*L_{Z/S} \rightarrow L_{X/S} \rightarrow L_{X/Z} \rightarrow Li^*L_{Z/S}[1]$  by applying  $\otimes^L k(x)$ :

$$H_1(L_{X/S} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_1(L_{X/Z} \otimes^L k(x)) = (I/I^2) \otimes k(x) \rightarrow \Omega_{Z/S}^1 \otimes k(x).$$

By (ii),  $H_1(L_{X/S} \otimes^L k(x)) = 0$ , hence (\*\*) is injective, which completes the proof.  $\square$

**LEMMA 2.4.5.** Consider morphisms  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow S$ ,  $h = gf: X \rightarrow S$ , and let  $x \in X$ ,  $y = f(x) \in Y$ . Assume that

$$(i) \quad H_1(L_{X/S} \otimes^L k(x)) = 0$$

$$(ii) \quad H_2(L_{X/Y} \otimes^L k(x)) = 0.$$

Then  $H_1(L_{Y/S} \otimes^L k(y)) = 0$ . In particular, if  $g$  is locally of finite presentation then  $g$  is smooth at  $y$ .

*Proof.* It is equivalent to show that  $H_1(L_{Y/S} \otimes^L k(y)) = 0$ , and this follows trivially from the exact sequence

$$H_2(L_{X/Y} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_1(L_{Y/S} \otimes^L k(y)) \rightarrow H_1(L_{X/S} \otimes^L k(x)).$$

$\square$

**LEMMA 2.4.6.** Let  $f: X \rightarrow S$  be a regular morphism between locally noetherian schemes. Then  $L_{X/S}$  is cohomologically concentrated in degree zero and  $H_0(L_{X/S}) = \Omega_{X/S}^1$  is flat.

*Proof.* We may assume  $X = \text{Spec} B$  and  $S = \text{Spec} A$  affine. Then, by Popescu's theorem [Swan, 1998, 1.1],  $X$  is a filtering projective limit of smooth affine  $S$ -schemes  $X_\alpha = \text{Spec} B_\alpha$ . By [Illusie, 1972, II (1.2.3.4)], we have

$$L_{B/A} = \text{colim}_\alpha L_{B_\alpha/A}.$$

By [Illusie, 1972, III 3.1.2 and II 2.3.6.3],  $L_{B_\alpha/A}$  is cohomologically concentrated in degree zero and  $H_0(L_{B_\alpha/A}) = \Omega_{B_\alpha/A}^1$  is projective of finite type over  $B_\alpha$ , so the conclusion follows.  $\square$

*Proof of Proposition 2.4.3.* The question is local around a point  $y = f(x) \in Z'$ ,  $x \in Z$ . In view of Lemma 2.4.4, by Lemma 2.4.5 applied to  $Z \rightarrow Z' \rightarrow Y$  it suffices to show that  $H_1(L_{Z/Y} \otimes^L k(x)) = 0$  and  $H_2(L_{Z/Z'} \otimes^L k(x)) = 0$ . As  $Z$  is regular over  $Y$ , the first vanishing follows from Lemma 2.4.6. For the second one, consider the exact sequence

$$H_2(L_{Z/X} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_2(L_{Z/Z'} \otimes^L k(x)) \rightarrow H_1(L_{Z'/X} \otimes^L k(x)).$$

By the regularity of  $Z/X$  and Lemma 2.4.6,  $H_2(L_{Z/X} \otimes^L k(x)) = 0$ . As  $Z'$  is smooth over  $X$ ,  $H_1(L_{Z'/X} \otimes^L k(x)) = 0$  by Lemma 2.4.4, which proves the desired vanishing and finishes the proof.  $\square$

*Proof of Theorem 2.4.1.* Find finite affine coverings  $X = \cup_i X_i$ ,  $Y = \cup_i Y_i$  and  $Z = \cup_i Z_i$  such that  $g(Z_i) \subseteq X_i$  and  $h(Z_i) \subseteq Y_i$ . Set  $X' = \coprod_i X_i$ ,  $Y' = \coprod_i Y_i$  and  $Z' = \coprod_i Z_i$  and let  $Z' \rightarrow X'$  and  $Z' \rightarrow Y'$  be the induced morphisms. It suffices to check that  $\mathcal{F}(X) \times_X Z$  and  $\mathcal{F}(Y) \times_Y Z$  become equal after pulling them back to  $Z'$ . So, we should check that  $(\mathcal{F}(X) \times_X X') \times_{X'} Z'$  coincides with  $(\mathcal{F}(Y) \times_Y Y') \times_{Y'} Z'$ . The morphisms  $X' \rightarrow X$  and  $Y' \rightarrow Y$  are smooth and hence contained in  $\mathcal{S}^1$ . So,  $\mathcal{F}(X) \times_X X' = \mathcal{F}(X')$  and similarly for  $Y$ . In particular, it suffices to prove that  $\mathcal{F}(X') \times_{X'} Z' = \mathcal{F}(Y') \times_{Y'} Z'$ . This reduces the problem to the case when all schemes are affine, so in the sequel we assume that  $X, Y$  and  $Z$  are affine.

Next, note that it suffices to find factorizations  $g = g_0 f$  and  $h = h_0 f$ , where  $f: Z \rightarrow Z_0$  is a morphism with target in  $\mathcal{S}^0$  and  $g_0: Z_0 \rightarrow X$ ,  $h_0: Z_0 \rightarrow Y$  are smooth. By Popescu's theorem, one can write  $g: Z \rightarrow X$  as a filtering projective limit of affine smooth morphisms  $g_\alpha: Z_\alpha \rightarrow X$ ,  $\alpha \in A$ . As  $Y$  is of finite type over  $S$ ,  $h$  will factor through one of the  $Z_\alpha$ 's ([ÉGA IV<sub>3</sub> 8.8.2.3]): there exists  $\alpha \in A$ ,  $f_\alpha: Z \rightarrow Z_\alpha$ ,  $h_\alpha: Z_\alpha \rightarrow Y$  such that  $g = g_\alpha f_\alpha$ ,  $h = h_\alpha f_\alpha$ . By Proposition 2.4.3,  $h_\alpha$  is smooth around the image of  $f_\alpha$ , so we can take  $Z_0$  to be a sufficiently small neighborhood of the image of  $f_\alpha$ .  $\square$

### 3. Resolution of log regular log schemes

Unless said to the contrary, by log structure we mean a log structure with respect to the étale topology. We will say that a log structure  $M_X$  on a scheme  $X$  is *Zariski* if  $\varepsilon^* \varepsilon_* M_X \xrightarrow{\sim} M_X$ , where  $\varepsilon: X_{\text{ét}} \rightarrow X$  is the morphism between the étale and Zariski sites. In this case, we can safely view the log structure as Zariski log structure  $\varepsilon_* M_X$ . A similar convention will hold also for log schemes.

**3.1. Fans.** Many definitions/constructions on log schemes are of "combinatorial nature". Roughly speaking, these constructions use only multiplication and ignore addition. Naturally, there exists a category of geometric spaces whose structure sheaves are monoids, and most of combinatorial constructions can be described as "pullbacks" of analogous "monoidal" operations. The first definition of such a category was done by Kato in [Kato, 1994]. Kato called his spaces *fans* to stress their relation to the classical combinatorial fans obtained by gluing polyhedral cones. For example, to any combinatorial fan  $C$  one can naturally associate a fan  $F(C)$  whose set of points is the set of faces of  $C$ . The main motivation for the definition is that fans can be naturally associated to various log schemes.

It took some time to discover that fans are sort of "piecewise schemes" rather than a monoidal version of schemes. A more geometric version of combinatorial schemes was introduced by Deitmar in [Deitmar, 2005]. He called them  $F_1$ -schemes, but we prefer the terminology of monoschemes introduced by Ogus in his book in preparation [Ogus, 2012]. Note that when working with a log scheme  $X$ , we use the sheaf  $M_X$  in some constructions and we use its sharpening  $\overline{M}_X$  (see §3.1.1) in other constructions. Roughly speaking, monoschemes naturally arise when we work with  $M_X$  while fans naturally arise when we work with  $\overline{M}_X$ .

In §3, we will show that: (a) a functorial desingularization of toric varieties over  $\mathbf{Q}$  descends to a desingularization of monoschemes, (b) to give the latter is more or less equivalent to give a desingularization of fans, (c) desingularization of fans can be used to induce a monoidal desingularization of log schemes, (d) the latter induces a desingularization of log regular schemes, which (at least in some cases) depends only on the underlying scheme.

In principle, we could work locally, using desingularization of disjoint unions of all charts for synchronization. In this case, we could almost ignore the intermediate categories by working only with fine monoids and blow up towers of their spectra. However, we decided to emphasize the actual geometric objects beyond the constructions, and, especially, stress the difference between fans and monoschemes.

**3.1.1. Sharpening.** For a monoid  $M$ , by  $M^\times$  (or  $M^*$ ) we denote the group of its invertible elements, and its *sharpening*  $\overline{M}$  is defined as  $M/M^\times$ .

**3.1.2. Localization.** By *localization* of a monoid  $M$  along a subset  $S$  we mean the universal  $M$ -monoid  $M_S$  such that the image of  $S$  in  $M_S$  is contained in  $M_S^\times$ . If  $M$  is integral then  $M_S$  is simply the submonoid  $M[S^{-1}] \subseteq M^{\text{gp}}$  generated by  $M$  and  $S^{-1}$ . If  $M$  is a fine then any localization is isomorphic to a localization at a single element  $f$ , and will be denoted  $M_f$ .

**3.1.3. Spectra of fine monoids.** All our combinatorial objects will be glued from finitely many spectra of fine monoids. Recall that with any fine monoid  $P$  one can associate the set  $\text{Spec}(P)$  of prime ideals (with the convention that  $\emptyset$  is also a prime ideal) equipped with the Zariski topology whose basis is formed by the sets  $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(P) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  for  $f \in P$ , see, for example, [Kato, 1994, §9]. The structure sheaf  $M_P$  is defined by  $M_P(D(f)) = P_f$ , and the sharp structure sheaf  $\overline{M}_P = M_P/M_P^\times$  is the sharpening of  $M_P$  (we will see in Remark 3.1.4(iii) that actually  $\overline{M}_P(D(f)) = \overline{P}_f = P_f/(P_f^\times)$ , i.e. no sheafification is needed).

**REMARK 3.1.4.** (i) Since  $P \setminus P^\times$  and  $\emptyset$  are the maximal and the minimal prime ideals of  $P$ ,  $\text{Spec}(P)$  possesses unique closed and generic points  $s$  and  $\eta$ . The latter is the only point whose stalk  $M_{P,\eta} = P^{\text{gp}}$  is a group.

(ii) The set  $\text{Spec}(P)$  is finite and its topology is the specialization topology, i.e.  $U$  is open if and only if it is closed under generalizations. (More generally, this is true for any finite sober topological space, such as a scheme that has finitely many points.)

(iii) A subset  $U \subseteq \text{Spec}(P)$  is affine (and even of the form  $D(f)$ ) if and only if it is the localization of  $\text{Spec}(P)$  at a point  $x$  (i.e. the set of all generalizations of  $x$ ). Any open covering  $U = \cup_i U_i$  of an affine set is trivial (i.e.  $U$  is equal to some  $U_i$ ), therefore any functor  $\mathcal{F}(U)$  on affine sets uniquely extends to a sheaf on  $\text{Spec}(P)$ . In particular, this explains why no sheafification is needed when defining  $\overline{M}_P$ .



Furthermore, we see that, roughly speaking, any notion/construction that is "defined in terms of" localizations  $X_x$  and stalks  $M_x$  or  $\overline{M}_x$  is Zariski local. This is very different from the situation with schemes.

**3.1.5. Local homomorphisms of monoids.** Any monoid  $M$  is local because  $M \setminus M^\times$  is its unique maximal ideal. A homomorphism  $f: M \rightarrow N$  of monoids is *local* if it takes the maximal ideal of  $M$  to the maximal ideal of  $N$ . This happens if and only if  $f^{-1}(N^\times) = M^\times$ .

**3.1.6. Monoidal spaces.** A *monoidal space* is a topological space  $X$  provided with a sheaf of monoids  $M_X$ . A morphism of monoidal spaces  $(f, f^\#): (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  is a continuous map  $f: Y \rightarrow X$  and a homomorphism  $f^\#: f^{-1}(M_X) \rightarrow M_Y$  such that for any  $y \in Y$  the homomorphism of monoids  $f_y^\#: M_{X, f(y)} \rightarrow M_{Y, y}$  is local.

**REMARK 3.1.7.** Strictly speaking one should have called the above category the category of locally monoidal spaces and allow non-local homomorphisms in the general category of monoidal spaces. However, we will not use the larger category, so we prefer to abuse the notation slightly.

Spectra of monoids possess the usual universal property, namely:

**LEMMA 3.1.8.** Let  $(X, M_X)$  be a monoidal space and  $P$  be a monoid.

(i) The global sections functor  $\Gamma$  induces a bijection between morphisms of monoidal spaces  $(f, f^\#): (X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), M_P)$  and homomorphisms  $\phi: P \rightarrow \Gamma(M_X)$ .

(ii) If  $M_X$  has sharp stalks then  $\Gamma$  induces a bijection between morphisms of monoidal spaces  $(f, f^\#): (X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$  and homomorphisms  $\phi: P \rightarrow \Gamma(M_X)$ .

*Proof.* (i) Let us construct the opposite map. Given a homomorphism  $\phi$ , for any  $x \in X$  we obtain a homomorphism  $\phi_x: P \rightarrow M_{X, x}$ . Clearly,  $\mathfrak{m} = P \setminus \phi_x^{-1}(M_{X, x}^\times)$  is a prime ideal and hence  $\phi_x$  factors through a uniquely defined local homomorphism  $P_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{X, x}$ . Setting  $f(x) = \mathfrak{m}$  we obtain a map  $f: X \rightarrow \text{Spec}(P)$ , and the rest of the proof of (i) is straightforward.

If the stalks of  $M_X$  are sharp then any morphism  $(X, M_X) \rightarrow (\text{Spec}(P), M_P)$  factors uniquely through  $(\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$ . Also,  $\Gamma(M_X)$  is sharp, hence any homomorphism to it from  $P$  factors uniquely through  $\overline{P}$ . Therefore, (ii) follows from (i).  $\square$

**3.1.9. Fine fans and monoschemes.** A *fine monoscheme* (resp. a *fine fan*) is a monoidal space  $(X, M_X)$  that is locally isomorphic to  $A_P = (\text{Spec}(P), M_P)$  (resp.  $\overline{A}_P = (\text{Spec}(P), \overline{M}_P)$ ), where  $P$  is a fine monoid. We say that  $(X, M_X)$  is *affine* if it is isomorphic to  $A_P$  (resp.  $\overline{A}_P$ ). A morphism of monoschemes (resp. fans) is a morphism of monoidal spaces. A monoscheme (resp. a fan) is called *torsion free* if it is covered by spectra of  $P$ 's with torsion free  $P^{\text{gp}}$ 's. It follows from Remark 3.1.4(iii) that this happens if and only if all groups  $M_{X, x}^{\text{gp}}$  are torsion free.

**REMARK 3.1.10.** (i) Any fs fan is torsion free because if an fs monoid is torsion free then so is any its localization. This is not true for general fine fans. For example, if  $\mu_2 = \{\pm 1\}$  then  $P = \mathbf{N} \oplus \mu_2 \setminus \{(0, -1)\}$  is a sharp monoid with  $P^{\text{gp}} = \mathbf{Z} \oplus \mu_2$ .

(ii) For any point  $x$  of a fine monoscheme (resp. fan)  $X$  the localization  $X_x$  that consists of all generalizations of  $x$  is affine. In particular, by Remark 3.1.4(i)

there exists a unique maximal point generalizing  $x$ , and hence  $X$  is a finite disjoint union of irreducible components.

**3.1.11. Comparison of monoschemes and fans.** There is an obvious sharpening functor  $(X, M_X) \mapsto (X, \overline{M}_X)$  from monoschemes to fans, and there is a natural morphism of monoidal spaces  $(X, \overline{M}_X) \rightarrow (X, M_X)$ . The sharpening functor loses information, and one needs to know  $M_X^{\text{gp}}$  to reconstruct  $M_X$  from  $\overline{M}_X$  as a fibred product (see [Ogus, 2012, 2.1.8.3]). Actually, there are much more fans than monoschemes. For example, the generic point  $\eta \in \text{Spec}(P)$  is open and  $\overline{M}_{P,\eta}$  is trivial hence for any pair of fine monoids  $P$  and  $Q$  we can glue their sharpened spectra along the generic points. What one gets is sort of "piecewise scheme" and, in general, it does not correspond to standard geometric objects, such as schemes or monoschemes. We conclude that, in general, fans can be lifted to monoschemes only locally.

**REMARK 3.1.12.** As a side remark we note that sharpened monoids naturally appear as structure sheaves of piecewise linear spaces (a work in progress of the second author on skeletons of Berkovich spaces). In particular, PL functions can be naturally interpreted as sections of the sharpened sheaf of linear functions on polytopes.

**3.1.13. Local smoothness.** A local homomorphism of fine monoids  $\phi: P \rightarrow Q$  is called *smooth* if it can be extended to an isomorphism  $P \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s \xrightarrow{\sim} Q$ . The following lemma checks that this property is stable under localizations.

**LEMMA 3.1.14.** Assume that  $\phi: P \rightarrow Q$  is smooth and  $P', Q'$  are localizations of  $P, Q$  such that  $\phi$  extends to a local homomorphism  $\phi': P' \rightarrow Q'$ . Then  $\phi'$  is smooth.

*Proof.* Recall that  $P' = P_a$  for  $a \in P$  (notation of §3.1.2), and  $\phi'$  factors through the homomorphism  $\phi_a: P' \rightarrow Q_a$ , which is obviously smooth. Therefore, replacing  $\phi$  with  $\phi_a$  we can assume that  $P = P'$ . Let  $b = (p, n, z) \in Q$  be such that  $Q' = Q_b$ . Then  $p \in P^\times$  because  $P \rightarrow Q'$  is local, and hence  $Q'$  is isomorphic to  $P \oplus (\mathbf{N}^r)_n \oplus \mathbf{Z}^s$ . It remains to note that any localization of  $\mathbf{N}^r$  is of the form  $\mathbf{N}^{r-t} \oplus \mathbf{Z}^t$ .  $\square$

**3.1.15. Smoothness.** The lemma allows to globalize smoothness: a morphism  $f: Y \rightarrow X$  of monoschemes is called *smooth* if the homomorphisms of stalks  $M_{X,f(y)} \rightarrow M_{Y,y}$  are smooth. In particular,  $X$  is *smooth* if its morphism to  $\text{Spec}(1)$  is smooth, that is, the stalks  $M_{X,x}$  are of the form  $\mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s$ . In particular, a smooth monoscheme is torsion free.

Analogous smoothness definitions are given for fans. Moreover, in this case we can consider only sharp monoids, and then the group component  $\mathbf{Z}^s$  is automatically trivial. It follows that we can rewrite the above paragraph almost verbatim but with  $s = 0$ . Obviously, a morphism of monoschemes is smooth if and only if its sharpening is a smooth morphism of fans.

**REMARK 3.1.16.** (i) Recall that any fine monoscheme  $X$  admits an open affine covering  $X = \cup_{x \in X} \text{Spec}(M_{X,x})$ . It follows that a morphism of fine monoschemes  $f: Y \rightarrow X$  is smooth if and only if it is covered by open affine charts of the form  $\text{Spec}(P \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s) \rightarrow \text{Spec}(P)$ .

(ii) Smooth morphisms of fine fans admit a similar local description, and we leave the details to the reader.

**3.1.17. Saturation.** As usually, for a fine monoid  $P$  we denote its saturation by  $P^{\text{sat}}$  (it consists of all  $x \in P^{\text{gp}}$  with  $x^n \in P$  for some  $n > 0$ ). Saturation is compatible with localizations and sharpening and hence extends to a saturation functor  $F \mapsto F^{\text{sat}}$  on the categories of fine monoschemes (resp. fine fans). We also have a natural morphism  $F^{\text{sat}} \rightarrow F$ , which is easily seen to be bijective. So, actually,  $(F, M_F)^{\text{sat}} = (F, M_F^{\text{sat}})$ .

**3.1.18. Ideals.** A subsheaf of ideals  $\mathcal{I} \subseteq M_X$  on a monoscheme  $(X, M_X)$  is called a *coherent ideal* if for any point  $x \in X$  the restriction of  $\mathcal{I}$  on  $X_x$  coincides with  $\mathcal{I}_x M_{X_x}$ . (Due to Remark 3.1.4(iii) this means that  $\mathcal{I}$  is coherent in the usual sense, i.e. its restriction on an open affine submonoscheme  $U$  is generated by the global sections over  $U$ .) We will consider only coherent ideals, so we will omit the word "coherent" as a rule. An ideal  $\mathcal{I} \subseteq M_X$  is *invertible* if it is locally generated by a single element.

**3.1.19. Blow ups.** Similarly to schemes, for any non-empty ideal  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  there exists a universal morphism of monoschemes  $h: X' \rightarrow X$  such that the *pullback ideal*  $h^{-1}\mathcal{I} = \mathcal{I}M_{X'}$  is invertible. We call  $\mathcal{I}$  the *center* of the blow up. (One does not have an adequate notion of closed submonoscheme, so unlike blow ups of the scheme it would not make sense that " $V(\mathcal{I})$ " is the center.) An explicit construction of  $X'$  copies its scheme analog: it is local on the base and for an affine  $X = \text{Spec}(P)$  with an ideal  $I \subseteq P$  corresponding to  $\mathcal{I}$  one glues  $X'$  from the charts  $\text{Spec}(P[a^{-1}I])$ , where  $a \in I$  and  $P[a^{-1}I]$  is the submonoid of  $P^{\text{gp}}$  generated by the fractions  $b/a$  for  $b \in I$  (see [Ogus, 2012, Ch. 2, §1.6] for details).

**REMARK 3.1.20.** Blow ups induce isomorphisms on the stalks of  $M^{\text{gp}}$ ; this is an analog of the fact that blow ups of schemes along nowhere dense subschemes are birational morphisms.

**3.1.21. Saturated blow ups.** Analogously to normalized blow ups, one defines *saturated blow up* of a monoscheme  $X$  along an ideal  $\mathcal{I} \subset M_X$  as the saturation of  $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)$ . The same argument as for schemes shows that  $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)^{\text{sat}}$  is the universal saturated  $X$ -monoscheme such that the pullback of  $\mathcal{I}$  is invertible.

**3.1.22. Towers and pullbacks.** Towers of (saturated) blow ups of a monoscheme  $X$  are defined in the obvious way. Given such a tower  $X_{\bullet}$  with  $X = X_0$  and a morphism  $f: Y \rightarrow X$  we define the *pullback tower*  $Y_{\bullet} = f^*(X_{\bullet})$  as follows:  $Y_0 = Y$  and  $Y_{i+1}$  is the (saturated) blow up of  $Y_i$  along the pullback of the center  $\mathcal{I}_i$  of  $X_{i+1} \rightarrow X_i$ . Due to the universal property of (saturated) blow ups this definition makes sense and  $Y_{\bullet}$  is the universal (saturated) blow up tower of  $Y$  that admits a morphism to  $X_{\bullet}$  extending  $f$ .

**REMARK 3.1.23.** Unlike pullbacks of (normalized) blow up towers of schemes, see §§2.1.7 and 2.2.8, we do not distinguish strict transforms and pullbacks. The above definition of pullback covers our needs, and we do not have to study the base change of monoschemes. For the sake of completeness, we note that fibred products of monoschemes exist and in the affine case are defined by amalgamated sums of monoids, see [Deitmar, 2005]. Also, it is easy to check that for a smooth  $f$  (which is the only case we will use) one indeed has that  $f^*(X_{\bullet}) = X_{\bullet} \times_X Y$  for any (saturated) blow up tower  $X_{\bullet}$ . For blow ups one checks this with charts and in the saturated case one also uses that saturation is compatible with a smooth morphism  $f: Y \rightarrow X$ , i.e.  $Y^{\text{sat}} \xrightarrow{\sim} X^{\text{sat}} \times_X Y$ .

**3.1.24. Compatibility with sharpening.** Ideals and blow ups of fans are defined in the same way, but with  $\overline{M}_X$  used instead of  $M_X$  (Kato defines their saturated version in [Kato, 1994, 9.7]). Towers of blow ups of fans are defined in the obvious way.

**LEMMA 3.1.25.** Let  $X = (X, M_X)$  be a monoscheme, let  $(F, M_F) = (X, \overline{M}_X)$  be the corresponding fan and let  $\lambda: M_X \rightarrow M_F$  denote the sharpening homomorphism.

- (i)  $\mathcal{I} \mapsto \lambda(\mathcal{I})$  induces a natural bijection between the ideals on  $X$  and on  $F$ .
- (ii) Blow ups are compatible with sharpening, that is, the sharpening of  $\text{Bl}_{\mathcal{I}}(X)$  is naturally isomorphic to  $\text{Bl}_{\lambda(\mathcal{I})}(F)$ . The same statement holds for saturated blow ups.
- (iii) Sharpening induces a natural bijection between the (saturated) blow up towers of  $X$  and  $F$ .

*Proof.* (i) is obvious. (ii) is shown by comparing the blow up charts. Combining (i) and (ii), we obtain (iii).  $\square$

**3.1.26. Desingularization.** Using the above notions of smoothness and blow ups, one can copy other definitions of the desingularization theory. By a *desingularization* (resp. *saturated desingularization*) of a fine monoscheme  $X$  we mean a blow up tower (resp. saturated blow up tower)  $X_n \dashrightarrow X_0 = X$  with smooth  $X_n$ . By Remark 3.1.20, if  $X$  admits a desingularization then it is torsion free, and we will later see that the converse is also true.

For concreteness, we consider below non-saturated desingularizations, but everything extends to the saturated case verbatim. A family  $\mathcal{F}^{\text{mono}}(X)$  of desingularizations of torsion free monoschemes is called *functorial* (with respect to smooth morphisms) if for any smooth  $f: Y \rightarrow X$  the desingularization  $\mathcal{F}^{\text{mono}}(Y)$  is the contracted pullback of  $\mathcal{F}^{\text{mono}}(X)$ . The same argument as for schemes (see Remark 2.3.5(ii)) shows that  $\mathcal{F}^{\text{mono}}$  is already determined by its restriction onto the family of finite disjoint unions of affine monoschemes.

The definition of a functorial desingularization  $\mathcal{F}^{\text{fan}}$  of fine torsion free fans is similar. Since blow up towers and smoothness are compatible with the sharpening functor, it follows that a desingularization of a monoscheme  $X$  induces a desingularization of its sharpening. Moreover, any affine fan can be lifted to an affine monoscheme and  $\mathcal{F}^{\text{fan}}$  is determined by its restriction onto disjoint unions of affine fans, hence we obtain the following result.

**THEOREM 3.1.27.** The sharpening functor induces a natural bijection between functorial desingularizations of fine torsion free monoschemes and functorial desingularizations of fine torsion free fans. A similar statement holds for saturated desingularizations.

**REMARK 3.1.28.** Similarly to the normalization of a desingularization tower, to any desingularization  $\mathcal{F}$  of monoschemes or fans one can associate a saturated desingularization  $\mathcal{F}^{\text{sat}}$ : one replaces all levels of the towers, except the zero level, with their saturations. In this case blow ups are replaced with saturated blow ups along the pulled back ideals. If  $\mathcal{F}$  is functorial with respect to all smooth morphisms then the same is true for  $\mathcal{F}^{\text{sat}}$ . Indeed, for any smooth  $Y \rightarrow X$  the centers of  $\mathcal{F}(Y)$ ,  $\mathcal{F}^{\text{sat}}(X)$  and  $\mathcal{F}^{\text{sat}}(Y)$  are the pullbacks of those of  $\mathcal{F}(X)$ . In addition, the saturation construction is compatible with the bijections from Theorem 3.1.27 in the obvious way.

**REMARK 3.1.29.** In principle, (saturated) desingularization of fans or monoschemes can be described in purely combinatorial terms of fans and their subdivisions (e.g. see [Kato, 1994, 9.6] or [Nizioł, 2006, §4]). However, it is not easy to construct a functorial one directly. We will instead use a relation between monoschemes and toric varieties to descend desingularization of toric varieties to monoschemes and fans.

### 3.2. Monoschemes and toric varieties.

**3.2.1. Base change from monoschemes to schemes.** Let  $S$  be a scheme. The following proposition introduces a functor from monoschemes to  $S$ -schemes that can be intuitively viewed as a base change with respect to a "morphism"  $S \rightarrow \text{Spec}(1)$ .

**PROPOSITION 3.2.2.** *Let  $S$  be a scheme and  $F$  be a monoscheme. Then there exists an  $S$ -scheme  $X = S[F]$  with a morphism of monoidal spaces  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$  such that any morphism  $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (F, M_F)$ , where  $Y$  is an  $S$ -scheme, factors uniquely through  $f$ .*

*Proof.* Assume, first, that  $F = \text{Spec}(P)$  is affine. By Lemma 3.1.8(i), to give a morphism  $(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (F, M_F)$  is equivalent to give a homomorphism of monoids  $\phi: P \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_Y)$ , and the latter factors uniquely through a homomorphism of sheaves of rings  $\mathcal{O}_S[P] \rightarrow \mathcal{O}_Y$ . It follows that  $S[F] = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[P])$  in this case. Since the above formula is compatible with localizations by elements  $a \in P$ , i.e.  $S[F_a] \xrightarrow{\sim} S[F]_{\phi(a)}$ , it globalizes to the case of an arbitrary monoscheme. Thus, for a general monoscheme  $F$  covered by  $F_i = \text{Spec}(P_i)$ , the scheme  $S[F]$  is glued from  $S[F_i]$ .  $\square$

**REMARK 3.2.3.** Note that if  $S = \text{Spec}(R)$  and  $F = \text{Spec}(P)$  then  $S[F] = \text{Spec}(R[P])$ . However, we will often consider an "intermediate" situation where  $S = \text{Spec}(R)$  is affine and  $F$  is a general monoscheme. To simplify notation, we will abuse them by writing  $R[F]$  instead of  $\text{Spec}(R[F])$ . Such "mixed" notation will always refer to a scheme.

**3.2.4. Toric schemes.** If  $F$  is torsion free and connected then we call  $S[F]$  a *toric scheme* over  $S$ . Recall that by Remark 3.1.10(ii),  $F$  possesses a unique maximal point  $\eta = \text{Spec}(P^{\text{gp}})$ , where  $\text{Spec}(P)$  is any affine open submonoscheme. Hence  $X = S[F]$  possesses a dense open subscheme  $T = S[\eta]$ , which is a split torus over  $S$ , and the action of  $T$  on itself naturally extends to the action of  $T$  on  $X$ .

**REMARK 3.2.5.** Assume that  $k$  is a field. Classically, a toric  $k$ -variety is defined as a normal finite type separated  $k$ -scheme  $X$  that contains a split torus  $T$  as a dense open subscheme such that the action of  $T$  on itself extends to the whole  $X$ . If  $F$  is saturated then our definition above is equivalent to the classical one. However, we also consider non-normal toric varieties corresponding to non-saturated monoids.

**3.2.6. Canonical log structures.** For any monoscheme  $F$ , the  $S$ -scheme  $X = S[F]$  possesses a natural log structure induced by the universal morphism  $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$ . Namely,  $M_X$  is the log structure associated with the pre-log structure  $g^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ , where  $g: (X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$  is the composition. We call  $M_X$  the *canonical log structure* of  $X = S[F]$ .

**REMARK 3.2.7.** (i) The canonical log structure is Zariski, as  $\varepsilon_*M_X$  coincides with the Zariski log structure associated with the pre-log structure  $f^{-1}M_F \rightarrow \mathcal{O}_X$ .

(ii) The log scheme  $(X = S[F], M_X)$  is log smooth over the scheme  $S$  provided with the trivial log structure. In particular, if  $S$  is regular and  $F$  is saturated then

$(X, M_X)$  is fs and log regular. Without the saturation assumption we still have that  $X^{\text{sat}} \xrightarrow{\sim} S[\text{F}^{\text{sat}}]$  is log regular, hence  $X$  is log regular in the sense of Gabber (see §3.5).

(iii) If  $\eta$  is the set of generic points of  $F$  then  $T = S[\eta]$  is the open subset of  $X$  which is the triviality set of its log structure. However, the map  $M_X \rightarrow \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_T^\times$  is not an isomorphism in general, as the case where  $T = \text{Spec } \mathbf{C}[t, t^{-1}] \subset X = \text{Spec } \mathbf{C}[t^2, t^3]$  already shows: the image of  $t^2 + t^3$  in  $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$  belongs to  $(j_* \mathcal{O}_T^\times)_{\{0\}}$ , but does not belong to  $M_{\{0\}} = t^P \mathcal{O}_{X, \{0\}}^\times$ , where  $P$  is the (fine, but not saturated) submonoid of  $\mathbf{N}$  generated by 2 and 3. (We use that  $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$  is strictly smaller than its normalization  $\mathbf{C}[t]_{(t)} = \mathcal{O}_{X, \{0\}}[t]$  and hence  $\frac{t^2+t^3}{t^2} = 1 + t$  is not contained in  $\mathcal{O}_{X, \{0\}}$ .)

**3.2.8. Toric saturation.** Saturation of monoschemes corresponds to normalization of schemes. This will play an essential role later, since we get a combinatorial description of the normalization.

**LEMMA 3.2.9.** If  $S$  is a normal scheme and  $F$  is a fine monoscheme then there is a natural isomorphism  $S[F]^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} S[\text{F}^{\text{sat}}]$ .

*Proof.* Note that  $f: \mathbf{Z}[\text{F}^{\text{sat}}] \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$  is a flat morphism and its fibers are normal because they are classical toric varieties  $\mathbf{F}_p[\text{F}^{\text{sat}}]$ . So,  $f \times S: S[\text{F}^{\text{sat}}] \rightarrow S$  is a flat morphism with normal fibers and normal target, and we obtain that its source is normal by [Matsumura, 1980a, 21.E(iii)]. It remains to note that  $S[\text{F}^{\text{sat}}] \rightarrow S[F]$  is a finite morphism inducing isomorphism of dense open subschemes  $S[\text{F}^{\text{gp}}]$ , hence  $S[\text{F}^{\text{sat}}]$  is the normalization of  $S[F]$ .  $\square$

**REMARK 3.2.10.** The same argument shows that if  $S$  is Cohen-Macaulay then so is  $S[\text{F}^{\text{sat}}]$ .

**3.2.11. Toric smoothness.** Next, let us compare smoothness of morphisms of monoschemes as defined in §3.1.15 and classical smoothness of toric morphisms. The following lemma slightly extends the classical result (e.g. see [Fulton, 1993, §2.1]) that if  $P$  is fs and  $\mathbf{C}[P]$  is regular then  $P \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^s$ .

**LEMMA 3.2.12.** Let  $f: F \rightarrow F'$  be a morphism of fine monoschemes and let  $S$  be a scheme.

- (i) If  $f$  is smooth then  $S[f]$  is smooth (as a morphism of schemes).
- (ii) If  $F$  is torsion free and the morphism  $S[F] \rightarrow S$  is smooth then  $F$  is smooth.

*Proof.* Part (i) is obvious, so let us check (ii). We can also assume that  $F = \text{Spec}(P)$  is affine. Also, we can replace  $S$  with any of its points achieving that  $S = \text{Spec}(k)$ . Then  $P$  is a fine torsion free monoid and  $k[P] \subseteq k[P^{\text{gp}}] \xrightarrow{\sim} k[\mathbf{Z}^n]$ . It follows that  $X = \text{Spec}(k[P])$  is an integral smooth  $k$ -variety of dimension  $n$ . Note that  $\text{Spec}(k[P^{\text{sat}}])$  is a finite modification of  $X$  which is generically an isomorphism. Since  $X$  is normal we have that  $\text{Spec}(k[P^{\text{sat}}]) \xrightarrow{\sim} X$ , and it follows that  $P$  is saturated. Now,  $P \xrightarrow{\sim} \bar{P} \oplus \mathbf{Z}^l$  and hence  $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(k[\bar{P}]) \times_k \mathbf{G}_m^l$ . Obviously,  $\text{Spec}(k[\bar{P}])$  is smooth of dimension  $r = n - l$  and our task reduces to showing that  $\bar{P} \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^r$ .

Let  $\mathfrak{m} = \bar{P} \setminus \{1\}$  be the maximal ideal of  $\bar{P}$ . Then  $I = k[\mathfrak{m}]$  is a maximal ideal of  $k[\bar{P}]$  with residue field  $k$ . In particular, by  $k$ -smoothness of  $k[\bar{P}]$  we have that  $\dim_k(I/I^2) = r$ . On the other hand,  $I = \bigoplus_{x \in \mathfrak{m}} xk$  and  $I^2 = \bigoplus_{x \in \mathfrak{m}^2} xk$ , hence

$I/I^2 \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in m \setminus m^2} xk$  and we obtain that  $m \setminus m^2$  consists of  $r$  elements  $t_1, \dots, t_r$ . Note that these elements generate  $\overline{P}$  as a monoid and hence they generate  $\overline{P}^{\text{gp}}$  as a group. Since  $\overline{P}^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^r$ , the elements  $t_1, \dots, t_r$  are linearly independent in  $\overline{P}^{\text{gp}}$ , and we obtain that the surjection  $\bigoplus_{i=1}^r t_i^{\mathbf{N}} \rightarrow \overline{P}$  is an isomorphism.  $\square$

**REMARK 3.2.13.** It seems very probable that, much more generally,  $f$  is smooth whenever  $S[f]$  is smooth as a morphism of schemes and one of the following conditions holds: (a)  $S$  has points in all characteristics, (b) the homomorphisms  $M_{F',x'}^{\text{gp}} \rightarrow M_{F,x}^{\text{gp}}$  induced by  $f$  have torsion free kernels and cokernels. We could prove this either in the saturated case or under some milder but unnatural restrictions. The main ideas are similar but the proof becomes more technical. We do not develop this direction here since the lemma covers our needs.

**3.2.14. Toric ideals.** Let  $F$  be a torsion free monoscheme,  $k$  be a field and  $X = k[F]$ . For any ideal  $\mathcal{J}$  on  $F$  one naturally defines an ideal  $k[\mathcal{J}]$  on  $X$ : in local charts, an ideal  $I \subseteq P$  goes to the ideal  $\text{Ik}[P] = k[I] = \bigoplus_{a \in I} ak$  in  $k[P]$ . We say that  $\mathcal{J} = k[\mathcal{J}]$  is a *monoidal ideal* on  $k[F]$ . Note that  $\mathcal{J}$  determines  $\mathcal{J}$  uniquely and, actually,  $\mathcal{J} = \mathcal{J} \cap M_X$  (this is obvious in local charts).

**LEMMA 3.2.15.** Assume that  $F$  is connected,  $\eta$  is its maximal point,  $X = k[F]$ , and  $T = k[\eta]$  is the torus of the toric scheme  $X$ . A coherent ideal  $\mathcal{J} \subseteq M_X$  is  $T$ -equivariant if and only if it is monoidal.

*Proof.* Any monoidal ideal is obviously  $T$ -equivariant, so let us prove the inverse implication. The claim is local, so we should prove that any  $T$ -equivariant ideal  $J \subset A = k[P]$  is of the form  $k[I]$  for an ideal  $I$  of  $P$ . Consider the coaction homomorphism  $\mu: A \rightarrow A \otimes_k k[P^{\text{gp}}] = B$ . The equivariance of  $J$  means that  $JB$  (with respect to the embedding  $A \hookrightarrow A \otimes_k k[P^{\text{gp}}]$ ) is equal to  $\mu(J)B$ . In particular,  $\mu|_J: J \rightarrow JB = J \otimes_k k[P^{\text{gp}}]$  induces a  $P^{\text{gp}}$ -grading on  $J$  compatible with the  $P^{\text{gp}}$ -grading  $A = \bigoplus_{\gamma \in P} A_\gamma$ . Thus,  $J$  is a homogeneous ideal in  $A$  and, since  $A_1 = k$  is a field and each  $k$ -module  $A_\gamma$  is of rank one, we obtain that  $J = \bigoplus_{\gamma \in I} A_\gamma$  for a subset  $I \subseteq P$ . Thus,  $J = k[I]$ , and clearly  $I$  is an ideal.  $\square$

**3.2.16. Toric blow ups.** We will also need the well known fact that toric blow ups are of combinatorial origin, i.e. they are induced from blow ups of monoschemes.

**LEMMA 3.2.17.** Assume that  $F$  is a torsion free monoscheme,  $\mathcal{J} \subseteq M_F$  is an ideal,  $X = k[F]$ , and  $\mathcal{J} = k[\mathcal{J}]$ . Then there is a canonical isomorphism  $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X) \xrightarrow{\sim} k[\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)]$ .

*Proof.* Assume first that  $F = \text{Spec}(P)$ . Then  $\mathcal{J}$  corresponds to an ideal  $I \subseteq P$  and we can simply compare charts:  $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)$  is covered by the charts  $\text{Spec}(P[a^{-1}I])$  for  $a \in I$ , and, since  $I$  generates  $J$ , the charts  $k[a^{-1}I] = k[P[a^{-1}I]]$  cover  $\text{Bl}_I(X)$ . This construction is compatible with localizations  $(P, I) \mapsto (P_b, b^{-1}I)$  hence it globalizes to the case of a general fine monoscheme with an ideal.  $\square$

Using Lemma 3.2.9 we obtain a similar relation between saturated blow ups and normalized toric blow ups.

**COROLLARY 3.2.18.** Keep notation of Lemma 3.2.17. Then  $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)^{\text{nor}} \xrightarrow{\sim} k[\text{Bl}_{\mathcal{J}}(F)^{\text{sat}}]$ .

**3.2.19. Desingularization of monoschemes.** Let  $F$  be a torsion free monoscheme and  $X = k[F]$  for a field  $k$  of characteristic zero (e.g.  $k = \mathbf{Q}$ ). Recall that the normalized desingularization functor  $\widetilde{\mathcal{F}}$  from §2.3.9 is compatible with the action of any smooth  $k$ -group, hence the centers of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X): X_n \dashrightarrow X_0 = X$  are  $T$ -equivariant ideals. By Lemma 3.2.15, the blown up ideal of  $X_0$  is of the form  $k[\mathcal{I}]$  for an ideal  $\mathcal{I} \subseteq M_F$ , hence  $X_1 = k[F_1]$  for  $F_1 = \text{Bl}_{\mathcal{I}}(F)^{\text{sat}}$  by Lemma 3.2.18. Applying this argument inductively we obtain that the entire normalized blow up tower  $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$  descends to a saturated blow up tower of  $F$ , which we denote as  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F)$  (in other words,  $\widetilde{\mathcal{F}}(X) = k[\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F)]$ ). Since  $F_n$  is smooth by Lemma 3.2.12(ii), the tower  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F)$  is a desingularization of  $F$ . Moreover, part (i) of the same lemma implies that  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}$  is functorial with respect to smooth morphisms of monoschemes. Namely, for any smooth morphism  $F' \rightarrow F$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F')$  is the contracted pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F)$  (see §3.1.22). Summarizing, we have obtained:

**THEOREM 3.2.20.** Let  $k$  be a field and let  $\widetilde{\mathcal{F}}$  be a normalized desingularization of disjoint unions of toric  $k$ -varieties which is functorial with respect to smooth morphisms. Then each normalized blow up tower  $\widetilde{\mathcal{F}}(k[F])$  is the pullback of a uniquely defined saturated blow up tower of monoschemes  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F)$ . This construction produces a saturated desingularization of monoschemes which is functorial with respect to smooth morphisms.

Combining theorems 3.1.27 and 3.2.20 we obtain a functorial saturated desingularization of fans that will be denoted  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}$ .

**REMARK 3.2.21.** We will work with normalized and saturated desingularizations, so we formulated the theorem for  $\widetilde{\mathcal{F}}$ . The same argument shows that  $\mathcal{F}$  induces desingularizations  $\mathcal{F}^{\text{mono}}$  and  $\mathcal{F}^{\text{fan}}$  that are functorial with respect to all smooth morphisms. Moreover, the descent from toric desingularization is compatible with normalization/saturation, i.e.  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}} = (\mathcal{F}^{\text{mono}})^{\text{sat}}$  and similarly for fans.

**3.3. Monoidal desingularization.** In this section we will establish, what we call, monoidal desingularization of fine log schemes  $(X, M_X)$ . This operation "resolves" the sheaf  $\overline{M}_X$  but does not "improve" the log strata of  $X$ .

**3.3.1. Log stratification.** Using charts one immediately checks that for any fine log scheme  $(X, M_X)$  the function  $x \mapsto \text{rank}(\overline{M}_x^{\text{gp}})$  is constructible. The corresponding stratification of  $X$ , whose strata are the maximal locally closed subsets on which this function is constant, will be called the *log stratification* (the analogous stratification in VI-1.5 was called canonical or stratification by rank).

**3.3.2. Monoscheme charts of log schemes.** A (global) *monoscheme chart* of a Zariski log scheme  $(X, M_X)$  is a morphism of monoidal spaces  $c: (X, \varepsilon_* M_X) \rightarrow (F, M_F)$  such that the target is a monoscheme and  $\varepsilon_* M_X$  is isomorphic to the Zariski log structure associated with the pre-log structure  $c^{-1} M_F \rightarrow \mathcal{O}_X$  (obtained as  $c^{-1} M_F \rightarrow M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ ). In particular,  $M_X$  is the log structure associated with  $(c \circ \varepsilon)^{-1} M_F \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ . We say that the chart is *fine* if  $(F, M_F)$  is so. For example, any toric scheme  $R[F]$ , where  $F$  is a monoscheme, possesses a canonical chart  $R[F] \rightarrow F$ .

**LEMMA 3.3.3.** Let  $(X, M_X)$  be a log scheme and let  $(F, M_F)$  be a monoscheme. Then any morphism of monoidal spaces  $f: (X, M_X) \rightarrow (F, M_F)$  factors uniquely



into the composition of a morphism of log schemes  $(X, M_X) \rightarrow \mathbf{Z}[F]$  and the canonical chart  $\mathbf{Z}[F] \rightarrow F$ .

*Proof.* Note that  $(\text{Id}_X, \alpha): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, M_X)$  is a morphism of monoidal spaces, hence so is the composition  $h: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (F, M_F)$ . If  $F = \text{Spec}(P)$  then  $h$  is determined by the homomorphism  $P \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$  by Lemma 3.1.8. Since the latter factors uniquely into the composition of the homomorphism of monoids  $P \rightarrow \mathbf{Z}[P]$  and the homomorphism of rings  $\mathbf{Z}[P] \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_X)$ , we obtain a canonical factoring  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P]) \rightarrow \text{Spec}(P)$ . Furthermore, this affine construction is compatible with localizations of  $P$ , hence it globalizes to the case when the monoscheme  $F$  is arbitrary.  $\square$

**REMARK 3.3.4.** (i) Usually, one works with log schemes using local charts  $(X, M_X) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ . By Lemma 3.3.3 this is equivalent to working with affine monoscheme charts.

(ii) In particular, any fine log scheme  $(X, M_X)$  admits a fine monoscheme chart étale-locally, i.e., there exists a strict (in the log sense) étale covering  $(Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  whose source possesses a fine monoscheme chart. Similarly, any Zariski fine log scheme admits a fine monoscheme chart Zariski locally.

**3.3.5. Chart base change.** Given a fine monoscheme chart  $(X, M_X) \rightarrow F$  and a morphism of monoschemes  $F' \rightarrow F$  we will write  $(X, M_X) \times_F F'$  instead of  $(X, M_X) \times_{\mathbf{Z}[F]} \mathbf{Z}[F']$ , where the second product is taken in the category of fine log schemes. This notation is partially justified by the following result.

**LEMMA 3.3.6.** Keep the above notation and let  $(X', M_{X'}) = (X, M_X) \times_F F'$ .

(i) The morphism  $c': (X', M_{X'}) \rightarrow F'$  is a monoscheme chart.

(ii) If  $(Y, M_Y)$  is a log scheme over  $(X, M_X)$  and  $d: (Y, M_Y) \rightarrow F$  is the induced morphism of monoidal spaces, then any lifting of  $d$  to a morphism  $(Y, M_Y) \rightarrow F'$  factors uniquely through  $c'$ .

*Proof.* Strictness is stable under base changes, hence  $(X', M_{X'}) \rightarrow \mathbf{Z}[F']$  is strict and we obtain (i). The assertion of (ii) is a consequence of Lemma 3.3.3.  $\square$

**3.3.7. Log ideals.** By *log ideal* on a fine log scheme  $(X, M_X)$  we mean any ideal  $\mathcal{I} \subseteq M_X$  that étale-locally on  $X$  admits a coherent chart as follows: there exists a strict étale covering  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$ , a fine monoscheme chart  $c: (Y, M_Y) \rightarrow F$  and a coherent ideal  $\mathcal{I}_F \subseteq M_F$  such that  $f^{-1}(\mathcal{I})M_Y = c^{-1}(\mathcal{I}_F)M_Y$ .

**3.3.8. Log blow ups.** It is proved in [Nizioł, 2006, 4.2] that there exists a universal morphism  $f: (X', M_{X'}) \rightarrow (X, M_X)$  such that the ideal  $f^{-1}(\mathcal{I})M_{X'}$  is invertible, i.e. locally (in the étale topology) generated by one element. (We use here that, unlike rings, any principal ideal  $aM$  of an integral monoid  $M$  is invertible in the usual sense, i.e.  $M \xrightarrow{\sim} aM$  as  $M$ -sets.) Actually, the formulation in [Nizioł, 2006] refers only to saturated blow ups, but the proof deals also with the non-saturated ones.

The construction of log blow up is standard and it also shows that they are compatible with arbitrary strict morphisms. If  $(X, M_X)$  and  $\mathcal{I}$  admit a chart  $F, \mathcal{I} \subseteq M_F$  then  $(X', M_{X'}) = (X, M_X) \times_F \text{Bl}_{\mathcal{I}}(F)$  is as required. If  $(Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  is strict then  $F$  is also a chart of  $(Y, M_Y)$ , hence the local construction is compatible with strict morphisms. The general case now follows by descent because any fine log scheme admits a chart étale locally. We call  $f$  the *log blow up* of  $(X, M_X)$  along  $\mathcal{I}$  and denote it  $\text{LogBl}_{\mathcal{I}}(X, M_X)$  (it is called *unsaturated log blow*

up in [Nizioł, 2006]). Log blow up towers are defined obviously. As usually, contraction of such a tower is obtained by removing all empty log blow ups (i.e. blow ups along  $\mathcal{S} = M_X$ ).

**3.3.9. Saturated log blow ups.** Saturated log blow up along a log ideal  $\mathcal{S}$  is defined as  $(\text{LogBl}_{\mathcal{S}}(X, M_X))^{\text{sat}}$ . It satisfies an obvious universal property too. (It is called log blow up in [Nizioł, 2006]). Towers of saturated log blow ups, their pullbacks, and saturation of a tower of log blow ups are defined in the obvious way.

**3.3.10. Pullbacks.** Let  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  be a morphism of log schemes. By *pullback* of the log blow up  $\text{LogBl}_{\mathcal{S}}(X, M_X)$  along a log ideal  $\mathcal{S} \subseteq M_X$  we mean the log blow up  $\text{LogBl}_{\mathcal{S}}(Y, M_Y)$ , where  $\mathcal{S} = f^{-1}(\mathcal{S})M_Y$ . This is the universal log scheme over  $(Y, M_Y)$  whose morphism to  $(X, M_X)$  factors through  $\text{LogBl}_{\mathcal{S}}(X, M_X)$ . The pullback of saturated blow ups is defined similarly, and these definitions extend inductively to pullbacks of towers of (saturated) log blow ups.

**3.3.11. Basic properties.** Despite the similarity with usual blow ups of schemes, log blow ups (resp. saturated log blow ups) have nice properties that are not satisfied by usual blow ups. First, it is proved in [Nizioł, 2006, 4.8] that log blow ups are compatible with any log base change  $f: Y \rightarrow X$ , i.e.  $\text{LogBl}_{f^{-1}(\mathcal{S})}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{LogBl}_{\mathcal{S}}(X) \times_X Y$  for a monoidal ideal  $\mathcal{S}$  on  $X$ . In particular, saturated blow ups are compatible with saturated base changes. Second, log blow ups (resp. saturated log blow ups) are log étale morphisms because so are both saturation morphisms and charts of the form  $\mathbf{Z}[\text{Bl}_{\mathcal{S}}(F)] \rightarrow \mathbf{Z}[F]$ .

**3.3.12. Fan charts.** A *fan chart* of a Zariski log scheme  $(X, M_X)$  is a morphism  $d: (X, \varepsilon_* \overline{M}_X) \rightarrow (F, M_F)$  of monoidal spaces such that the target is a fan and  $d^{-1}(M_F) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_* \overline{M}_X$ . For example, for any monoscheme chart  $c: (X, \varepsilon_* M_X) \rightarrow (F, M_F)$ , its sharpening  $\overline{c}: (X, \varepsilon_* \overline{M}_X) \rightarrow (F, \overline{M}_F)$  is a fan chart. Fan charts were considered by Kato (e.g., in [Kato, 1994, 9.9]). They contain less information than monoscheme charts, but "remember everything about ideals and blow ups" because there is a one-to-one correspondence between ideals and blow up towers of  $M_F$  and  $\overline{M}_F$ . Let us make this observation rigorous. For concreteness, we discuss only non-saturated (log) blow ups, but everything easily extends to the saturated case.

**REMARK 3.3.13.** (i) Assume that  $\overline{c}: (X, \overline{M}_X) \rightarrow (F, M_F)$  is a fan chart. Any ideal  $\mathcal{S}_F \subseteq M_F$  induces a log ideal  $\mathcal{S} \subset M_X$ , which is the preimage of  $\overline{c}^{-1}(\mathcal{S}_F)\overline{M}_X$  under  $M_X \rightarrow \overline{M}_X$ . We say that the blow up  $F' = \text{Bl}(\mathcal{S}_F)$  induces the log blow up  $(X', \overline{M}_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{S}}(X, \overline{M}_X)$  or that the latter log blow up is the *pullback* of  $\text{Bl}(\mathcal{S}_F)$ . Furthermore,  $(X', \overline{M}_{X'}) \rightarrow F'$  is also a fan chart (see [Kato, 1994, 9.9], where the fs case is treated), hence this definition iterates to a tower  $F_{\bullet}$  of blow ups of  $F$ . We will denote the pullback tower of log blow ups as  $\overline{c}^*(F_{\bullet})$ .

(ii) By a slight abuse of language, Kato and Nizioł denote  $\overline{c}^*(F_{\bullet})$  as  $(X, M_X) \times_F F_{\bullet}$ . One should be very careful with this notation because, in general, there is no morphism  $(X, M_X) \rightarrow F$  that lifts  $\overline{c}$ . Also, one cannot define analogous "base change" for an arbitrary morphism of fans  $F' \rightarrow F$ . The reason is that there are many "unnatural" gluings in the category of fans (e.g. along generic points), and such gluings cannot be lifted to log schemes (and even to monoschemes).

(iii) For blow up towers, however, the base change notation is safe and agrees with the base change from the monoschemes. Namely, if  $\overline{c}$  is the sharpening of

a monoscheme chart  $c: (X, M_X) \rightarrow (F, M_F)$  then there exists a one-to-one correspondence between blow up towers of the monoscheme  $F = (F, M_F)$  and the fan  $\bar{F} = (F, \bar{M}_F)$ , see Lemma 3.1.25. Clearly, the matching towers induce the same log blow up tower of  $(X, M_X)$ . In particular,  $\mathcal{F}^{\text{mono}}(F, M_F)$  and  $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F, \bar{M}_F)$  (see Theorem §3.1.27) induce the same log blow up tower of  $(X, M_X)$ .

**3.3.14. Monoidal desingularization of log schemes.** Let  $(X, M)$  be a fine log scheme and assume that  $(X, M)$  is *monoidally torsion free* in the sense that the groups  $\bar{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}}$  are torsion free. By *monoidal desingularization* (resp. *saturated monoidal desingularization*) of a fine log scheme  $(X, M)$  we mean a tower of log blow ups (resp. tower of saturated log blow ups)  $(X_n, M_n) \dashrightarrow (X_0, M_0) = (X, M)$  such that for any geometric point  $\bar{x} \rightarrow X_n$  the stalk of  $\bar{M}_n$  at  $\bar{x}$  is a free monoid. A morphism  $(Y, N) \rightarrow (X, M)$  is called *monoidally smooth* if each induced homomorphism of stalks of monoids  $\bar{M}_{\bar{x}} \rightarrow \bar{N}_{\bar{y}}$  can be extended to an isomorphism  $\bar{M}_{\bar{x}} \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\sim} \bar{N}_{\bar{y}}$ .

**THEOREM 3.3.15.** Let  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}$  be a saturated desingularization of fine torsion free fans which is functorial with respect to smooth morphisms. Then there exists unique saturated monoidal desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$  of monoidally torsion free fine log schemes  $(X, M)$ , such that  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}$  is functorial with respect to all monoidally smooth morphisms and  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$  is the contraction of  $c^*(\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}(F))$  for any log scheme  $(X, M)$  that admits a fan chart  $c: (X, \bar{M}_X) \rightarrow F$ . In the same way, a functorial desingularization  $\mathcal{F}^{\text{fan}}$  induces a monoidal desingularization  $\mathcal{F}^{\text{log}}$ .

**REMARK 3.3.16.** Since any monoscheme chart induces a fan chart, it then follows from Remark 3.3.13(iii) that  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M)$  is the contraction of  $d^*(\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(F))$  for any log scheme  $(X, M)$  that admits a monoscheme chart  $d: (X, \bar{M}_X) \rightarrow F$ .

*Proof of Theorem 3.3.15.* Both cases are established similarly, so we prefer to deal with  $\mathcal{F}^{\text{fan}}$  (to avoid mentioning saturations at any step of the proof). By descent, it suffices to show that the pullback from fans induces a functorial monoidal desingularization of those fine log schemes that admit a global fan chart. Thus, if  $\mathcal{F}^{\text{log}}$  exists then it is unique, and our aim is to establish existence and functoriality. Both are consequences of the following claim: assume that  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  is a monoidally smooth morphism whose source and target admit fan charts  $d: (Y, \bar{M}_Y) \rightarrow G$  and  $d': (X, \bar{M}_X) \rightarrow F$ , then contractions of  $d^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(G))$  and  $c^*(\mathcal{F}^{\text{fan}}(F))$  are equal, where  $c = d' \circ \bar{f}: (Y, \bar{M}_Y) \rightarrow (X, \bar{M}_X) \rightarrow F$ . Note that  $d^{-1}(\bar{M}_G) \xrightarrow{\sim} \bar{M}_Y$  and the homomorphism  $c^{-1}(\bar{M}_F) \xrightarrow{\sim} \bar{M}_Y$  is smooth.

Choose a point  $y \in Y$  and consider the localizations  $Y' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ ,  $F' = \text{Spec}(M_{F,c(y)})$  and  $G' = \text{Spec}(M_{G,d(y)})$  at  $y$  and its images in the fans. Since  $\phi: M_{G,d(y)} \rightarrow \bar{M}_{Y,y}$  is an isomorphism and the homomorphism  $\psi: M_{F,c(y)} \rightarrow \bar{M}_{Y,y}$  is smooth, we obtain a factorization of  $\psi$  into a composition of a homomorphism  $\lambda: M_{F,c(y)} \rightarrow M_{G,d(y)}$  and  $\phi$ , where  $\lambda$  is smooth. Set  $U = c^{-1}(F') \cap d^{-1}(G')$ . Then  $U$  is a neighborhood of  $y$ , and  $c$  and  $d$  induce homomorphisms  $\phi_U: M_{G,d(y)} \rightarrow \bar{M}_Y(U)$  and  $\psi_U: M_{F,c(y)} \rightarrow \bar{M}_Y(U)$ . Since the monoids are fine, we can shrink  $U$  so that the equality  $\psi_U = \phi_U \circ \lambda$  holds. It then follows from Lemma 3.1.8(ii) that  $c|_U$  factors into a composition of  $d|_U$  and the smooth morphism  $\text{Spec}(\lambda): G' \rightarrow F'$ .

By quasi-compactness of  $Y$  we can now find finite coverings  $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ ,  $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$  and  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ , and smooth morphisms  $\lambda_i: G_i \rightarrow F_i$  such that

$Y_i$  is mapped to  $F_i$  and  $G_i$  by  $c$  and  $d$ , respectively, and the induced maps of monoidal spaces  $c_i: Y_i \rightarrow F_i$  and  $d_i: Y_i \rightarrow G_i$  satisfy  $c_i = \lambda_i \circ d_i$ . Set  $Y' = \coprod_{i=1}^n Y_i$ ,  $F' = \coprod_{i=1}^n F_i$ ,  $G' = \coprod_{i=1}^n G_i$ ,  $c': Y' \rightarrow F'$  and  $d': Y' \rightarrow G'$ . By descent, it suffices to check that contractions of  $c'^{I^*}(\mathcal{F}^{\text{fan}}(F'))$  and  $d'^{I^*}(\mathcal{F}^{\text{fan}}(G'))$  are equal. Since, the morphism  $Y' \rightarrow F'$  factors through the surjective smooth morphism  $F' \rightarrow F$ , and similarly for  $G'$ , these two pullbacks are equal to the contracted pullbacks of  $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F')$  and  $\mathcal{F}^{\text{fan}}(G')$ , respectively. It remains to note that  $Y' \rightarrow F'$  factors through the smooth morphism  $\coprod_{i=1}^n \lambda_i: G' \rightarrow F'$ . Hence  $\mathcal{F}^{\text{fan}}(G')$  is the contracted pullback of  $\mathcal{F}^{\text{fan}}(F')$ , and their contracted pullbacks to  $Y'$  coincide.  $\square$

**3.4. Desingularization of log regular log schemes.** In this section we will see how saturated monoidal desingularization leads to normalized desingularization of log regular log schemes. Up to now we freely considered saturated and unsaturated cases simultaneously, and did not feel any essential difference. This will not be the case in the present section because the notion of log regularity was developed by Kato and Nizioł in the saturated case. Gabber generalized the definition for non-saturated case and extended to that case all main results about log regular log schemes. This was necessary for his original approach, but can be by passed by use of saturated monoidal desingularization. So, we prefer to stick to the saturated case and simply refer to all foundational results about log regular fs log schemes to [Kato, 1994] and [Nizioł, 2006]. For the sake of completeness, we will outline Gabber's results about the general case in §3.5.

**3.4.1. Conventions.** Recall that Kato's notion of log regular fs log schemes was already used in exposé VI, §1.2. Throughout §3.4 we assume that  $(X, M_X)$  is a log regular fs log scheme. Note that the homomorphism  $\alpha_X: M_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  of  $X_{\text{ét}}$ -sheaves is injective by [Nizioł, 2006, 2.6], and actually  $M_X = \mathcal{O}_U^\times \cap \mathcal{O}_X$ , where  $U \subseteq X$  is the triviality locus of  $M_X$ . So, we will freely identify  $M_X$  with a multiplicative submonoid of  $\mathcal{O}_X$ .

**3.4.2. Monoidal ideals.** For any log ideal  $\mathcal{I} \subseteq M_X$  consider the ideal  $\mathcal{J} = \alpha(\mathcal{I})\mathcal{O}_X$  it generates. We call  $\mathcal{I}$  a *monoidal ideal* and by a slight abuse of language, we will write  $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{O}_X$ .

**LEMMA 3.4.3.** Let  $X = (X, M_X)$  be as in §3.4.1. The rules  $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}\mathcal{O}_X$  and  $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K} \cap M_X$  give rise to a one-to-one correspondence between log ideals  $\mathcal{I} \subseteq M_X$  and monoidal ideals  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_X$ .

*Proof.* It suffices to show that any log ideal  $\mathcal{I}$  coincides with  $\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{O}_X \cap M_X$ . The question easily reduces to the case when  $X$  admits a chart  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  and  $\mathcal{I} = IM_X$ ,  $\mathcal{J} = JM_X$  for ideals  $I \subseteq J$  of  $P$ . Assume that the lemma fails, i.e.  $I \subsetneq J$ , and consider the exact sequence

$$(3.a) \quad \mathbf{IZ}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{JZ}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbf{JZ}[P]/\mathbf{IZ}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Since  $\text{Tor}_1^{\mathbf{Z}[P]}(\mathbf{Z}[P]/\mathbf{IZ}[P], \mathcal{O}_X) = 0$  by [Kato, 1994, 6.1(ii)],  $\mathbf{IZ}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X = I\mathcal{O}_X$  and similarly for  $J$ , and we obtain that the first morphism in the sequence (3.a) is  $I\mathcal{O}_X \rightarrow J\mathcal{O}_X$ . To obtain a contradiction, it suffices to show that  $\mathbf{JZ}[P]/\mathbf{IZ}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X \neq 0$ . Note that  $\mathbf{Z}[P]/\mathfrak{m}_P\mathbf{Z}[P]$  is a quotient of  $\mathbf{JZ}[P]/\mathbf{Z}[I]$ , so it remains to note that  $\mathfrak{m}_P\mathcal{O}_X \neq \mathcal{O}_X$  and hence  $\mathbf{Z}[P]/\mathfrak{m}_P\mathbf{Z}[P] \otimes_{\mathbf{Z}[P]} \mathcal{O}_X \neq 0$ .  $\square$

**3.4.4. Interpretation of monoidal smoothness.** Note that by VI-1.7  $(X, M_X)$  is monoidally smooth if and only if  $X$  is regular and in this case the non-triviality locus of  $M_X$  is a normal crossings divisor  $D$ .

**3.4.5. Saturated log blow ups of log regular log schemes.** Using Kato's Tor-independence result [Kato, 1994, 6.1(ii)] Nizioł proved in [Nizioł, 2006, 4.3] that saturated log blow ups of  $(X, M_X)$  are compatible with normalized blow ups along monoidal ideals. Namely, if  $(Y, M_Y) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)^{\text{sat}}$  then  $Y \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J}\theta_X}(X)^{\text{nor}}$ . We will also need more specific results that showed up in the proof of loc.cit., so we collect them altogether in the following lemma.

**LEMMA 3.4.6.** Let  $f: (X, M_X) \rightarrow (Y, M_Y)$  be a strict morphism of fs log regular log schemes, let  $\mathcal{J} \subseteq M_Y$  be a log ideal and  $\mathcal{J}' = f^{-1}\mathcal{J}M_X$ . Set  $(X', M_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}'}(X, M_X)$ ,  $(X'', M_{X''}) = (X', M_{X'})^{\text{sat}}$ ,  $(Y', M_{Y'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(Y, M_Y)$  and  $(Y'', M_{Y''}) = (Y', M_{Y'})^{\text{sat}}$ . Then

(i) The (saturated) log blow up of  $(X, M_X)$  is compatible with (normalized) blow up of  $X$ :  $X' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J}'\theta_X}(X)$  and  $X'' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J}'\theta_X}(X)^{\text{nor}}$ .

(ii) The (normalized) blow up of  $X$  along  $\mathcal{J}'$  is the pullback of the (normalized) blow up of  $Y$  along  $\mathcal{J}$ . In particular,  $X' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y'$  and  $X'' \xrightarrow{\sim} X \times_Y Y''$ .

*Proof.* All claims can be checked étale locally, hence we can assume that there exists a chart  $g: (Y, M_Y) \rightarrow (\mathbf{Z}[P], P)$  and  $\mathcal{J} = g^{-1}(I_0)M_X$  for an ideal  $I_0 \subseteq P$ . Then it suffices to prove (ii) for  $g$  and the induced chart  $g \circ f$  of  $(X, M_X)$ . In particular, this reduces the lemma to the particular case when  $X = \text{Spec}(A)$  and  $f$  is a chart  $(X, M_X) \rightarrow (\mathbf{Z}[P], P)$ . It is shown in the first part of the proof of [Nizioł, 2006, 4.3] that

$$X' \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(A \otimes_{\mathbf{Z}[P]} (\bigoplus_{n=0}^{\infty} I_0^n)) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}^n)$$

The first isomorphism implies that  $X' \rightarrow X$  is the base change of  $\text{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I_0^n) = Y' \rightarrow Y$ , and the second isomorphism means that  $X' \xrightarrow{\sim} \text{Bl}_{\mathcal{J}'\theta_X}(X)$ . This establishes the unsaturated and unnormalized part of the Lemma, and the second part follows in the same way from the second part of the proof of [Nizioł, 2006, 4.3].  $\square$

**REMARK 3.4.7.** It follows from the lemma that the unsaturated log blow up  $(X', M_{X'})$  is log regular in the sense of Gabber, see §3.5. Thus, once log regularity is correctly defined in full generality, it becomes a property preserved by log blow ups (as it should be, since log blow ups are log smooth).

**3.4.8. Desingularization of log regular log schemes.** By Lemmas 3.4.3 and 3.4.6, any saturated log blow up tower  $(X_n, M_n) \dashrightarrow (X, M_X)$  induces a normalized blow up tower  $X_n \dashrightarrow X$ , which completely determines it. Furthermore, by §3.4.4, the first tower is a saturated monoidal desingularization if and only if the second tower is a normalized desingularization. In particular, the saturated monoidal desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M_X)$  induces a normalized desingularization of the scheme  $X$  that depends on  $(X, M_X)$  and will be denoted  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$ .

**THEOREM 3.4.9.** The saturated monoidal desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}$  (see Theorem 3.3.15) gives rise to desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}$  of log regular log schemes that possesses the same functoriality properties: if  $\phi: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  is a monoidally smooth morphism of log regular log schemes then  $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y)$  is the contraction of  $\phi^{\text{st}}(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X))$ . Furthermore, if  $\phi$  is strict then  $\phi^{\text{st}}(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)) = \widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X) \times_X Y$ .

Strictness of  $\phi$  in the last claim is not needed. To remove it one should work out the assertion of Remark 3.1.23.

*Proof.* We should only establish functoriality. Let  $(X', M_{X'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}}(X, M_X)^{\text{sat}}$  be the first saturated blow up of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(X, M_X)$ . Set  $\mathcal{J}' = \phi^{-1}\mathcal{J}M_{Y'}$ , then  $(Y', M_{Y'}) = \text{LogBl}_{\mathcal{J}'}(Y, M_Y)^{\text{sat}}$  is the first saturated blow up of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}(Y, M_Y)$  by functoriality of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{log}}$ . By Lemma 3.4.6,  $X' = \text{Bl}_{\mathcal{J}\mathcal{O}_X}(X)^{\text{nor}}$  and  $Y' = \text{Bl}_{\mathcal{J}'\mathcal{O}_Y}(Y)^{\text{nor}}$ , and using that  $\phi^{-1}(\mathcal{J}\mathcal{O}_X)\mathcal{O}_Y = \mathcal{J}'\mathcal{O}_Y$  we obtain that  $Y'$  is the strict transform of  $X'$ . It remains to inductively apply the same argument to the other levels of the towers. The last claim follows from Lemma 3.4.6(ii).  $\square$

**REMARK 3.4.10.** The same results hold for (non-saturated) monoidal desingularization, which induces a (usual) desingularization of log regular log schemes. For non-saturated log regular log schemes (see §3.5) one should first establish analogs of Lemmas 3.4.3 and 3.4.6 (where the input in the second one does not have to be saturated). Then the same proof as above applies.

**3.4.11. Canonical fans and associated points.** By the *canonical fan*  $\text{Fan}(X)$  of  $(X, M_X)$  we mean the set of maximal points of the log stratification (i.e. the maximal points of the log strata). Alternatively,  $\text{Fan}(X)$  can be described as in [Nizioł, 2006, §2.2] as the set of points  $x \in X$  such that  $\mathfrak{m}_{\bar{x}}$  coincides with the ideal  $I_{\bar{x}} \subseteq \mathcal{O}_{\bar{x}}$  generated by  $\alpha(M_{\bar{x}} - M_{\bar{x}}^{\times})$ .

We provide  $F = \text{Fan}(X)$  with the induced topology and define  $M_F$  to be the restriction of  $\overline{M}_X$  onto  $F$ . For example, for a toric  $k$ -variety  $X = \text{Spec}(k[Z])$ , where  $Z$  is a monoscheme,  $(F, M_F)$  is isomorphic to the sharpening of  $Z$ . More generally, if log scheme  $(X, M_X)$  is Zariski then  $(F, M_F)$  is a fan and the map  $c: X \rightarrow F$  sending any point to the maximal point of its log stratum is a fan chart of  $X$ . This follows easily from the fact that such  $(X, M_X)$  admits monoscheme charts Zariski locally.

**REMARK 3.4.12.** In general,  $(F, M_F)$  does not have to be a fan, but it seems probable that it can be extended to a meaningful object playing the role of algebraic spaces in the category of fans. We will not investigate this direction here.

**LEMMA 3.4.13.** Let  $X = (X, M_X)$  be an fs log regular log scheme with a monoidal ideal  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ . Then:

- (i) The set of associated points of  $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$  is contained in  $\text{Fan}(X)$ .
- (ii) The fans of  $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)$  and  $\text{Bl}_{\mathcal{J}}(X)^{\text{nor}}$  are contained in the preimage of  $\text{Fan}(X)$ .
- (iii) For any tower of monoidal blow ups (resp. normalized monoidal blow ups)  $X_n \dashrightarrow X$ , its set of associated points is contained in  $\text{Fan}(X)$ .

*Proof.* (i) It suffices to check that any  $x \in X - \text{Fan}(X)$  is not an associated point of  $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ . Since associated points are compatible with flat morphisms, we can pass to the formal completion  $\widehat{X}_x = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$ . Let us consider first the more difficult case when  $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  is of mixed characteristic  $(0, p)$ . By VI-1.6,  $A \xrightarrow{\sim} B/(f)$  where  $B = C(k)[[Q]][[\underline{t}]]$ ,  $Q$  is a sharp monoid defining the log structure,  $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ , and  $f \in B$  equals to  $p$  modulo  $(Q \setminus \{1\}, \underline{t})$ . Note that  $n \geq 1$  as otherwise  $Q \setminus \{1\}$  would generate the maximal ideal of  $A$ . In this case,  $x$  is the log stratum of  $\widehat{X}_x$  and hence  $x$  is the maximal point of its log stratum in  $X_x$ , which contradicts that  $x \notin \text{Fan}(X)$ . The completion  $\widehat{\mathcal{J}}$  of  $\mathcal{J}$  is of the form  $IA$  for an ideal  $I \subset Q$ . We should prove that  $x \in \widehat{X}_x$  is not an associated point of  $A/\widehat{\mathcal{J}}$ , or, equivalently,  $\text{depth}(A/\widehat{\mathcal{J}}) \geq 1$ . Since  $B/(fB + \widehat{\mathcal{J}}B) = A/\widehat{\mathcal{J}}$ , it suffices to show that  $\text{depth}(B/\widehat{\mathcal{J}}B) \geq 2$  and  $f$  is a regular element of  $B/\widehat{\mathcal{J}}B$ .

Regularity of  $f$  follows from the following easy claim by taking  $C = C(k)$ ,  $J = I$  and  $R = \mathbb{Q}t_1^N \dots t_n^N$ : if  $C$  is a domain,  $R$  is a sharp monoid with an ideal  $J$ ,  $f$  is an element of  $C[[R]]$  with a non-zero free term, and  $g \in C[[R]]$  satisfies  $fg \in JC[[R]]$  then  $g \in JC[[R]]$ . Next, let us bound the depth of  $B/\widehat{\mathcal{F}}B$ . In view of [Matsumura, 1980a, 21.C], depth is preserved by completions of local rings hence it suffices to show that  $\text{depth}(D_r/ID_r) \geq 2$ , where  $D = C(k)[Q][\underline{t}]$  and  $r = (m_Q, p, \underline{t})$  is the ideal generated by  $m_Q = Q \setminus \{1\}$ ,  $p$  and  $\underline{t}$ . Note that  $D/ID \xrightarrow{\sim} C(k)[\underline{t}][Q \setminus I]$  as a  $C(k)[\underline{t}]$ -module, hence it is a flat  $C(k)[\underline{t}]$ -module and the local homomorphism  $C(k)[\underline{t}]_{(p, \underline{t})} \rightarrow D_r/ID_r$  is flat. By [Matsumura, 1980a, 21.C],  $\text{depth}(D_r/ID_r) \geq \text{depth}(C(k)[\underline{t}]_{(p, \underline{t})}) = n + 1 \geq 2$ , so we have established the mixed characteristic case. In the equal characteristic case we have that  $A = k[[Q]][[\underline{t}]]$ , and the same argument shows that  $\text{depth}(A/\widehat{\mathcal{F}}) \geq \text{depth}(k[\underline{t}]_{(\underline{t})}) = n \geq 1$ .

To prove (ii) we should check that if  $x \in X - \text{Fan}(X)$  then no point of  $\text{Fan}(\text{Bl}_{\mathcal{F}}(X))$  sits over  $x$ . We will only check the mixed characteristic case since it is more difficult. As earlier,  $\widehat{X}_x = \text{Spec}(A)$  where  $A = B/(f)$  and  $B = C(k)[[Q]][[\underline{t}]]$ . Note that  $\psi: \widehat{X}_x \rightarrow X$  is a flat strict morphism of log schemes. Hence  $\psi$  is compatible with blow ups and it maps the fans of  $\widehat{X}_x$  and  $\text{Bl}_{\mathcal{F}}(\widehat{X}_x)$  to the fans of  $X_x$  and  $\text{Bl}_{\mathcal{F}}(X)$ , respectively. Therefore, we should only check that  $\text{Fan}(\text{Bl}_{\mathcal{F}}(\widehat{X}_x))$  is disjoint from the preimage of  $x$ . The latter blow up is covered by the charts  $V_a = \text{Spec}(A[a^{-1}\widehat{\mathcal{F}}])$  with  $a \in I$ . Set  $P' = Q[a^{-1}I]$ ,  $B' = C(k)[[P']][[t_1, \dots, t_n]]/(f)$  and  $A' = B'/(f)$  (where  $f$  is as above). Then the  $m_x$ -adic completion of  $V_a$  is  $\widehat{V}_a = \text{Spec}(A')$ . The ideal defining the closed point of  $\text{Fan}(\widehat{V}_a)$  is generated by the maximal ideal  $m'$  of  $P'$ . This ideal does not contain any  $t_i$ . Indeed,  $t_i \notin m'B' + fB'$  because  $t_i \notin fC(k)[[t_1, \dots, t_n]]$  as  $f - p \in (t_1, \dots, t_n)$ . Thus,  $\text{Fan}(\widehat{V}_a)$  is disjoint from the preimage of  $x$ , and hence the same is true for  $\text{Fan}(V_a)$ . This proves (ii) in the non-saturated case, and the saturated case is dealt with similarly but with  $P'$  replaced by its saturation. Finally, (iii) follows immediately from (i) and (ii).  $\square$

**3.4.14. Independence of the log structure.** Dependence of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  on  $M_X$  is a subtle question. In this section we will use functoriality of  $\widetilde{\mathcal{F}}$  to prove that  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  is independent of  $M_X$  in characteristic zero (i.e., it is compatible with any automorphism of  $X$ ). This will cover our needs, but the restriction on the characteristic will complicate our arguments later. Conjecturally,  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  does not depend on  $M_X$  at all and the following result of Gabber supports this conjecture: if  $P$  and  $Q$  are two fine sharp monoids and  $k[[P]] \xrightarrow{\sim} k[[Q]]$  for a field  $k$  (of any characteristic!) then  $P \xrightarrow{\sim} Q$ . For completeness, we will give a proof of this in §3.6.

**THEOREM 3.4.15.** Let  $\widetilde{\mathcal{F}}$  be a functorial normalized desingularization of regular log schemes of characteristic zero, and let  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  be the normalized desingularization of log regular log schemes it induces (see Theorem 3.4.9). Assume that  $(X, M_X)$  and  $(Y, M_Y)$  are saturated log regular log schemes such that there exists an isomorphism  $\phi: Y \xrightarrow{\sim} X$  of the underlying schemes. Assume also that the maximal points of the strata of the stratifications of  $X$  and  $Y$  by the rank of  $\overline{M}^{\text{gp}}$  are of characteristic zero. Then  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y)$  are compatible with  $\phi$ , that is,  $\widetilde{\mathcal{F}}(Y, M_Y) = \phi^*(\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X))$ .

*Proof.* We can check the assertion of the theorem étale locally. Namely, we can replace  $X$  with a strict étale covering  $X'$  and replace  $Y$  with  $Y' = Y \times_X X'$  with the log structure induced from  $Y$ . In particular, we can assume that the log structures are Zariski, and so the canonical fans  $\text{Fan}(X)$  and  $\text{Fan}(Y)$  are defined. Our assumption on the maximal points actually means that  $\text{Fan}(X)$  is contained in  $X_{\mathbf{Q}} = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ . By Lemma 3.4.13(iii) and §2.2.12,  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M)$  is the pushforward of its restriction onto  $X_{\mathbf{Q}}$ , and similarly for  $Y$ . So, it suffices to prove that the normalized desingularizations of  $X_{\mathbf{Q}}$  and  $Y_{\mathbf{Q}}$  are compatible with respect to  $\phi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}: X_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$ . Thus, it suffices to prove the theorem for  $X$  and  $Y$  of characteristic zero, and, in the sequel, we assume that this is the case.

To simplify notation we identify  $X$  and  $Y$ , and set  $N_X = M_Y$ . It suffices to check that the blow up towers  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$  coincide after the base change to each completion  $\widehat{X}_{\bar{x}} = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}})$  at a geometric point  $\bar{x}$ . By VI-1.6, we have that  $\widehat{X}_{\bar{x}} \rightarrow \text{Spec}(k[[P]][[t_1, \dots, t_n]])$ , where  $P \rightarrow \overline{M}_{X, \bar{x}}$ , and the morphism of fs log schemes  $(\widehat{X}_{\bar{x}}, P) \rightarrow (X, M_X)$  is strict. By Theorem 3.3.15 the contracted pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  to  $\widehat{X}_{\bar{x}}$  coincides with  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$ . In the same way, the contracted pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$  coincides with  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, Q)$ , where  $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}} \rightarrow \text{Spec}(k[[Q]][[t_1, \dots, t_m]])$  (we use that  $k$  is isomorphic to the residue field of this ring and hence depends only on the ring  $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \bar{x}}$ ).

Let us now recall how  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$  is constructed (Theorems 3.1.27, 3.2.20 and 3.3.15). We have the obvious strict morphism  $\widehat{X}_{\bar{x}} \rightarrow Z := \text{Spec}(\mathbf{Q}[P][t_1, \dots, t_n])$ , hence  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\widehat{X}_{\bar{x}}, P)$  is the pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(Z, P)$ . The latter is the pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{mono}}(P) = \widetilde{\mathcal{F}}^{\text{fan}}(P)$ , which, in its turn, is induced from  $\widetilde{\mathcal{F}}(Z)$ . Therefore,  $\widetilde{\mathcal{F}}(Z, P) = \widetilde{\mathcal{F}}(Z)$  and, by the functoriality of  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , its pullback to  $\widehat{X}_{\bar{x}}$  is  $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_{\bar{x}})$ . The same argument shows that  $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_{\bar{x}})$  is the contracted pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$ .

In order to prove that  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X) = \widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$  it only remains to resolve the synchronization issues, i.e. to prove equality without contractions. For this one should take the union  $S$  of the fans of  $(X, M_X)$  and  $(X, N_X)$ , and consider the morphism  $\widehat{X}_S := \coprod_{x \in S} \widehat{X}_x$  rather than the individual completions. The pullbacks of  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, M_X)$  and  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, N_X)$  to  $\widehat{X}_S$  have no empty blow ups because the fans contain all associated points of the towers by Lemma 3.4.13(iii). Hence the same argument as above shows that they both coincide with  $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{X}_S)$ .  $\square$

**REMARK 3.4.16.** (i) Without taking the completion,  $\widetilde{\mathcal{F}}(X)$  does not even have to be defined as  $X$  may be non-qe. In order to pass to the completion we used functoriality of the monoidal desingularization with respect to strict morphisms, which may be very bad (e.g. non-flat) on the level of usual morphisms of schemes. Even when  $(X, M)$  is log regular, the formal completion morphism  $\widehat{X}_x \rightarrow X$  can be non-regular in the non-qe case. However, one can show that it is regular over the fan, and this is enough to relate the (log) desingularization of  $X$  and  $\widehat{X}_x$ .

(ii) We used the very strong desingularization  $\widetilde{\mathcal{F}}$  from Theorem 2.3.10. However, it is easy to see that only the properties listed in Theorem 2.3.7 were essential.

**3.5. Complements on non-saturated log regular log schemes.** For the sake of completeness, we mention Gabber's results on non-saturated log regular log



schemes that will not be used. We only formulate results but do not give proofs. Gabber defines a fine log scheme  $(X, M_X)$  to be *log regular* if its saturation is log regular in the usual sense. Assume now that  $(X, M_X)$  is fine and log regular. The key result that lifts the theory off the ground is that Kato's Tor independence extends to non-saturated log regular log schemes. Namely, if  $(X, M_X)$  admits a chart  $\mathbf{Z}[P]$  and  $I \subseteq P$  is an ideal then  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}[P]}(\mathcal{O}_X, \mathbf{Z}[P]/I) = 0$ . For fs log schemes this is due to Kato, and Gabber deduces the general case using a non-flat descent. It then follows similarly to the saturated case that if  $(Y, M_Y) = \mathrm{LogBl}_{\mathcal{F}}(X, M_X)$  then  $Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}\mathcal{O}_X}(X)$  and  $(Y, M_Y)$  is log regular. In addition, one shows that  $(X, M_X)$  is saturated if and only if  $X$  is normal, and if  $(Y, M_Y) = (X, M_X)^{\mathrm{sat}}$  then  $Y \xrightarrow{\sim} X^{\mathrm{nor}}$ . Using these foundational results on log regular fine log schemes one can imitate the method of §3.4 to extend Lemma 3.4.13 to the non-saturated case. As a corollary, one obtains an analog of Theorem 3.4.15 for  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{F}^{\mathrm{log}}$ .

**3.6. Reconstruction of the monoid.** This section will not be used in the sequel. Its aim is to prove that a fine torsion free monoid  $P$  can be reconstructed from a ring  $A = k[[P]]$  where  $k$  is a field. The main idea of the proof is that an isomorphism  $k[[P]] \xrightarrow{\sim} A$  defines an action of the torus  $\mathrm{Spec}(k[P^{\mathrm{gp}}])$  on  $A$ , and any two maximal tori in  $\mathrm{Aut}_k(A)$  are conjugate.

**3.6.1. Automorphism groups of complete rings.** Let  $k$  be a field and  $A$  be a complete local noetherian  $k$ -algebra with residue field  $k$ . Let  $\mathfrak{m}$  denote the maximal ideal and set  $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$ . Consider the algebraic  $k$ -groups  $G_n = \mathrm{Aut}_k(A_n)$ , i.e.  $G_n(B) = \mathrm{Aut}_B(A_n \otimes_k B)$  for any  $k$ -algebra  $B$ . They form a filtering projective family  $\dots G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0$ , which we call algebraic pro-group  $G_\bullet$ . Note that  $G_\bullet$  induces a functor  $G(B) = \lim_n G_n(B)$  and  $G(k) = \mathrm{Aut}_k(A)$ .

**REMARK 3.6.2.** Gabber also considered more complicated filtering families, but we stick to the simplest case we need.

**3.6.3. Stabilization.** We say that an algebraic pro-group  $G_\bullet$  is *stable* if the homomorphisms  $G_{n+1} \rightarrow G_n$  are surjective for large enough  $n$ . Any algebraic group can be stabilized as follows. For each  $G_n$  and  $i \geq 0$  let  $G_{n,i}$  denote the image of  $G_{n+i}$  in  $G_n$ . Then  $G_{n,0} \supseteq G_{n,1} \supseteq \dots$  is a decreasing sequence of algebraic subgroups of  $G_n$ , hence it stabilizes on a subgroup  $G_n^{\mathrm{st}} \subseteq G_n$ . The family  $G_\bullet^{\mathrm{st}}$  with obvious transition morphisms is an algebraic pro-subgroup of  $G_\bullet$ , and it is clear from the definition that  $G_\bullet^{\mathrm{st}}$  is stable. Note also that  $G_\bullet^{\mathrm{st}}$  is isomorphic to  $G_\bullet$  at least in the sense that  $G(B) \xrightarrow{\sim} \lim_n G_n^{\mathrm{st}}(B)$  for any  $k$ -algebra  $B$ .

**3.6.4. Maximal pro-tori.** By a *pro-torus*  $T_\bullet$  in  $G_\bullet$  we mean a *compatible* family of tori  $T_n \hookrightarrow G_n$  for  $n \gg 0$ , in the sense that  $\pi_n(T_{n+1}) = T_n$ . It is called a *torus* if  $\pi_n$ 's are isomorphisms for  $n \gg 0$ . A pro-torus is *split* or *maximal split* if so are  $T_n$  for  $n \gg 0$ . Pro-tori  $T_\bullet$  and  $T'_\bullet$  are conjugate if for  $n \gg 0$  there exists a *compatible* family of conjugations  $G_n \rightarrow G_n$  taking  $T_n$  to  $T'_n$ .

**PROPOSITION 3.6.5.** *Assume that  $k$  is a field,  $G_\bullet$  is a stable pro-algebraic  $k$ -group, and  $T_\bullet, T'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$  are split pro-tori. If  $T_\bullet$  is maximal then  $T'_\bullet$  is conjugate to a sub-pro-torus of  $T_\bullet$ . In particular, any two maximal split pro-tori are conjugate.*

*Proof.* It is a classical result that maximal split tori in algebraic  $k$ -groups are conjugate. In particular, for each  $n$  we can move  $T'_n$  into  $T_n$  by a conjugation, and the only issue is compatibility of the conjugations. Naturally, to achieve compatibility we should lift conjugations inductively from  $G_n$  to  $G_{n+1}$ . It suffices to

prove that if  $\pi_n$  is surjective and  $c_n: G_n \rightarrow G_n$  conjugates  $T'_n$  into  $T_n$  then it lifts to  $c_{n+1}: G_{n+1} \rightarrow G_{n+1}$  that conjugates  $T'_{n+1}$  into  $T_{n+1}$ . By the stability assumption, we can lift  $c_n$  to a conjugation  $c'$  of  $G_{n+1}$ . It takes  $T'_{n+1}$  to the subgroup  $H = KT_{n+1}$ , where  $K$  is the kernel of  $\pi_n$ . Since maximal split tori in  $H$  are conjugate and conjugation by elements of  $T_{n+1}$  preserves  $T_{n+1}$ , we can find a conjugation  $c''$  by an element of  $K$  that takes  $c'(T'_{n+1})$  to  $T_{n+1}$ . Then  $c_{n+1} = c''c'$  is a lifting of  $c_n$  as required  $\square$

**COROLLARY 3.6.6.** Let  $k$  be a field and let  $G_\bullet$  be a pro-algebraic  $k$ -group. If  $T_\bullet, T'_\bullet \subseteq G_\bullet$  are stable pro-tori and  $T_\bullet$  is maximal as a split pro-torus of  $G_\bullet$ , then  $T'_\bullet$  is conjugate to a subtorus of  $T_\bullet$ .

*Proof.* Obviously,  $T_n, T'_n \subseteq G_n^{\text{st}}$  for  $n \gg 0$ . So,  $T'_\bullet$  is conjugate to a subtorus of  $T_\bullet$  already inside of  $G^{\text{st}}$  by Proposition 3.6.5.  $\square$

**3.6.7. Certain tori in  $\text{Aut}_k(A)$ .** Any isomorphism  $C[[P]] \xrightarrow{\sim} A$ , where  $C$  is a complete local  $k$ -algebra and  $P$  is a sharp fine monoid, induces an algebraic action of the split torus  $T_P = \text{Spec}(k[P^{\text{gp}}])$  on  $A$ : a character  $\chi: P \rightarrow k$  acts on  $C$  trivially and acts on  $p \in P$  by  $p \mapsto \chi(p)p$  (and the action of  $B$ -points  $\chi: P \rightarrow B$  is analogous). Thus we obtain homomorphisms  $\psi: T_P \rightarrow G_n$  which are injective for  $n > 0$ . In particular, the image is a split torus of  $G$ . Furthermore, we claim that if  $C = k$  then the torus is maximal (as a pro-torus). Indeed, if  $\phi \in \text{Aut}_k(A)$  commutes with  $T_P$  then its action on  $k[[P]]$  preserves the  $T_P$ -eigenspaces  $pk$  for  $p \in P$  and on each  $pk$  it acts by multiplication by a number  $\lambda(p)$ . Clearly,  $\lambda: P \rightarrow k$  is a homomorphism and we obtain that  $\phi$  belongs to  $\psi(T_P(k))$  and corresponds to  $\lambda \in T_P(k)$ .

**THEOREM 3.6.8.** Assume that  $k$  is a field,  $P$  is a sharp fine monoid and  $A = k[[P]]$ . If  $C$  is a complete local  $k$ -algebra,  $Q$  is a sharp fine monoid and  $C[[Q]] \xrightarrow{\sim} A$  then  $C \xrightarrow{\sim} k[[R]]$  and  $P \xrightarrow{\sim} Q \times R$  for a sharp fine monoid  $R$ . In particular,  $P$  is uniquely determined by  $A$ .

*Proof.* Consider  $G = \text{Aut}_k(A)$  with split tori  $T_P, T_Q \hookrightarrow G$  corresponding to these isomorphisms. By maximality of  $T_P$  and Corollary 3.6.6 there exists a conjugation of  $G$  that maps  $T_Q$  into  $T_P$ . This produces a new isomorphism  $C[[Q]] \xrightarrow{\sim} A = k[[P]]$  that respects the grading, i.e. each  $pk$  lies in some  $qC$ , and we obtain a surjective map  $f: P \rightarrow Q$ , which is clearly a homomorphism. If  $C = k$  then  $f$  is an isomorphism and we obtain that  $P$  is determined by  $A$ .

Set  $R_q = \prod_{p \in f^{-1}(q)} pk$ . We have natural embeddings  $\prod_{p \in f^{-1}(q)} pk \hookrightarrow qC$  which are all isomorphisms because  $A = \prod_{q \in Q} R_q$  is isomorphic to  $C[[Q]] = \prod_{q \in Q} qC$ . In particular, for  $R = R_1$  we have that  $C = \prod_{q \in R} qk = k[[R]]$ . Therefore,  $A \xrightarrow{\sim} k[[R]][[Q]] \xrightarrow{\sim} k[[R \times Q]]$ , and since the monoid is determined by  $A$  we obtain that  $P \xrightarrow{\sim} Q \times R$ .  $\square$

#### 4. Proof of Theorem 1.1 – preliminary steps

The goal of §4 is to reduce the proof of Theorem 1.1 to the case when the following conditions are satisfied: (1)  $X$  is regular, (2) the log structure is given by an snc divisor  $Z$  which is  $G$ -strict in the sense that for any  $g \in G$  and a component  $Z_i$  either  $gZ_i = Z_i$  or  $gZ_i \cap Z_i = \emptyset$ , (3)  $G$  acts freely on  $X \setminus Z$  and for any geometric point  $\bar{x} \rightarrow X$  the inertia group  $G_{\bar{x}}$  is abelian.

**4.1. Plan.** A general method for constructing a  $G$ -equivariant morphism  $f$  as in Theorem 1.1 is to construct a tower of  $G$ -equivariant morphisms of log schemes  $X' = X_n \dashrightarrow X_0 = X$ , where the underlying morphisms of schemes are normalized blow ups along  $G$ -stable centers sitting over  $Z \cup T$ , such that various properties of the log scheme  $X_i$  with the action of  $G$  gradually improve to match all assertions of the Theorem. To simplify notation, we will, as a rule, replace  $X$  with the new log scheme after each step. The three conditions above will be achieved in three steps as follows.

**4.1.1. Step 1. Making  $X$  regular.** This is achieved by the saturated log blow up tower  $\widetilde{\mathcal{F}}(X, Z): X' \dashrightarrow X$  from Theorem 3.4.9. In particular, the morphism  $X' \rightarrow X$  is even log smooth. In the sequel, we assume that  $X$  is regular, in particular,  $Z$  is a normal crossings divisor by VI-1.7. We will call  $Z$  the *boundary* of  $X$ . In the sequel, these conditions will be preserved, so let us describe an appropriate restriction on further modifications.

**4.1.2. Permissible blow ups.** After Step 1 any modification in the remaining tower will be of the form  $f: (X', Z') \rightarrow (X, Z)$  where  $X' = \text{Bl}_V(X)$ ,  $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$  and  $V$  has *normal crossings* with  $Z$ , i.e. étale locally on  $X$  there exist regular parameters  $t_1, \dots, t_d$  such that  $Z = V(\prod_{i=1}^l t_i)$  and  $V = V(t_{i_1}, \dots, t_{i_m})$ . We call such modification *permissible* and a blow up  $f: X' \rightarrow X$  is called *permissible* (with respect to the boundary  $Z$ ) if it underlies a permissible modification. Since there is an obvious bijective correspondence between permissible modifications and blow ups we will freely pass from one to another. Note that  $Z' = f^{\text{st}}(Z) \cup E'$ , where  $E' = f^{-1}(V)$  is the exceptional divisor.

**4.1.3. Permissible towers.** A *permissible modification tower*  $(X_d, Z_d) \dashrightarrow (X_0, Z_0) = (X, Z)$  is defined in the obvious way and we say that a blow up tower  $X_d \dashrightarrow X$  is permissible if it underlies such a modification tower. Again, we will freely pass between permissible towers of these types. Note that  $Z_i = Z_i^{\text{st}} \cup E_i$ , where  $Z_i^{\text{st}}$  is the strict transform of  $Z$  under  $h_i: X_i \dashrightarrow X$  and  $E_i$  is the exceptional divisor of  $h_i$  (i.e. the union of the preimages of the centers of  $h_i$ ).

**REMARK 4.1.4.** (i) Consider a permissible tower as above. It is well known that for any  $i$  one has that  $X_i$  is regular,  $Z_i$  is normal crossings and  $E_i$  is even snc. For completeness, let us outline the proof. Both claims follow from the following: if  $Z$  is snc then  $Z_i$  is snc. Indeed, the claim about  $E_i$  follows by taking  $Z = \emptyset$  and the claim about  $Z_i$  can be checked étale locally, so we can assume that  $Z$  is snc. Finally, if  $Z$  is snc then  $Z_i$  is snc by Lemma 4.2.9 below.

(ii) Permissible towers are very common in embedded desingularization because they do not destroy regularity of the ambient scheme and the normal crossings (or snc) property of the boundary (or accumulated exceptional divisor). Even when one starts with an empty boundary, a non-trivial boundary appears after the first step, and this restricts the choice of further centers. Actually, any known self-contained proof of embedded desingularization constructs a permissible resolution tower.

**4.1.5.  $G$ -permissible towers.** In addition, we will only blow up  $G$ -equivariant centers  $V$ . So,  $f: X' = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$  is  $G$ -equivariant and the exceptional divisor  $E = f^{-1}(V)$  is regular and  $G$ -equivariant and hence  $G$ -strict. Such a blow up (or their tower) will be called  *$G$ -permissible*. It follows by induction that the exceptional divisor of such a tower is  $G$ -strict.

**4.1.6. Step 2. Making  $Z$  snc and  $G$ -strict.** Consider the stratification of  $Z$  by multiplicity: a point  $z \in Z$  is in  $Z^n$  if it has exactly  $n$  preimages in the normalization of  $Z$ . Note that  $\{Z^n\}$  is precisely the log stratification as defined in §3.3.1. By *depth* of the stratification we mean the maximal  $d$  such that  $Z^d \neq \emptyset$ . In particular,  $Z^d$  is the only closed stratum. Step 2 proceeds as follows:  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  is the blow up along the closed stratum of  $Z_i^{\text{st}}$ .

**REMARK 4.1.7.** What we use above is the standard algorithm that achieves the following two things:  $Z'$  is snc and  $Z^{\text{st}} = \emptyset$  (see, for example, [de Jong, 1996, 7.2]). Even when  $Z$  is snc, the second property is often used in the embedded desingularization algorithms to get rid of the old components of the boundary.

**4.1.8. Justification of Step 2.** Since the construction is well known, we just sketch the argument. First, observe that  $Z^d$  has normal crossings with  $Z$ , that is,  $X' = \text{Bl}_{Z^d}(X) \rightarrow X$  is permissible. Thus,  $Z'$  is normal crossings and hence  $Z^{\text{st}}$  is also normal crossings. A simple computation with blow up charts shows that the depth of  $Z^{\text{st}}$  is  $d - 1$  (for example, one can work étale-locally, and then this follows from Lemma 4.2.8 below). It follows by induction that the tower produced by Step 2 is permissible, of length  $d$  and with  $Z_d^{\text{st}} = \emptyset$ . So,  $Z_d = E_d$  is snc by Remark 4.1.4 and  $G$ -strict by §4.1.5.

**4.1.9. Step 3. Making the inertia groups abelian and the action of  $G$  on  $X \setminus Z$  free.** Recall (VI-4.1) that the inertia strata are of the form  $X_H = X^H \setminus \bigcup_{H \subsetneq H'} X^{H'}$ . Step 3 runs analogously to Step 2, but this time we will work with the inertia stratification of  $X$  instead of the log stratification, and will have to apply the same operation a few times. Let us first describe the blow up algorithm used in this step; its justification will be given in §4.2.

Let  $f_{\{X^H\}}: X' \dashrightarrow X$  denote the following blow up tower. First we blow up the union of all closed strata  $X_H$ . In other words,  $V_0$  is the union of all non-empty minimal  $X^H$ , i.e. non-empty  $X^H$  that do not contain  $X^K$  with  $\emptyset \subsetneq X^K \subsetneq X^H$ . Next, we consider the family of all strict transforms of  $X^H$  and blow up the union of the non-empty minimal ones, etc. Obviously, the construction is  $G$ -equivariant. We will prove in Proposition 4.2.11 that  $f_{\{X^H\}}$  is permissible of length bounded by the length of the maximal chains of subgroups. Also, we will show in §4.2.13 that  $f_{\{X^H\}}$  decreases all non-abelian inertia groups, so the algorithm of Step 3 goes as follows: until all inertia groups become abelian, apply  $f_{\{X^H\}}: X' \dashrightarrow X$  (i.e. replace  $(X, Z)$  with  $(X', Z')$ ).

## 4.2. Justification of Step 3.

**4.2.1. Weakly snc families.** Assume that  $X$  is regular,  $Z \hookrightarrow X$  is an snc divisor, and  $\{X_i\}_{i \in I}$  is a finite collection of closed subschemes of  $X$ . For any  $J \subseteq I$  we denote by  $X_J$  the scheme-theoretic intersection  $\bigcap_{j \in J} X_j$ . The family  $\{X_i\}$  is called *weakly snc* if each  $X_i$  is nowhere dense and  $X_j$  is regular. The family  $\{X_i\}$  is called *weakly  $Z$ -snc* if it is weakly snc and each  $X_j$  has normal crossings with  $Z$ . In particular,  $\{X_i\}_{i \in I}$  is weakly snc (resp. weakly  $Z$ -snc) if and only if the family  $\{X_J\}_{\emptyset \neq J \subseteq I}$  is weakly snc (resp. weakly  $Z$ -snc).

**REMARK 4.2.2.** (i) Here is a standard criterion of being an snc divisor, which is often taken as a definition. Let  $D \hookrightarrow X$  be a divisor with irreducible components  $\{D_i\}_{i \in I}$ . Then  $D$  is snc if and only if it is weakly snc and each irreducible component of  $D_j$  is of codimension  $|J|$  in  $X$ .

(ii) The condition on the codimension is essential. For example,  $xy(x + y) = 0$  defines a weakly snc but not snc divisor in  $\mathbf{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ .

(iii) The criterion from (i) implies that if  $X$  is qe then the snc locus of  $D$  is open – it is the complement of the union of singular loci of  $D_j$ 's. (Note that this makes sense for all points of  $X$  because  $D$  is snc at a point  $x \in X \setminus D$  if and only if  $X = D_\emptyset$  is regular at  $x$ .)

**LEMMA 4.2.3.** Let  $(X, Z)$  and  $G$  be as achieved in Step 2. Then the family  $\{X^H\}_{1 \neq H \subseteq G}$  is weakly  $Z$ -snc.

*Proof.* Recall that for any subgroup  $H \subseteq G$  the fixed point subscheme  $X^H$  is regular by Proposition VI-4.2, and  $X^H$  is nowhere dense for  $H \neq 1$  by generic freeness of the action of  $G$ . Since for any pair of subgroups  $K, H \subseteq G$  we have that  $X^H \times_X X^K = X^{KH}$ , the family is weakly snc. It remains to show that  $Y = X^H$  has normal crossings with  $Z$ . Note that it is enough to consider the case when  $X$  is local with closed point  $x$  and  $G = H$ . The cotangent spaces at  $x$  will be denoted  $T^*X = \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ ,  $T^*Y$ , etc. Their dual spaces will be called the tangent spaces, and denoted  $TX$ ,  $TY$ , etc. Let  $\phi^* : T^*X \rightarrow T^*Y$  denote the natural map and let  $\phi : TY \rightarrow TX$  denote its dual. We will systematically use without mention that  $|G|$  is coprime to  $\text{chark}(x)$ , in particular, the action of  $G$  on  $T^*X$  is semi-simple.

The proof of VI-4.2 also shows that for any point  $x \in X^H$ , the tangent space  $T_x(X^H)$  is isomorphic to  $(T_x X)^H$ . In particular,  $TY \xrightarrow{\sim} (TX)^G$  and hence  $\phi^*$  maps  $(T^*X)^G \subset T^*X$  isomorphically onto  $T^*Y$ . Therefore,  $U = \text{Ker}(\phi^*)$  is the  $G$ -orthogonal complement to  $(T^*X)^G$ , i.e. the only  $G$ -invariant subspace such that  $(T^*X)^G \oplus U \xrightarrow{\sim} T^*X$ . Let  $Z_i = V(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  be the components of  $Z$  and let  $dt_i \in T^*X$  denote the image of  $t_i$ . By  $Z$ -strictness of  $G$ , each line  $L_i = \text{Span}(dt_i)$  is  $G$ -invariant, so  $G$  acts on  $dt_i$  by a character  $\chi_i$ . Without restriction of generality,  $\chi_1, \dots, \chi_l$  for some  $0 \leq l \leq n$  are the only trivial characters. In particular,  $L = \text{Span}(dt_1, \dots, dt_n)$  is the direct sum of  $L^G = \text{Span}(dt_1, \dots, dt_l)$  and its  $G$ -orthogonal complement  $L \cap U$ , which (by uniqueness of the complement) coincides with  $\text{Span}(dt_{l+1}, \dots, dt_n)$ . Complete the basis of  $L$  to a basis  $\{dt_1, \dots, dt_n, e_1, \dots, e_m\}$  of  $T^*X$  such that  $\{dt_{l+1}, \dots, dt_n, e_1, \dots, e_r\}$  for some  $r \leq m$  is a basis of  $U$  and choose functions  $s_1, \dots, s_m$  on  $X$  so that  $ds_j = e_j$  and  $s_1, \dots, s_r$  vanish on  $Y$ . Clearly,  $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m$  is a regular family of parameters of  $\mathcal{O}_{X,x}$ , so the lemma would follow if we prove that  $Y = V(t_{l+1}, \dots, t_n, s_1, \dots, s_r)$ .

Since  $Y$  is regular and  $\text{Ker}(\phi^*)$  is spanned by the images of  $t_{l+1}, \dots, t_n, s_1, \dots, s_r$ , we should only check that these functions vanish on  $Y$ . The  $s_j$ 's vanish on  $Y$  by the construction, so we should check that  $t_i$  vanishes on  $Y$  whenever  $l < i \leq n$ . Using the functorial definition from VI-4.1 of the subscheme of fixed points, we obtain that  $Z_i^G = Z_i \times_X X^G$ , hence  $Z_i \times_X Y$  is regular by VI-4.2. However,  $TY$  is contained  $TZ_i$ , which is the vanishing space of  $dt_i$ , hence we necessarily have that  $Y \hookrightarrow Z_i$ .  $\square$

**4.2.4. Snc families.** A family of nowhere dense closed subschemes  $\{X_i\}_{i \in I}$  is called *snc* (resp. *Z-snc*) at a point  $x$  if  $X$  is regular at  $x$  and there exists a regular family of parameters  $t_j \in \mathcal{O}_{X,x}$  such that in a neighborhood of  $x$  each  $X_i$  (resp. and each irreducible component  $Z_k$  of  $Z$ ) passing through  $x$  is given by the vanishing of a subfamily  $t_{j_1}, \dots, t_{j_l}$ . Note that the family  $\{X_i\}_{i \in I}$  is  $Z$ -snc if and only if the union  $\{X_i\} \cup \{Z_k\}$  is snc. A family is *snc* if it is so at any point of  $X$  (in particular,  $X$  is regular).

REMARK 4.2.5. (i) It is easy to see that the family  $\{X^H\}_{H \subseteq G}$  is snc whenever  $G$  is abelian. Indeed, it suffices to show that for any point  $x$  there exists a basis of  $T_x X$  such that each  $T_x(X^H)$  is given by vanishing of some of the coordinates. But this is so because the action of  $G$  on  $T_x X$  is (geometrically) diagonalizable and  $T_x(X^H) = (T_x X)^H$ . In general, the family  $\{X^H\}_{H \subseteq G}$  does not have to be snc, as the example of a dihedral group  $D_n$  with  $n \geq 3$  acting on the plane shows.

(ii) If  $Z \hookrightarrow X$  is an snc divisor with components  $Z_i$  and  $V \hookrightarrow X$  is a closed subscheme then the family  $\{Z_i, V\}$  is snc if and only if  $V$  has normal crossings with  $Z$ .

The transversal case of the following lemma can be deduced from [ÉGA IV<sub>4</sub> §19.1], but we could not find the general case in the literature (although it seems very probable that it should have appeared somewhere).

LEMMA 4.2.6. Any weakly snc family with  $|I| = 2$  is snc.

*Proof.* We should prove that if  $X = \text{Spec}(A)$  is a regular local scheme and  $Y, Z$  are regular closed subschemes such that  $T = Y \times_X Z$  is regular then there exists a regular family of parameters  $t_1, \dots, t_n \in A$  such that  $Y$  and  $Z$  are given by vanishing of some set of these parameters. Let  $\mathfrak{m}$  be the maximal ideal of  $A$ , and let  $I, J$  and  $K = I + J$  be the ideals defining  $Y, Z$  and  $T$ , respectively. By  $T^*X = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ,  $T^*Y$ , etc., we denote the cotangent spaces at the closed point of  $X$ . Note that  $I/\mathfrak{m}I \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$ , and similar formulas hold for  $J/\mathfrak{m}J$  and  $K/\mathfrak{m}K$ . Indeed, we can choose the parameters so that  $Y = V(t_1, \dots, t_l)$  and then the images of  $t_1, \dots, t_l$  form a basis both of  $I/\mathfrak{m}I$  and  $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$ .

Now, let us prove the lemma. Assume first that  $Y$  and  $Z$  are transversal, i.e.  $T^*X \hookrightarrow T^*Y \oplus T^*Z$ . Choose elements  $t_1, \dots, t_{l+k}$  such that  $Y = V(t_1, \dots, t_l)$ ,  $Z = V(t_{l+1}, \dots, t_{l+k})$ ,  $l = \text{codim}(Y)$  and  $k = \text{codim}(Z)$ . Then the images  $dt_i \in T^*X$  of  $t_i$  are linearly independent because  $dt_1, \dots, dt_l$  span  $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Y)$  and  $dt_{l+1}, \dots, dt_{l+k}$  span  $\text{Ker}(T^*X \rightarrow T^*Z)$ . Hence we can complete  $t_i$ 's to a regular family of parameters by choosing  $t_{l+k+1}, \dots, t_n$  such that  $dt_1, \dots, dt_n$  is a basis of  $T^*X$ . This proves the transversal case, and to establish the general case it now suffices to show that if  $Y$  and  $Z$  are not transversal then there exists an element  $t_1 \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$  which vanishes both on  $Y$  and  $Z$ . (The we can replace  $X$  with  $X_1 = V(t_1)$  and repeat this process until  $Y$  and  $Z$  are transversal in  $X_a = V(t_1, \dots, t_a)$ .) Tensoring the exact sequence  $0 \rightarrow I \cap J \rightarrow I \oplus J \rightarrow K \rightarrow 0$  with  $A/\mathfrak{m}$  we obtain an exact sequence

$$(I \cap J)/\mathfrak{m}(I \cap J) \rightarrow I/\mathfrak{m}I \oplus J/\mathfrak{m}J \xrightarrow{\phi} K/\mathfrak{m}K \rightarrow 0$$

The failure of transversality is equivalent to non-injectivity of  $\phi$ , hence there exists an element  $f \in I \cap J$  with a non-zero image in  $I/\mathfrak{m}I \oplus J/\mathfrak{m}J$ . Thus,  $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$  and we are done.  $\square$

4.2.7. *Blowing up the minimal strata of a weakly snc family.* Given a weakly snc family  $\{X_i\}_{i \in I}$ , we say that a scheme  $X_j$  with  $J \subseteq I$  is *minimal* if it is non-empty and any  $X_{j'} \subsetneq X_j$  is empty. Also, we will need the following notation: if  $Z \hookrightarrow X$  is a closed subscheme and  $D \hookrightarrow X$  is a Cartier divisor with the corresponding ideals  $\mathcal{I}_Z, \mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_X$ , then  $Z + D$  is the closed subscheme defined by the ideal  $\mathcal{I}_Z \mathcal{I}_D$ .

**PROPOSITION 4.2.8.** *Assume that  $X$  is regular,  $Z \hookrightarrow X$  is an snc divisor with irreducible components  $Z_1, \dots, Z_l$ , and  $\{X_i\}_{i \in I}$  is a  $Z$ -snc (resp. weakly  $Z$ -snc) family of subschemes. Let  $V$  be the union of all non-empty minimal subschemes  $X_J$ ,  $f: X' = \text{Bl}_V(X) \rightarrow X$ ,  $X'_i = f^{\text{st}}(X_i)$  and  $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$ . Then*

- (i)  $X'$  is regular and  $Z'$  is snc.
- (ii) The family  $\{X'_i\}_{i \in I}$  is  $Z'$ -snc (resp. weakly  $Z'$ -snc).
- (iii) For any  $J \subseteq I$ , the scheme-theoretical intersection  $X'_J = \bigcap_{j \in J} X'_j$  coincides with  $f^{\text{st}}(X_J)$ .
- (iv) For any  $J \subseteq I$  the total transform  $X_J \times_X X'$  is of the form  $X'_J + D'_J$  where  $D'_J$  is the divisor consisting of all connected components of  $E' = f^{-1}(V)$  contained in  $f^{-1}(X_J)$ .

*Proof.* We start with the following lemma.

**LEMMA 4.2.9.** *Assume that  $X$  is regular,  $Z$  is an snc divisor and  $V \hookrightarrow Y$  are closed subschemes having normal crossings with  $Z$ . Let  $f: X' \rightarrow X$  be the blow up along  $V$ ,  $Y' = f^{\text{st}}(Y)$ ,  $Z' = f^{-1}(Z \cup V)$ , and  $E' = f^{-1}(V)$ . Then  $Z'$  is snc,  $Y'$  has normal crossings with  $Z'$  and  $Y \times_X X' = Y' + E'$ .*

*Proof.* The proof is a usual local computation with charts. Take any point  $u \in V$  and choose a regular family of parameters  $t_1, \dots, t_n$  at  $u$  such that  $Y$  (resp.  $V$ , resp.  $Z$ ) are given by the vanishing of  $t_1, \dots, t_m$  (resp.  $t_1, \dots, t_l$ , resp.  $\prod_{i \in I} t_i$ ), where  $0 \leq m \leq l \leq n$  and  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Locally over  $u$  the blow up is covered by  $l$  charts, and the local coordinates on the  $i$ -th chart are  $t'_j$  such that  $t'_j = t_j$  for  $j > l$  or  $j = i$  and  $t'_j = \frac{t_j}{t_i}$  otherwise. On this chart,  $Y \times_X X'$  (resp.  $Y'$ , resp.  $E'$ , resp.  $Z'$ ) is given by the vanishing of  $t_1, \dots, t_m$  (resp.  $t'_1, \dots, t'_m$ , resp.  $t'_i$ , resp.  $\prod_{j \in I \cup \{i\}} t'_j$ ), hence the lemma follows.  $\square$

The lemma implies (i). In addition, it follows from the lemma that  $f^{\text{st}}(X_J)$  has normal crossings with  $Z'$  and  $X_J \times_X X' = f^{\text{st}}(X_J) + D'_J$ . Thus, (iii) implies (iv), and (iii) implies (ii) in the case when the family  $\{X_i\}_{i \in I}$  is weakly  $Z$ -snc. Note also that if this family is  $Z$ -snc then locally at any point  $x \in X$  there exists a family of regular parameters  $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$  such that each  $X_J$  and each component of  $Z$  is given by the vanishing of a subfamily of  $\underline{t}$  locally in a neighborhood of  $x$ . Then the same local computation as was used in the proof of Lemma 4.2.9 proves also claims (ii) and (iii) of the proposition. So, it remains to prove (iii) when the family is weakly snc. It suffices to prove that if (iii) holds for  $X_J$  and  $X_K$  then it holds for  $X_{J \cup K}$ . Moreover, (iii) does not involve the boundary so we can assume that  $Z = \emptyset$ . It remains to note that  $\{X_J, X_S\}$  is an snc family by Lemma 4.2.6, hence our claim follows from the snc case.  $\square$

**4.2.10.** *Blow up tower of a weakly  $Z$ -snc family.* Let  $X$  be a regular scheme,  $Z$  be an snc divisor and  $\{X_i\}_{i \in I}$  be a weakly  $Z$ -snc family. By the blow up tower  $f_{\{X_i\}}$  of  $\{X_i\}$  we mean the following tower: the first blow up  $h_1: X_1 \rightarrow X_0 = X$  is along the union of all non-empty minimal schemes of the form  $X_J$  for  $\emptyset \neq J \subseteq I$ , the second blow up is along the union of all non-empty minimal schemes of the form  $h_1^{\text{st}}(X_J)$  for  $\emptyset \neq J \subseteq I$ , etc.

**PROPOSITION 4.2.11.** *Keep the above notation. Then the tower  $f_{\{X_i\}}$  is permissible with respect to  $Z$  and its length equals to the maximal length of chains  $\emptyset \neq X_{J_1} \subsetneq \dots \subsetneq X_{J_a}$  with  $\emptyset \neq J_a \subsetneq \dots \subsetneq J_1 \subseteq I$ . Furthermore, the strict transform of any scheme  $X_J$  is empty and the total transform of  $X_J$  is a Cartier divisor.*

*Proof.* The claim about the length is obvious. Let  $f_{\{X_i\}} : X_d \dashrightarrow X_0 = X$  and let  $h_n : X_n \dashrightarrow X_0 = X$  be its  $n$ -th truncation. For each  $i \in I$  set  $X_{n,i} = h_n^{\text{st}}(X_i)$  and for each  $J \subseteq I$  set  $X_{n,J} = \bigcap_{i \in J} X_{n,i}$ . Using Proposition 4.2.8 and straightforward induction on length, we obtain that the family  $\{X_{n,i}\}_{i \in I}$  is weakly  $Z_n$ -snc,  $X_{n,J} = h_n^{\text{st}}(X_J)$ , the blow up  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  is along the union of non-empty minimal  $X_{n,J}$ 's, and  $X_J \times_X X_n = X_{n,J} + D_{J,n}$ , where  $D_{J,n}$  is a divisor. So, the tower is permissible, and since  $X_{d,J} = \emptyset$  we also have that  $X_J \times_X X_d$  is a divisor.  $\square$

**REMARK 4.2.12.** We will not need this, but it is easy to deduce from the proposition that on the level of morphisms the modifications  $X_d \rightarrow X$  is isomorphic to the blow up along  $\prod_{\emptyset \neq J \subseteq I} \mathcal{I}_{X_J}$ .

**4.2.13. Justification of Step 3.** The blow up tower  $f_{\{X^H\}} : X' \dashrightarrow X$  from Step 3 is  $G$ -equivariant in an obvious way, and it is permissible by Proposition 4.2.11. In addition,  $Z' = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(\bigcup_{1 \neq H \subseteq G} X^H)$  and, since  $G$  acts freely on  $X' \setminus f^{-1}(\bigcup_{1 \neq H \subseteq G} X^H) \xrightarrow{\sim} X \setminus \bigcup_{1 \neq H \subseteq G} X^H$ , it also acts freely on  $X' \setminus Z'$ . It remains to show that applying  $f_{\{X^H\}}$  we decrease all non-abelian inertia groups. Namely, for any  $x' \in X'$  mapped to  $x \in X$  we want to show that either  $G_{\bar{x}}$  is abelian or the inclusion  $G_{\bar{x}'} \subsetneq G_{\bar{x}}$  is strict.

Let  $H \subseteq G$  be any non-abelian subgroup with commutator  $K = [H, H]$ . Since  $X^K \times_X X'$  is a divisor by Proposition 4.2.11, the universal property of blow ups implies that  $X' \rightarrow X$  factors through  $Y = \text{Bl}_{X^K}(X)$ . On the other hand, it is proved in VI-4.7 that  $Y \rightarrow X$  is an  $H$ -equivariant blow up, and if a geometric point  $\bar{x} \rightarrow X$  with  $G_{\bar{x}} = H$  lifts to a geometric point  $\bar{y} \rightarrow Y$  then  $G_{\bar{y}} \subsetneq H$ . Therefore, the same is true for the  $G$ -equivariant modification  $X' \rightarrow X$ , and we are done.

## 5. Proof of Theorem 1.1 – abelian inertia

**5.1. Conventions.** Throughout §5 we assume that  $(X, Z)$  and  $G$  satisfy all conditions achieved at Steps 1, 2, 3, and our aim is to construct a modification  $f_{(G,X,Z)} : X' \rightarrow X$  as in Theorem 1.1. Unless specially mentioned, we do not assume that  $X$  is qe. This is done in order to isolate the only place where this assumption is needed (existence of rigidifications).

### 5.2. Outline of our method and other approaches.

**5.2.1. Combinatorial nature of the problem.** On the intuitive level it is natural to expect that "everything relevant to our problem" should be determined by the following "combinatorial" data: the log structure of  $X$ , the inertia stratification of  $X$  by  $X_H := X^H \setminus \bigcup_{H' \subsetneq H} X^{H'}$  and the representations of the inertia groups on the tangent spaces (which are essentially constant along  $X_H$ ). This combinatorial nature is manifested in both approaches to the problem that we describe below.

**5.2.2. Combinatorial algorithm.** The most natural approach is to seek for a "combinatorial algorithm" that iteratively blows up the closures of *log-inertia strata* (i.e. intersections of a log stratum with an inertia stratum) or some generalization thereof. Actually, our (very simple) algorithms in §4 were of this type. The algorithm should be governed by a combinatorial data, such as the number of components of  $Z$  through a point  $x$  and the history of their appearance (similarly to the desingularization algorithms), the representation of  $G_{\bar{x}}$  on  $T_x$  plus some history (e.g. representation of  $G_{\bar{x}}$  on the tangent spaces to the components of  $Z$ ), etc.

It is natural to expect that building such an algorithm would lead to a relatively simple proof of Theorem 1.1. In particular, it would be non-sensitive to quasi-excellence issues. Unfortunately, despite partial positive results, we could



not construct such an algorithm. Thus, the question whether such an algorithm exists remains open.<sup>ii</sup>

**5.2.3. Our method.** A general plan of our method is as follows. In §5.3 we will show that such a modification  $f$  exists étale-locally on the base if  $X$  is qe. A priori, our construction will be canonical up to an auxiliary choice, but then we will prove in §5.5 that actually it is independent of the choice and hence descends to a modification  $f$  as required. To prove independence we will show in §5.4 that the construction is functorial with respect to strict *inert* morphisms (i.e. morphisms that preserve both the log and the inertia structures, see §5.3.6). The latter is a manifestation of the "combinatorial nature" of our algorithm.

### 5.3. Local construction.

**5.3.1. Very tame action and Zariski topology.** Note that the log structure on  $(X, Z)$  is Zariski since  $Z$  is snc. Thus, it will be convenient to describe very tame action in terms of Zariski topology. We say that the action of  $G$  is *very tame* at a point  $x \in X$  if for any geometric point  $\bar{x}$  over  $x$  the action is very tame at  $\bar{x}$ . Since the log structure is Zariski, the  $G_{\bar{x}}$ -equivariant log scheme  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \bar{x}})$  is independent of the choice of  $\bar{x}$  up to an isomorphism. In particular, the action is very tame at  $x$  if and only if it is very tame at a single geometric point  $\bar{x}$  above  $x$ .

**LEMMA 5.3.2.** Assume that  $(G, X, Z)$  is as in §5.1,  $x \in X$  is a point, and  $T$  is the set of points of  $X$  at which the action is very tame. Then

- (i)  $T$  is open,
- (ii)  $x \in T$  if and only if locally at  $x$  the log stratification of  $X$  is finer than the inertia stratification (i.e. any log stratum is contained in an inertia stratum).

*Proof.* Choose a geometric point  $\bar{x}$  above  $x$ . If  $x \in T$  then by Corollary VI-3.6 the action is very tame on a suitable étale neighborhood  $X'$  of  $\bar{x}$ . The image of  $X'$  in  $X$  is an open neighborhood of  $x$  which is contained in  $T$ . Thus,  $T$  is open. To prove the second claim we note that the conditions (i) and (ii) from VI-3.1 are automatically satisfied at  $\bar{x}$ . Indeed, (i) is satisfied because the action is tame by assumption of 1.1 and (ii) is satisfied because  $Z$  is snc and  $G$ -strict. Since log and inertia stratifications are compatible with the strict henselization morphism, condition (iii) from VI-3.1 is satisfied at  $\bar{x}$  if and only if the log stratification is finer than the inertia stratification at  $x$ . This proves (ii).  $\square$

**5.3.3. Admissibility.** In the sequel, by saying that  $X$  is *admissible* we mean that the action of  $G$  on  $X$  is admissible in the sense of [SGA 1 V 1.7] (e.g.  $X$  is affine). This is needed to ensure that  $X/G$  exists as a scheme. An alternative would be to allow  $X/G$  to be an algebraic space (and  $(X/G, Z/G)$  to be a log algebraic space).

**5.3.4. Rigidification.** By a *rigidification* of  $X$  we mean a  $G$ -equivariant normal crossings divisor  $\bar{Z}$  that contains  $Z$  and such that the action of  $G$  on the log regular log scheme  $\bar{X} = (X, \bar{Z})$  is very tame. If  $\bar{Z}$  is snc then we say that the rigidification is *strict*. Sometimes, by a rigidification of  $X = (X, Z)$  we will mean the log scheme  $\bar{X}$  itself. Our construction of a modification  $f$  uses a rigidification, so let us first establish local results on existence of the latter.

---

<sup>ii</sup>F. Pop told to the second author that he has a plan of constructing such a combinatorial algorithm.

LEMMA 5.3.5. Let  $X, Z, G$  be as in §5.1. Assume that  $X = \text{Spec}(A)$  is a local scheme with closed point  $x$ ,  $G = G_{\bar{x}}$ , and  $\mu_N \subset A$ , where  $N$  is the order of  $G$ . Then  $X$  possesses a strict rigidification.

*Proof.* Choose  $t_1, \dots, t_n \in A$  such that  $Z_i = (t_i)$  are the components of  $Z$ . By  $G$ -strictness of  $Z$ , for any  $g \in G$  we have that  $Z_i = (gt_i)$  locally at  $x$ , in particular, the tangent space to each  $Z_i$  at  $x$  is  $G$ -invariant. Now, we can use averaging by the  $G$ -action to make the parameters  $G$ -equivariant. Namely,  $G$  acts on  $dt_i$  by a character  $\chi_i$  and replacing  $t_i$  with  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{gt_i}{\chi_i(g)}$  we do not change  $dt_i$  and achieve that  $gt_i = \chi_i(g)t_i$ .

The action of  $G$  on the cotangent space at  $x$  is diagonalizable because  $G$  is abelian and  $\mu_N \subset k(x)$ . In particular, we can complete the family  $dt_1, \dots, dt_n$  to a basis  $dt_1, \dots, dt_l$  such that  $t_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  and  $G$  acts on each  $dt_i$  by a character  $\chi_i$ . Then  $t_1, \dots, t_l$  is a regular family of parameters of  $\mathcal{O}_{X,x}$  and using the same averaging procedure as above we can make them  $G$ -equivariant. Take now  $\bar{Z}$  to be the union of all divisors  $(t_i)$  with  $1 \leq i \leq l$ . The action of  $G$  on  $(X, \bar{Z})$  is very tame at  $x$  because it is the only point of its log stratum. So, it remains to use Lemma 5.3.2.  $\square$

5.3.6. *Inert morphisms.* Let  $(X, Z)$  and  $G$  be as in §5.1. Our next aim is to find an étale cover  $f : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  which "preserves" the log-inertia structure of  $(X, Z)$  and such that  $(Y, T)$  admits a rigidification. The condition on the log structure is obvious: we want  $f$  to be strict, i.e.  $f^{-1}(Z) = T$ . Let us introduce a restriction related to the inertia groups.

Assume that  $(Y, T)$  with an action of  $H$  is another such triple, and let  $\lambda : H \rightarrow G$  be a homomorphism. A  $\lambda$ -equivariant morphism  $f : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  will be called *inert* if for any point  $y \in Y$  with  $x \in X$  the induced homomorphism of inertia groups  $G_{\bar{y}} \rightarrow G_{\bar{x}}$  is an isomorphism. In particular, the inertia stratification of  $Y$  is the preimage of the inertia stratification of  $X$ .

LEMMA 5.3.7. Let  $X, Z$  and  $G$  be as above, and assume that  $X$  is qe. Then there exists a  $G$ -equivariant surjective étale inert strict morphism  $h : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  such that  $Y$  is affine and  $(Y, T)$  possesses a strict rigidification.

*Proof.* First, we note that the problem is local on  $X$ . Namely, it suffices for any point  $x \in X$  to find a  $G_{\bar{x}}$ -equivariant étale inert strict morphism  $h : (Y, T) \rightarrow (X, Z)$  such that  $Y$  is affine,  $x \in h(Y)$ , any point  $x' \in h(Y)$  satisfies  $G_{\bar{x}'} \subseteq G_{\bar{x}}$ , and  $(Y, T)$  admits a strict rigidification. Indeed,  $h$  can be extended to a  $G$ -equivariant morphism  $Y \times_X (X \times G/G_{\bar{x}}) = \coprod_{g \in G/G_{\bar{x}}} Y_g \rightarrow X$ , where each  $Y_g$  is isomorphic to  $Y$  and the morphism  $Y_g \rightarrow X$  is obtained by composing  $Y \rightarrow X$  with  $g : X \rightarrow X$ . Clearly, the latter morphism is étale, inert, and strict, and by quasi-compactness of  $X$  we can combine finitely many such morphism to obtain a required cover of  $(X, Z)$ .

Now, fix  $x \in X$  and consider the  $G_{\bar{x}}$ -invariant neighborhood  $X' = X \setminus \cup_{H \not\subseteq G_{\bar{x}}} X^H$  of  $x$ . We will work over  $X'$ , so the condition  $G_{\bar{x}'} \subseteq G_{\bar{x}}$  will be automatic. Let  $N$  be the order of  $G_{\bar{x}}$ , and consider the  $G_{\bar{x}}$ -equivariant morphism  $f : Y = X' \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \mu_N]) \rightarrow X$  (with  $G_{\bar{x}}$  acting trivially on the second factor). Let  $T = f^{-1}(Z)$  and let  $y$  be any lift of  $x$ . It suffices to show that  $(Y, T)$  admits a rigidification in an affine  $G_{\bar{x}}$ -invariant neighborhood of  $y$  (such neighborhoods form a fundamental family of neighborhoods of  $y$ ). By Lemma 5.3.5, the localization  $Y_y = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$  with the restriction  $T_y$  of  $T$  possesses a strict rigidification  $\bar{T}_y$ . Clearly,  $\bar{T}_y$  extends

to a divisor  $\bar{T}$  with  $T \hookrightarrow \bar{T} \hookrightarrow Y$  and we claim that it is a rigidification in a neighborhood of  $y$ . Indeed,  $\bar{T}$  is snc at  $y$ , hence it is snc in a neighborhood of  $y$  by Remark 4.2.2, and it remains to use Lemma 5.3.2.  $\square$

**5.3.8. Main construction.** Assume, now, that  $X = (X, Z)$  is admissible and admits a rigidification  $\bar{Z}$ . We are going to construct a  $G$ -equivariant modification

$$f_{(G,X,Z,\bar{Z})}: (X', Z') \rightarrow (X, Z)$$

such that  $G$  acts very tamely on the target and  $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$  is independent of the rigidification. The latter is a subtle property (missing in the obvious modification  $(X, \bar{Z}) \rightarrow (X, Z)$ ), and it will take us a couple of pages to establish it.

The quotient log scheme  $\bar{Y} = (Y, \bar{T}) = (\bar{X}/G, \bar{Z}/G)$  is log regular by Theorem VI-3.2, hence by Theorem 3.3.15 there exists a functorial saturated log blow up tower  $\bar{h} = \widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(\bar{Y}): \bar{Y}' = (Y', \bar{T}') \rightarrow \bar{Y}$  with a regular and log regular source. Let  $\bar{f}: \bar{X}' = (X', \bar{Z}') \rightarrow \bar{X}$  be the pullback of  $\bar{h}$  (as a saturated log blow up tower, see §3.3.10), then  $\alpha': \bar{X}' \rightarrow \bar{Y}'$  is a Kummer étale  $G$ -cover because  $\alpha: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  is so by VI-3.2 as the square

$$\begin{array}{ccc} (X', \bar{Z}') & \xrightarrow{\bar{f}} & (X, \bar{Z}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ (Y', \bar{T}') & \xrightarrow{\bar{h}} & (Y, \bar{T}) \end{array}$$

is cartesian in the category of fs log scheme.

Since  $G$  acts freely on  $U = X - Z$ ,  $V = U/G$  is regular and  $\bar{T}|_V$  is snc. In particular,  $\bar{h}$  is an isomorphism over  $V$  and hence  $\bar{f}$  is an isomorphism over  $U$ . We claim that the Weil divisor  $T = Z/G$  of  $Y$  is  $\mathbf{Q}$ -Cartier (it does not have to be Cartier, as the orbifold case with  $X = \mathbf{A}^2$ ,  $Z = \mathbf{A}^1$  and  $G = \{\pm 1\}$  shows). Indeed, it suffices to check this étale-locally at a point  $y \in Y$ . In particular, we can assume that  $\mu_N \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ , where  $N = |G|$ . Then, as we showed in the proof of Lemma 5.3.5,  $Z$  can be locally defined by equivariant parameters, in particular,  $Z = V(f)$  where  $G$  acts on  $f$  by characters. Therefore,  $f^N$  is  $G$ -fixed, and we obtain that  $T$  is the reduction of the Cartier divisor  $C$  of  $Y$  given by  $f^N = 0$ . (The same argument applied to  $T \times_Y X$  shows that  $NT$  is Cartier, so  $T$  is  $\mathbf{Q}$ -Cartier.) So,  $C' = C \times_Y Y'$  is a Cartier divisor whose reduction is  $T' = \bar{h}^{-1}(T)$ . Since  $Y'$  is regular and  $T'$  lies in the snc divisor  $\bar{T}'$ , we obtain that  $T'$  is itself an snc divisor.

Let  $Z'$  denote the divisor  $\alpha'^{-1}(T') = \bar{f}^{-1}(Z)$ . Since  $X' \rightarrow Y'$  is étale over  $V = Y' - T'$ , the morphism of log schemes  $(X', Z') \rightarrow (Y', T')$  is a Kummer étale  $G$ -cover. This follows from a variant of the classical Abhyankar's lemma (IX 2.1), which is independent of the results of the present exposé.

In particular,  $X' = (X', Z')$  is log regular and it follows that the action of  $G$  on  $X'$  is very tame. We define  $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$  to be the modification  $X' \rightarrow X$ .

**REMARK 5.3.9.** (i) Note that  $X' \rightarrow X$  satisfies all conditions of Theorem 1.1 because the action is very tame and  $G$  acts freely on  $X' \setminus f^{-1}(Z)$ . So, we completed the proof in the case when  $(X, Z)$  admits a rigidification  $\bar{Z}$ . Our last task will be to get rid of the rigidification.

(ii) The only dependence of our construction on the rigidification is when we construct the resolution of  $(Y, \bar{T})$ . Conjecturally, it depends only on the scheme

$Y$ , and then  $(Y', T')$ , and hence also  $(X', Z')$ , would depend only on  $(X, Z)$ . Recall that we established in Theorem 3.4.15 the particular case of this conjecture when all maximal points of the log strata of  $(Y, \bar{T})$  are of characteristic zero. Hence independence of the rigidification is unconditional in this case, and, fortunately, this will suffice.

**5.3.10. Finer structure of  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ .** Obviously, the saturated log blow up tower  $\bar{f}: (X', \bar{Z}') \rightarrow (X, \bar{Z})$  depends on the rigidification, and this is the reason why we prefer to consider the modification  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}: (X', Z') \rightarrow (X, Z)$  instead. However, there is an additional structure on  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  that has a chance to be independent of  $\bar{Z}$ , and which should be taken into account. By §3.4.8, the modification of schemes  $f: X' \rightarrow X$  has a natural structure of a normalized blow up tower  $X_\bullet$  with  $X = X_0$  and  $X' = X_n$ . Note also that the tower contains no empty blow ups because this is true for  $\mathcal{F}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$  and  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  is its strict transform with respect to the surjective morphism  $X \rightarrow X/G$ .

Note also that the log structure on  $(X', Z')$  is reconstructed uniquely from  $f$  because  $Z' = f^{-1}(Z)$  and  $(X', Z')$  is saturated and log regular. Therefore, it is safe from now on to view  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  as a normalized blow up tower of  $X$ , but the modification of log schemes  $(X', Z') \rightarrow (X, Z)$  will also be denoted as  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ .

**REMARK 5.3.11.** Although we do not assume that  $X$  is qe, all normalizations in the tower  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  are finite. This happens because they underly saturations of fine log schemes, which are always finite morphisms.

**5.4. Functoriality.** Clearly, the construction of  $f$  depends canonically on  $(G, X, Z, \bar{Z})$ , i.e. is compatible with any automorphism of such quadruple. Our next aim is to establish functoriality with respect to strict inert  $\lambda$ -equivariant morphisms  $\phi: (H, Y, T, \bar{T}) \rightarrow (G, X, Z, \bar{Z})$  (i.e. morphisms that "preserve the combinatorial structure"). For this one has first to study the quotient morphism of log schemes  $\tilde{\phi}: (Y/H, \bar{T}/H) \rightarrow (X/G, \bar{Z}/G)$ .

**5.4.1. Log structure of the quotients.** Recall the following facts from Proposition VI-3.5(b) and its proof. Assume that  $X = (X, M_X)$  is an fs log scheme provided with a very tame action of a group  $G$ . After replacing  $X$  with its strict localization at a geometric point  $\bar{x}$ , it admits an equivariant chart  $X \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[Q])$ , where  $\Lambda = \mathbf{Z}[1/N, \mu_N]$  for the order  $N$  of  $G_{\bar{x}}$ ,  $Q$  is an fs monoid and the action of  $\bar{G}_{\bar{x}}$  is via a pairing  $\chi: G_{\bar{x}} \otimes Q \rightarrow \mu_N$ . Moreover, if  $P \subseteq Q$  is the maximal submonoid with  $\chi(G_{\bar{x}} \otimes P) = 1$  then  $\text{Spec}(\Lambda[Q]) \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[P])$  is a chart of  $X \rightarrow X/G_{\bar{x}}$ . Now, let us apply this description to the study of  $\tilde{\phi}$ .

**PROPOSITION 5.4.2.** *Assume that fs log schemes  $X, Y$  are provided with admissible very tame actions of groups  $G$  and  $H$ , respectively,  $\lambda: H \rightarrow G$  is a homomorphism, and  $\phi: Y \rightarrow X$  is a strict inert  $\lambda$ -equivariant morphism. Then the quotient morphism  $\tilde{\phi}: Y/H \rightarrow X/G$  is strict.*

*Proof.* Fix a geometric point  $\bar{y}$  of  $Y$  and let  $\bar{x}$  be its image in  $X$ . It suffices to show that  $\tilde{\phi}$  is strict at the image of  $\bar{y}$  in  $Y/H$ . The morphism  $Y/H_{\bar{y}} \rightarrow Y/H$  is strict (and étale) over the image of  $\bar{y}$ , and the same is true for  $X$ . Therefore we can replace  $H$  and  $G$  with  $H_{\bar{y}} \xrightarrow{\sim} G_{\bar{x}}$ , and then we can also replace  $X$  and  $Y$  with their strict localizations at  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$ . Now, the morphism  $X \rightarrow \tilde{X} = X/G_{\bar{x}}$

admits an equivariant chart  $h: \text{Spec}(\Lambda[Q]) \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[P])$  as explained before the proposition. Since  $\phi$  is strict, the induced morphism  $Y \rightarrow \text{Spec}(\Lambda[Q])$  is also a chart and hence  $h$  is also a chart of  $Y \rightarrow Y/G_{\bar{y}}$ . Thus,  $\tilde{\phi}$  is strict.  $\square$

**5.4.3. An application to functoriality of  $f_{\bullet}$ .** Assume that  $(G, X, Z, \bar{Z})$  is as earlier, and let  $(H, Y, T, \bar{T})$  be another such quadruple (i.e.  $(Y, T)$  with the action of  $H$  satisfies conditions of Steps 1, 2, 3 and  $(Y, \bar{T})$  is its rigidification).

**COROLLARY 5.4.4.** Assume that  $\lambda: H \rightarrow G$  is a homomorphism and  $\phi: Y \rightarrow X$  is a  $\lambda$ -equivariant inert morphism such that  $T = Z \times_X Y$  and  $\bar{T} = \bar{Z} \times_X Y$ . Then  $f_{\bullet}$  is compatible with  $\phi$  in the sense that  $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$  is the contraction of  $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})})$ . In addition,  $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})}) = f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X Y$ .

*Proof.* The morphism  $\psi: (Y, \bar{T}) \rightarrow (X, \bar{Z})$  is strict, hence the morphism of quotients is strict by Proposition 5.4.2, and by functoriality of saturated monoidal desingularization we obtain that  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(Y/H, \bar{T}/H)$  is the contracted pullback of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$ . So, both  $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$  and  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  are obtained as the contraction of the strict transform of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$ . The first claim of the Corollary follows.

Furthermore,  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  underlies a log blow up tower of  $(X, \bar{Z})$  which is the strict transform of  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X/G, \bar{Z}/G)$ , and the same is true for  $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$ . Since  $\psi$  is strict it follows from Lemma 3.4.6(ii) that the strict transform is a pullback, i.e.  $\phi^{\text{st}}(f_{(G, X, Z, \bar{Z})}) = f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X Y$ .  $\square$

**5.4.5. Localizations and completions.** In particular, it follows that the construction of  $f_{\bullet}$  is compatible with localizations and completions. Namely, if  $x \in X$  is a point,  $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$ ,  $Z_x = Z \times_X X_x$  and  $\bar{Z}_x = \bar{Z} \times_X X_x$ , then  $f_{(G_x, X_x, Z_x, \bar{Z}_x)}$  is the contraction of  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X X_x$ . Similarly, if  $\widehat{X}_x = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, x})$ ,  $\widehat{Z}_x = Z \times_X \widehat{X}_x$  and  $\widehat{\bar{Z}}_x = \bar{Z} \times_X \widehat{X}_x$ , then  $f_{(G_x, \widehat{X}_x, \widehat{Z}_x, \widehat{\bar{Z}}_x)}$  is the contraction of  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} \times_X \widehat{X}_x$ .

**5.5. Globalization.** To complete the proof of Theorem 1.1 it suffices to show that  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  is independent of  $\bar{Z}$ , and hence the local constructions glue to a global normalized blow up tower. The main idea is to simultaneously lift two rigidifications to characteristic zero and apply Theorem 3.4.15.

**5.5.1. Independence of rigidification.** We start with the case of complete local rings. Then the problem is solved by lifting to characteristic zero and referencing to 3.4.15. The general case will follow rather easily.

**LEMMA 5.5.2.** Keep assumptions on  $(X, Z)$  and  $G$  as in §5.1 and assume, in addition, that  $X = \coprod_{i=1}^m \text{Spec}(A_i)$  where each  $A_i$  is a complete noetherian regular local ring with a separably closed residue field. Then for any pair of rigidifications  $\bar{Z}$  and  $\bar{Z}'$  the equality  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z}'})$  holds.

*Proof.* Almost the whole argument runs independently on each irreducible component, so assume first that  $X = \text{Spec}(A)$  is irreducible. By Remark 5.3.9(ii), it suffices to consider the case when  $\text{char}(k) = p > 0$ , so let  $C(k)$  be a Cohen ring of  $k$ . Note that we can work with  $H = G_{\bar{x}}$  instead of  $G$  because  $f_{(H, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  by Corollary 5.4.4. Since  $H$  acts trivially on  $k$ , for any element  $t \in A$  its  $H$ -averaging is an element of  $A^H$  with the same image in the residue field. Hence  $k$  is the residue field of  $A^H$  and the usual theory of Cohen rings provides a

homomorphism  $C(k) \rightarrow A^H$  that lifts  $C(k) \rightarrow A^H/m_{A^H}$ . Note that  $\bar{Z}$  and  $\bar{Z}'$  are snc because each  $A_i$  is strictly henselian. Using averaging on the action of  $H$  again, we can find regular families of  $H$ -equivariant parameters  $\underline{z} = (z_1, \dots, z_d)$  and  $\underline{z}' = (z'_1, \dots, z'_d)$  such that  $Z = V(\prod_{i=1}^d z_i)$ ,  $z'_i = z_i$  for  $1 \leq i \leq l$ ,  $\bar{Z} = V(\prod_{i=1}^n z_i)$  and  $\bar{Z}' = V(\prod_{i=1}^{n'} z'_i)$ . Explicitly, the action on  $z_i$  (resp.  $z'_i$ ) is by a character  $\chi_i: H \rightarrow k(x)^\times$  (resp.  $\chi'_i: H \rightarrow k(x)^\times$ ).

Since the image of  $\underline{z}$  is a basis of the cotangent space at  $x$ , we obtain a surjective homomorphism  $f: B = C(k)[[t_1, \dots, t_d]] \rightarrow A$  taking  $t_i$  to  $z_i$ . Provide  $B$  with the action of  $H$  which is trivial on  $C(k)$  and acts on  $t_i$  via  $\chi_i$ , in particular,  $f$  is  $H$ -equivariant. Let us also lift each  $z'_i$  to an  $H$ -equivariant parameter  $t'_i \in B$ . For  $i \leq l$  we take  $t'_i = t_i$ , and for  $i > l$  we first choose any lift and then replace it with its  $\chi_i$ -weighted  $H$ -averaging. Consider the regular scheme  $Y = \text{Spec}(B)$  with  $H$ -equivariant snc divisors  $T = V(\prod_{i=1}^d z_i)$ ,  $\bar{T} = V(\prod_{i=1}^n z_i)$  and  $\bar{T}' = V(\prod_{i=1}^{n'} z'_i)$ .

Since  $H$  acts vary tamely on  $(X, \bar{Z})$ , it acts trivially on  $V(z_1, \dots, z_n) = \text{Spec}(k[[z_{n+1}, \dots, z_d]])$  and we obtain that  $\chi_i = 1$  for  $i > n$ . Therefore,  $H$  also acts trivially on  $\text{Spec}(B/(t_1, \dots, t_n)) = \text{Spec}(C(k)[[t_{n+1}, \dots, t_d]])$  and we obtain that the action on  $(Y, \bar{T})$  is very tame. Since the closed immersion  $j: X \rightarrow Y$  is  $H$ -equivariant and strict, and  $\bar{Z} = \bar{T} \times_Y X$ , Corollary 5.4.4 implies that  $f_\bullet$  is compatible with  $j$ , i.e.,  $f_{(H, X, Z, \bar{Z})}$  is the contracted strict transform of  $f_{(H, Y, T, \bar{T})}$ . The same argument applies to the rigidifications  $\bar{Z}'$  and  $\bar{T}'$ , so it now suffices to show that  $f_{(H, Y, T, \bar{T})} = f_{(H, Y, T, \bar{T}' )}$ . For this we observe that maximal points of log strata of the log schemes  $(Y/H, \bar{T}/H)$  and  $(Y/H, \bar{T}'/H)$  are of characteristic zero, hence the latter equality holds by Theorem 3.4.15.

Finally, let us explain how one deals with the case of  $m > 1$ . First one finds an  $H$ -equivariant strict closed immersion  $i: X \rightarrow Y$  such that  $\bar{Z}$  and  $\bar{Z}'$  extend to rigidifications  $\bar{T}$  and  $\bar{T}'$  of  $(Y, T)$ , and the maximal points of the log strata of  $(Y/H, \bar{T}/H)$  and  $(Y/H, \bar{T}'/H)$  are of characteristic zero. For this we apply independently the above construction to the connected components of  $X$ . Once  $i$  is constructed, the same reference to 3.4.15 shows that  $f_{(H, Y, T, \bar{T})} = f_{(H, Y, T, \bar{T}' )}$  and hence  $f_{(H, X, Z, \bar{Z})} = f_{(H, X, Z, \bar{Z}' )}$   $\square$

**COROLLARY 5.5.3.** Let  $(X, Z)$  and  $G$  be as in §5.1 and assume that the action is admissible. Then for any choice of rigidifications  $\bar{Z}$  and  $\bar{Z}'$  we have that  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})} = f_{(G, X, Z, \bar{Z}' )}$ .

*Proof.* For a point  $x \in X$  let  $\widehat{\mathcal{O}}_{X, x}^{\text{sh}}$  denote the completion of the strict henselization of  $\mathcal{O}_{X, x}$ . It suffices to check that for any point  $x$  the normalized blow up towers  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  and  $f_{(G, X, Z, \bar{Z}' )}$  pull back to the same normalized blow up towers of  $\widehat{X}_x^{\text{sh}} = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, x}^{\text{sh}})$  (with respect to the morphism  $\widehat{X}_x^{\text{sh}} \rightarrow X$ ). Indeed, any normalized blow up tower  $\mathcal{X} = (X_\bullet, V_\bullet)$  is uniquely determined by its centers  $V_i$ . For each  $i$  the morphism  $Y_i = \prod_{x \in X} X_i \times_x \widehat{X}_x^{\text{sh}} \rightarrow X_i$  is faithfully flat, hence  $V_i$  is uniquely determined by  $V_i \times_{X_i} Y_i$ , which is the center of  $\mathcal{X} \times_X \prod_{x \in X} \widehat{X}_x^{\text{sh}}$ .

By §5.4.5,  $f_{(G, \widehat{X}_x^{\text{sh}}, Z \times_x \widehat{X}_x^{\text{sh}}, \bar{Z} \times_x \widehat{X}_x^{\text{sh}})}$  is the contracted pullback of  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$ , and an analogous result is true for  $f_{(G, X, Z, \bar{Z}' )}$ . Thus the contracted pullbacks are equal by Lemma 5.5.2. We have, however, to worry also for the synchronization, i.e. to establish equality of non-contracted pullbacks. For this we will use the following trick. The towers  $f_{(G, X, Z, \bar{Z})}$  and  $f_{(G, X, Z, \bar{Z}' )}$  are of finite length, hence there exists a

finite subset  $S \subset X$  such that the image of any center of either of these towers has a non-empty intersection with  $S$ . Set  $\widehat{X}_S^{\text{sh}} = \coprod_{s \in S} \widehat{X}_s^{\text{sh}}$ , then the pullbacks of  $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$  and  $f_{(G,X,Z,\bar{Z}' )}$  to  $\widehat{X}_S^{\text{sh}}$  are already contracted. Now, in order to compare the pullbacks to  $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$ , consider the pullbacks to  $\widehat{X}_x^{\text{sh}} \coprod \widehat{X}_S^{\text{sh}}$ . They are contracted, so Lemma 5.5.2 (which covers disjoint unions) implies that these pullbacks are equal. Restricting them onto  $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$  we obtain equality of non-contracted pullbacks to  $\widehat{X}_x^{\text{sh}}$ .  $\square$

**REMARK 5.5.4.** (i) The above corollary implies that the modification  $f_{(G,X,Z,\bar{Z})}$  depends only on  $(G, X, Z)$ , so it will be denoted  $f_{(G,X,Z)}$  in the sequel. At this stage,  $f_{(G,X,Z)}$  is defined only when  $X$  is admissible and  $(X, Z)$  admits a rigidification.

(ii) Corollaries 5.4.4 and 5.5.3 imply that  $f_{(G,X,Z)}$  is functorial with respect to equivariant strict inert morphisms.

**5.5.5. Theorem 1.1 – end of proof for.** Let  $X = (X, Z)$  be as assumed in §5.1, and suppose that  $X$  is qe. By Lemma 5.3.7 there exists a surjective étale inert strict morphism  $h: X_0 \rightarrow X$  such that  $X_0$  is affine and possesses a rigidification. Then  $X_1 = X_0 \times_X X_0$  is affine and also admits a rigidification (e.g. the preimage of that of  $X_0$  by one of the canonical projections). By Remark 5.5.4(i),  $X_0$  and  $X_1$  possess normalized blow up towers  $f_{(G,X_0,Z_0)}$  and  $f_{(G,X_1,Z_1)}$ , which are compatible with both projections  $X_1 \rightarrow X_0$  by Remark 5.5.4(ii). It follows that  $f_{(G,X_0,Z_0)}$  is induced from a unique normalized blow up tower of  $X$  that we denote as  $f_{(G,X,Z)}$ . This modification satisfies all assertions of Theorem 1.1 because  $f_{(G,X_0,Z_0)}$  does so by Remark 5.3.9(i).

**5.6. Additional properties of  $f_{(G,X,Z)}$ .** Finally, let us formulate an addendum to Theorem 1.1 where we summarize additional properties of the constructed modification of  $(X, Z)$ . At this stage we drop any assumptions on  $(X, Z)$  beyond the assumptions of 1.1. By  $f_{(G,X,Z)}$  we denote below the entire modification from Theorem 1.1 that also involves the modifications of Steps 1, 2, 3.

**THEOREM 5.6.1.** Keep assumptions of Theorem 1.1. In addition to assertions of the theorem, the modifications  $f_{(G,X,Z)}$  can be constructed uniformly for all triples  $(G, X, Z)$  such that the following properties are satisfied:

(i) Each  $f_{(G,X,Z)}$  is provided with a structure of a normalized blow up tower and its centers are contained in the preimages of  $Z \cup T$ .

(ii) For any homomorphism  $\lambda: H \rightarrow G$  the construction is functorial with respect to  $\lambda$ -equivariant inert strict morphisms  $(Y, T) \rightarrow (X, Z)$ .

*Proof.* The total modification  $f_{(G,X,Z)}$  is obtained by composing four modifications  $f_1, f_2, f_3$  and  $f_4$ : the modifications from Steps 1, 2, 3 and the modification we have constructed in §5. Recall that  $f_1$  and  $f_4$  are constructed as normalized blow up towers. Modifications  $f_2$  and  $f_3$  are permissible blow up towers, hence they are also normalized blow up towers with the same centers. This establishes the first part of (i).

Claim (ii) follows from the following functorialities:  $f_1$  and  $f_2$  are functorial with respect to all strict morphisms,  $f_3$  is functorial with respect to all inert morphisms, and  $f_4$  is functorial with respect to strict inert morphisms. To prove the second part of (i) we use (ii) to restrict  $f_{(G,X,Z)}$  onto  $U = X \setminus Z \cup T$ . Then  $U$  is a regular scheme with a trivial log structure which is acted freely by  $G$ . It follows from the definitions of  $f_1, f_2, f_3$  and  $f_4$  that they are trivial for such  $U$ . So,  $f_{(G,U,\emptyset)}$

is the trivial tower, and hence all centers of  $f_{(G,X,Z)}$  are disjoint from the preimage of  $\mathcal{U}$ .  $\square$



## EXPOSÉ IX

### Uniformisation locale première à $\ell$

Luc Illusie

#### 1. Rappel de l'énoncé et premières réductions

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation locale première à  $\ell$  (II-4.3.1, III-6.1) :

**THÉORÈME 1.1.** *Soient  $X$  un schéma noethérien quasi-excellent,  $Z$  un fermé rare de  $X$  et  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$ . Il existe une famille finie de morphismes  $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ , couvrante pour la topologie des  $\ell'$ -altérations et telle que, pour tout  $i \in I$  :*

- (i)  $X_i$  soit régulier et connexe,
- (ii)  $p_i^{-1}(Z)$  soit le support d'un diviseur à croisements normaux stricts.

Le premier ingrédient essentiel de la démonstration de 1.1 est le résultat suivant, forme faible d'un résultat de de Jong [de Jong, 1997, 2.4] :

**THÉORÈME 1.2.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre de schémas noethériens excellents intègres, et  $Z$  un sous-schéma fermé rare de  $X$ . Soit  $\eta$  le point générique de  $Y$ . On suppose que  $X_\eta$  est lisse, irréductible et de dimension 1, et que  $Z_\eta$  est étale. Il existe alors un groupe fini  $G$ , un diagramme commutatif de  $G$ -schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array} ,$$

*un diviseur effectif  $G$ -équivariant  $D$  dans  $X'$ , et un fermé rare  $G$ -équivariant  $T'$  de  $Y'$  possédant les propriétés suivantes :*

- (i)  $f'$  est projectif;
- (ii)  $G$  agit trivialement sur  $X$  et  $Y$ , librement sur  $Y' - T'$ ;
- (iii)  $a$  et  $b$  sont des altérations projectives génériquement étales, et  $Y'/G \rightarrow Y$  (resp.  $X'/G \rightarrow X$ ) induit un isomorphisme en  $\eta$  (resp. au point générique de  $X_\eta$ );
- (iv)  $f'$  est une courbe nodale, lisse hors de  $T'$ ;
- (v)  $D$  est étale sur  $Y'$ , et contenu dans le lieu lisse de  $f'$ ;
- (vi)  $Z' := a^{-1}(Z)$  est contenu dans  $D \cup f'^{-1}(T')$ .

Rappelons que dire que  $f'$  est une courbe nodale signifie que  $f'$  est plat, à fibres géométriques connexes de dimension 1, ayant pour seules singularités des points quadratiques ordinaires.

Il suffit en effet d'appliquer (*loc. cit.*) au couple  $(f, Z)$ , avec le groupe  $G$  de (*loc. cit.*) égal à  $\{1\}$ . Les hypothèses faites sur  $X_\eta$  et  $Z_\eta$  assurent que  $(f, Z)$  vérifie la condition (2.1.1) de [de Jong, 1997], et donc que le couple  $(a, b)$  vérifie (2.2.1) et (2.2.5) de (*loc. cit.*); ce qui implique (iii). Le fermé  $T'$  est donné par le fermé noté  $D$  dans (*loc. cit.*, 2.5), éventuellement agrandi pour que  $G$  opère librement sur

$Y' - T'$ . Noter que, si  $Y$  est séparé, il en est de même de  $Y'$ , et (ii) entraîne que  $G$  opère fidèlement sur  $X'$  et  $Y'$ .

**1.3.** Les premières réductions de la démonstration de **1.1** sont analogues à celles de la démonstration du théorème d'uniformisation locale faible. Il suffit de prouver **1.1** pour  $X$  de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension de  $X$ . Le théorème est connu en dimension  $\leq 1$  (normalisation). Soit  $d$  un entier  $\geq 2$ . Supposons le théorème établi en dimension  $< d$ . D'après **(III-6.2)**, on peut supposer  $X$  local noethérien complet, et même normal. D'après **V-3.1.3**, quitte à faire une extension finie de  $X$  de degré générique premier à  $\ell$ , on peut supposer qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

avec  $Y$  local noethérien régulier complet de dimension  $d - 1$  et  $f$  de type fini, à fibres de dimension 1, et un point fermé  $x'$  de  $X'$  et un fermé rare  $Z'$  de  $X'$  tels que  $f(x')$  soit le point fermé de  $Y$ ,  $g$  induise un isomorphisme de  $X$  sur le complété de  $X'$  en  $x'$ , et qu'enfin  $Z = g^{-1}(Z')$ . Comme  $X'$  est excellent,  $g$  est régulier. Le changement de base par  $g$  préserve régularité, diviseurs à croisements normaux, et familles couvrantes pour la topologie des  $\ell'$ -altérations **(II-2.3)**. On peut donc remplacer  $X$  par  $X'$ , donc, quitte à changer les notations, supposer  $X$  de dimension  $d$ , muni d'un morphisme de type fini  $f : X \rightarrow Y$ , à fibres de dimension 1. Le problème étant local pour la topologie des  $\ell'$ -altérations, donc *a fortiori* pour la topologie de Zariski, on peut supposer  $X$  affine. Compactifiant  $f$ , on se ramène à supposer  $f$  propre. Quitte à éclater dans  $X$  un sous-schéma fermé ayant  $Z$  pour espace sous-jacent, on peut supposer que  $Z$  est un diviseur dans  $X$ . Le morphisme  $f$  n'est plus nécessairement une courbe relative, mais sa fibre générique reste de dimension 1. Soit  $\eta$  le point générique de  $Y$ . D'après **([ÉGA IV 4.6.6])** il existe une extension radicielle finie  $\eta'$  de  $\eta$  telle que  $(X_{\eta'})_{\text{red}}$  soit géométriquement réduit, et  $(Z_{\eta'})_{\text{red}}$  étale sur  $\eta'$ . Quitte à remplacer  $Y$  par son normalisé dans  $\eta'$ ,  $X$  par son normalisé dans le corps des fractions de  $(X_{\eta'})_{\text{red}}$ , et  $Z$  par son image inverse réduite, on peut donc supposer que  $X_{\eta}$  est lisse et que  $Z_{\eta}$  est étale. Le schéma  $Y$  n'est plus nécessairement régulier, mais reste affine, normal, intègre et excellent.

Considérons la factorisation de Stein  $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{q} Y$  de  $f : q$  est fini surjectif, génériquement étale,  $f_1$  est propre et surjectif, et ses fibres géométriques sont connexes. Comme  $f_{1*} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y_1}$  et que  $X$  est intègre,  $Y_1$  est intègre également. Quitte à remplacer  $Y$  par  $Y_1$  (et  $f$  par  $f_1$ ), on peut donc supposer que la fibre générique de  $f$  est lisse, géométriquement connexe, et que  $Z_{\eta}$  est étale. On se trouve alors dans la situation de **1.2**, avec  $Z$  un diviseur, et  $Y$  affine.

**1.4.** Appliquons **1.2** à la situation que nous venons d'obtenir. D'après (iii), le morphisme  $X'/G \rightarrow X$  est  $\text{alt}_{\ell'}$  couvrant. Remplaçant  $X$  par  $X'/G$ ,  $Z$  par son image inverse, et  $Y$  par  $Y'/G$ , et changeant les notations, on peut donc supposer que  $X = X'/G$ ,  $Y = Y'/G$ . Noter que, comme  $Y$  est affine et  $b, f'$  projectifs, les actions de  $G$  sur  $X'$  et  $Y'$  sont admissibles, et  $X'/G$  et  $Y'/G$  sont encore intègres et

excellents. Soit  $H$  un sous-groupe de  $\ell$ -Sylow de  $G$ . Considérons la factorisation

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{a_1} & X'/H & \xrightarrow{a_2} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{b_1} & Y'/H & \xrightarrow{b_2} & Y \end{array}$$

Comme  $a_2$  est  $\text{alt}_\ell$ -couvrant, on peut (utilisant l'admissibilité de l'action de  $H$ ) remplacer  $X$  par  $X'/H$ ,  $Z$  par son image inverse dans  $X'/H$ ,  $Y$  par  $Y'/H$ , et enfin  $G$  par  $H$ , de sorte qu'on peut supposer que  $G$  est un  $\ell$ -groupe.

Appliquons l'hypothèse de récurrence au couple  $(Y = Y'/G, T := T'/G)$ . Il existe une famille finie  $\text{alt}_\ell$ -couvrante  $(Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ , avec  $Y_i$  régulier connexe, et (l'espace sous-jacent à)  $T_i = Y_i \times_Y T$  le support d'un diviseur à croisements normaux stricts. Pour chaque  $i \in I$ , soient  $Y'_i$  le normalisé d'une composante de  $Y' \times_Y Y_i$  et  $G_i \subset G$  le groupe de décomposition de  $Y_i$ . Remplaçant  $Y$  par  $Y_i$ ,  $Y'$  par  $Y'_i$ ,  $G$  par  $G_i$ , et les autres données par leurs images inverses par  $Y_i \rightarrow Y$ ,  $Y'_i \rightarrow Y'$ , et travaillant séparément sur chaque  $Y_i$ , on se ramène à supposer que, dans le diagramme de 1.2, on a les propriétés additionnelles suivantes :

(\*)  $Y = Y'/G$  est affine, régulier, connexe,  $T = T'/G$  est un diviseur à croisements normaux stricts dans  $Y$ ,  $Y' - T' = Y' \times_Y (Y - T)$  est un revêtement étale galoisien de  $Y - T$  de groupe  $G$ ,  $Y'$  est le normalisé de  $Y$  dans  $Y' - T'$ ,  $X = X'/G$ .

## 2. Log régularité, fin de la démonstration

Nous aurons besoin du résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Fujiwara-Kato [Fujiwara & Kato, 1995, 3.1] :

**PROPOSITION 2.1.** *Soient  $Y$  un schéma noethérien régulier,  $T \subset Y$  un diviseur à croisements normaux stricts,  $V = Y - T$ . Munissons  $Y$  de la log structure telle que le couple  $(Y, T)$  soit log régulier (VI-1.4). Alors :*

(i) *Le foncteur de restriction de la catégorie des revêtements Kummer étales de  $Y$  dans celle des revêtements étales de  $V$  modérément ramifiés le long de  $T$  est une équivalence de catégories.*

(ii) *Si  $Y'$  est un revêtement Kummer étale de  $Y$ ,  $Y'$  est le normalisé de  $Y$  dans  $Y' \times_Y V$ .*

(iii) *Si  $V'$  est un revêtement étale de  $V$ , modérément ramifié le long de  $T$ , il existe une unique log structure fs sur le normalisé  $Y'$  de  $Y$  dans  $V'$  faisant de  $Y'$  un revêtement Kummer étale de  $Y$ .*

Il suffit de prouver (i) et (ii). La question est locale pour la topologie étale sur  $Y$ . On peut donc supposer  $Y$  strictement local,  $Y = \text{Spec} A$ , de point fermé  $y = \text{Spec} k$ , et  $T = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{div}(t_i)$ , où les  $t_i$  font partie d'un système régulier de paramètres de  $A$ . Le log schéma  $Y$  admet la carte  $\overline{M}_y = \mathbf{N}^r \rightarrow A$ ,  $e_i \mapsto t_i$ . D'après le théorème de structure locale des revêtements Kummer étales (VI 2.2), tout revêtement Kummer étale  $Y'$  de  $Y$  est somme de revêtements Kummer étale standard, de la forme  $Z = Y \times_{\text{Spec} \mathbf{Z}[N^r]} \text{Spec} \mathbf{Z}[Q]$ , où  $\mathbf{N}^r \rightarrow Q$  est un morphisme de Kummer tel que  $nQ \subset \mathbf{N}^r$  pour un entier  $n$  premier à la caractéristique de  $k$ . On a donc  $Q = \mathbf{N}^r \cap L$ , pour un sous-groupe  $L$  de  $\mathbf{Z}^r$  tel que  $n[\mathbf{Z}^r : L] = 0$ , et  $Z = (\text{Spec} A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r))^G$ , où  $G = \text{Hom}(\mathbf{Z}^r/L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  est un sous-groupe de  $\mu_n^r$  opérant sur  $\text{Spec} A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r)$  de la manière naturelle. Il en résulte que  $Z$  est le normalisé de  $Y$  dans le revêtement étale  $Z \times_Y V$  de  $V$ . On en déduit (ii), et la pleine fidélité en (i), par la considération de

graphes de morphismes entre revêtements Kummer étales de  $Y$ . L'essentielle surjectivité découle du lemme d'Abhyankar ([SGA 1 XIII 5.3]) donnant la structure du groupe fondamental modéré de  $V$ , qui implique que le normalisé de  $Y$  dans un revêtement étale modéré connexe de  $V$  est de la forme  $Z$  décrite précédemment.

**2.2.** Partons de la situation obtenue à la fin de **1.4**. D'après **2.1**, compte tenu de (\*), il existe sur  $Y'$  une unique log structure faisant de  $Y'$  un revêtement Kummer étale de  $Y$  (muni de la log structure définie par  $T$ ), galoisien de groupe  $G$ . En particulier, le couple  $(Y', T')$  est log régulier. D'après (VI-1.9), le couple  $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$  est log régulier, et pour la log structure correspondante sur  $X'$ ,  $f'$  est log lisse. De plus, l'image inverse  $Z'$  de  $Z$  dans  $X'$  est un diviseur contenu dans  $D' = f'^{-1}(T') \cup D$ .

L'action de  $G$  sur  $X'$  est modérée ( $G$  est un  $\ell$ -groupe), mais pas nécessairement très modérée (VI-3.1). Si elle l'était, le couple  $(X = X'/G, D'/G)$  serait alors log régulier (VI-3.2), et l'on pourrait terminer la démonstration de **1.1** comme dans (VII-4), à l'aide de la résolution des singularités des couples log réguliers. On se ramène à ce cas grâce au théorème de modification (VIII-1.1), dont nous rappelons l'énoncé :

**THÉORÈME 2.3.** *Soit  $(X, Z)$  un couple log régulier (VI-1.4), muni d'une action d'un groupe fini  $G$ . On suppose que  $X$  est noethérien, séparé, et que l'action de  $G$  sur  $X$  est modérée et génériquement libre. Soit  $T$  le complément du plus grand ouvert  $G$ -stable de  $X$  où  $G$  opère librement. Il existe alors une modification projective  $G$ -équivariante  $f : X' \rightarrow X$  telle que, si  $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$ , le couple  $(X', Z')$  soit log régulier, et l'action de  $G$  sur  $X'$  très modérée.*

**2.4.** Le couple  $(X', D')$  de **2.2** vérifie les hypothèses sur  $(X, Z)$  de **2.3** :  $(X', D')$  est log régulier,  $X'$  est séparé (car projectif sur  $Y$ ), l'action de  $G$  sur  $X'$  est modérée, et libre sur  $X' - f'^{-1}(T')$ , en particulier génériquement libre. De plus, l'action de  $G$  sur  $X'$  est admissible. Il existe donc un diagramme commutatif  $G$ -équivariant

$$\begin{array}{ccc} (X'', D'') & \longrightarrow & (X''/G, D''/G) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ (X', D') & \longrightarrow & (X, D) = (X'/G, D'/G) \end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques,  $p$  est une modification projective ( $G$ -équivariante),  $(X'', D'')$  est log régulier, avec  $X'' - D'' \subset p^{-1}(X' - D')$ , et l'action de  $G$  sur  $(X'', D'')$  est très modérée. D'après (VI 3.2), le couple  $(X''/G, D''/G)$  est donc log régulier. Appliquons à ce couple le théorème de désingularisation de Kato-Nizioł ([Kato, 1994, 10.3, 10.4], [Nizioł, 2006, 5.7], [Gabber & Ramero, 2009, 4.5]) : il existe un log éclatement  $e : \tilde{X} \rightarrow X''/G$ , avec  $\tilde{X}$  régulier, et un diviseur à croisements normaux stricts  $\tilde{D}$  tels que  $\tilde{X} - \tilde{D} \subset e^{-1}(X''/G - D''/G)$ . Alors  $\tilde{Z} := (qe)^{-1}(Z)$  a pour support un diviseur contenu dans  $\tilde{D}$ , donc strictement à croisement normaux. Comme  $q$  est une modification,  $qe$  en est une également, et **1.1** est démontré.

## Gabber's modification theorem (log smooth case)

Luc Illusie and Michael Temkin<sup>i</sup>

In this chapter we state and prove a variant of the main theorem of VIII (see VIII-1.1) for schemes  $X$  which are log smooth over a base  $S$  with trivial  $G$ -action. See 1.1 for a precise statement. The proof is given in §1 and in the remaining part of the exposé we deduce refinements of classical theorems of de Jong, for schemes of finite type over a field or a trait, where the degree of the alteration is made prime to a prime  $\ell$  invertible on the base. Sections 2 and 3 are independent and contain two different proofs of such a refinement, so let us outline the methods briefly.

For concreteness, assume that  $k$  is a field,  $S = \text{Spec}(k)$ , and  $X$  is a separated  $S$ -scheme of finite type. Two methods to construct regular  $l'$ -alterations of  $X$  are: (1) use a pluri-nodal fibration to construct a regular  $G$ -alteration  $X' \rightarrow X$  and then factor  $X'$  by an  $l$ -Sylow subgroup of  $G$ , and (2) construct a regular  $l'$ -alteration by induction on  $\dim(S)$  so that one factors by an  $l$ -Sylow subgroup at each step of the induction. The first approach is presented in §2. It is close in spirit to the approach of [de Jong, 1997] and its strengthening by Gabber-Vidal, see [Vidal, 2004a, §4]. The weak point of this method is that one uses inseparable Galois alterations. In particular, even when  $k$  is perfect, one cannot obtain a separable alteration of  $S$ .

In order to deal with the latter case, Gabber suggested to try the second approach, which is close in spirit to the original de Jong's method of [de Jong, 1996]. Note that the results of [de Jong, 1996] do not provide equivariant alterations, which was the main reason to switch to the method of [de Jong, 1997]. However, the recent work [Temkin, 2010] resolves this issue, and Gabber's idea was to use [Temkin, 2010] instead of [de Jong, 1996]. This approach is realized in §3 (which is due to the second author) and it outperforms the method of §2 when  $k$  is perfect. Moreover, developing this method the second author discovered Theorem 3.5 that generalizes Gabber's theorems 2.1 and 2.4 to the case of a general base  $S$  satisfying a certain resolvability assumption (see §3.3). In addition, if  $S$  is of characteristic zero then the same method allows to use modifications instead of  $l'$ -alterations, see Theorem 3.9. As an application, in Theorem 3.10 we generalize Abramovich-Karu's weak semistable reduction theorem. Finally, we minimize separatedness assumptions in §3, and for this we show in §3.1 how to weaken the separatedness assumptions in Theorems VIII-1.1 and 1.1.

### 1. The main theorem

**THEOREM 1.1** (Gabber). Let  $f : X \rightarrow S$  be an equivariant log smooth map between fs log schemes endowed with an action of a finite group  $G$ . Assume that :

---

<sup>i</sup>The research of M.T. was partially supported by the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement 268182.

- (i)  $G$  acts trivially on  $S$  ;
- (ii)  $X$  and  $S$  are noetherian,  $q_e$ , separated, log regular, and  $f$  defines a map of log regular pairs  $(X, Z) \rightarrow (S, W)$  ;
- (iii)  $G$  acts tamely and generically freely on  $X$ .

Let  $T$  be the complement of the largest open subset of  $X$  over which  $G$  acts freely. Then there exists an equivariant projective modification  $h : X' \rightarrow X$  such that, if  $Z' = h^{-1}(Z \cup T)$ , the pair  $(X', Z')$  is log regular, the action of  $G$  on  $X'$  is very tame, and  $(X', Z')$  is log smooth over  $(S, W)$  as well as the quotient  $(X'/G, Z'/G)$  when  $G$  acts admissibly on  $X$ .

**REMARK 1.1.1.** (a) In the absence of the hypothesis (i) it may not be possible to find a modification  $h$  satisfying the properties of **1.1**, as the example at the end of **VIII-1.2** shows.

(b) By [Kato, 1994, 8.2] the log smoothness of  $f$  and the log regularity of  $S$  imply the log regularity of  $X$ . Conversely, according to Gabber (private communication), if  $X$  is log regular and  $f$  is log smooth and surjective, then  $S$  is log regular.

(c) We will deduce Theorem **1.1** from Theorem **VIII-1.1**. Recall that in the latter theorem we assumed that  $X$  is  $q_e$ , though Gabber has a subtler argument that works for a general  $X$ . This forces us to assume that  $S$  (and hence  $X$ ) is  $q_e$  in Theorem **1.1**. However, our argument also shows that once one removes the quasi-excellence assumption from **VIII-1.1**, one also obtains the analogous strengthening of Theorem **1.1**.

For the proof of **1.1** we will use the following result on the local structure of equivariant log smooth maps.

**PROPOSITION 1.2.** (*Gabber's preparation lemma*). *Let  $f : X \rightarrow Y$  be an equivariant log smooth map between fine log schemes endowed with an action of a finite group  $G$ . Let  $x$  be a geometric point of  $X$ , with image  $y$  in  $Y$ . Assume that  $G$  is the inertia group at  $x$  and is of order invertible on  $Y$ . Assume furthermore that  $G$  acts trivially on  $\overline{M}_x$  and  $\overline{M}_y$ <sup>ii</sup> and we are given an equivariant chart  $\alpha : Y \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$  at  $y$ , modeled on some pairing  $\chi : G^{\text{ab}} \otimes Q^{\text{gp}} \rightarrow \mu = \mu_N(\mathbf{C})$  (in the sense of **(VI-3.4)**), where  $Q$  is fine,  $\Lambda = \mathbf{Z}[1/N, \mu]$ , with  $N$  the exponent of  $G$ . Then, up to replacing  $X$  by an étale equivariant neighborhood of  $x$ , there is an equivariant chart  $b : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$  extending  $\alpha$ , such that  $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$  is injective, the torsion of its cokernel is annihilated by an integer invertible on  $X$ , and the resulting map  $b' : X \rightarrow X' = Y \times_{\text{Spec } \Lambda[Q]} \text{Spec } \Lambda[P]$  is smooth. Moreover, up to further shrinking  $X$  around  $x$ ,  $b'$  lifts to an equivariant étale map  $c : X \rightarrow X' \times_{\text{Spec } \Lambda} \text{Spec } \text{Sym}_{\Lambda}(V)$ , where  $V$  is a finitely generated projective  $\Lambda$ -module equipped with a  $G$ -action. If  $X, Y$ , and  $Q$  are fs, with  $Q$  sharp, then  $P$  can be chosen to be fs with its subgroup of units  $P^*$  torsionfree.*

*Proof of 1.2.* This is an adaptation of the proof of [Kato, 1988, 3.5] to the equivariant case. Consider the canonical homomorphism of *loc. cit.*

$$(1) \quad k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{X/Y,x}^1 \rightarrow k(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}$$

sending  $1 \otimes d\log$  to the class of  $1 \otimes t$ , where

$$\overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}} = M_{X,x}^{\text{gp}} / (\mathcal{O}_{X,x}^* + \text{Im} f^{-1}(M_{Y,y}^{\text{gp}})).$$

<sup>ii</sup>If  $M$  is the sheaf of monoids of a log scheme,  $\overline{M}$  denotes, as usual, the quotient  $M/\mathcal{O}^*$ .

It is surjective, and as  $G$  fixes  $x$ , it is  $G$ -equivariant. As  $G$  is of exponent invertible in  $k(x)$  and acts trivially on the right hand side, (1) admits a  $G$ -equivariant decomposition

$$(2) \quad k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \Omega_{X/Y,x}^1 = V_0 \oplus (k(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}),$$

where  $V_0$  is a finite dimensional  $k(x)$ -vector space, endowed with an action of  $G$ . Let  $(t_i)_{1 \leq i \leq r}$  be elements of  $M_x^{\text{gp}}$  such that the classes of  $1 \otimes t_i$  form a basis of  $k(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{M}_{X/Y,x}^{\text{gp}}$ . Let  $Z$  be the free abelian group with basis  $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ , and  $h : Z \rightarrow M_x^{\text{gp}}$  the homomorphism sending  $e_i$  to  $t_i$ . As  $G$  acts trivially on  $\overline{M}_x^{\text{gp}}$ , by the method of (VI-3.7) we get characters

$$\psi_i : G \rightarrow \mu$$

such that  $gh(e_i) = \psi_i(g)h(e_i)$ . As in the proof of [Kato, 1988, 3.5], consider the homomorphism

$$u : Z \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$$

defined by  $h$  on  $Z$  and the composition  $Q^{\text{gp}} \rightarrow M_y^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}}$  on the second factor. We have

$$gu(a) = \psi(g \otimes a)u(a)$$

for some homomorphism

$$\psi : G^{\text{ab}} \otimes (Z \oplus Q^{\text{gp}}) \rightarrow \mu$$

extending  $\chi$  and such that  $\psi(g \otimes e_i)u(e_i) = \psi_i(g)h(e_i)$ . As in *loc. cit.*, if  $\bar{u}$  denotes the composition

$$\bar{u} : Z \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_x^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}} (= M_x^{\text{gp}} / \mathcal{O}_x^*)$$

we see that  $k(x) \otimes \bar{u}$  is surjective, hence the cokernel  $C$  of  $\bar{u}$  is killed by an integer  $m$  invertible in  $k(x)$ . Using that  $\mathcal{O}_{X,x}^*$  is  $m$ -divisible, one can therefore choose elements  $a_i \in M_x^{\text{gp}}$  and  $b_i \in Z \oplus Q^{\text{gp}}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) such that the images of  $a_i$  generate  $\overline{M}_x^{\text{gp}}$  and  $a_i^m = u(b_i)$ . Let  $E$  be the free abelian group with basis  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), and let  $F$  be the abelian group defined by the push-out diagram

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{m} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \oplus Q^{\text{gp}} & \xrightarrow{w} & F \end{array},$$

where the left vertical arrow sends  $e_i$  to  $b_i$ . The lower horizontal map is injective and its cokernel is killed by  $m$ . The relation  $a_i^m = u(b_i)$  implies that  $u$  extends to a homomorphism

$$v : F \rightarrow M_x^{\text{gp}}$$

whose composition  $\bar{v} : F \rightarrow M_x^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_x^{\text{gp}}$  is surjective. Associated with  $v$  is a morphism

$$\varphi : G^{\text{ab}} \otimes F \rightarrow \mu$$

extending  $\psi$ , such that  $gv(a) = \varphi(g \otimes a)v(a)$  for  $a \in F$ . Let  $P := v^{-1}(M_x) \subset F$ . Then  $P$  is a fine monoid containing  $Q$ ,  $P^{\text{gp}} = F$ , and  $v$  sends  $P$  to  $M_x$ . By [Kato, 1988, 2.10], using the ( $G$ -equivariant) isomorphism  $\mathcal{H}om(\Lambda[P], M_x)_x \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\Lambda[P], M_{X,x})$ , up to shrinking  $X$  at  $x$ , the equivariant map

$$\Lambda[P] \rightarrow M_x$$

defined by  $(v, \varphi)$  extends to an equivariant chart

$$b : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$$

extending the chart  $a : Y \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$ . The homomorphism  $Q^{gp} \rightarrow P^{gp}$  is injective, and the torsion part of its cokernel, which is the same as the torsion part of the cokernel of  $w : Z \oplus Q^{gp} \rightarrow F$  in (3), is killed by  $m$ . Consider the resulting map

$$b' : X \rightarrow X' = Y \times_{\text{Spec } \Lambda[Q]} \text{Spec } \Lambda[P].$$

This map is strict. Showing that the underlying schematic map is smooth at  $x$  is equivalent to showing that  $b'$  is log smooth at  $x$ . To do this, as  $X$  and  $X'$  are log smooth over  $Y$ , by the jacobian criterion [Kato, 1988, 3.12] it suffices to show that the map

$$k(x) \otimes \Omega_{X'/Y}^1 \rightarrow k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$$

induced by  $b'$  is injective. We have

$$k(x) \otimes \Omega_{X'/Y}^1 = k(x) \otimes P^{gp}/Q^{gp} = k(x) \otimes Z$$

(the last equality by the fact that  $F/(Z \oplus Q^{gp})$  is killed by  $m$ ), and by construction (cf. (2)), we have

$$k(x) \otimes Z = k(x) \otimes \overline{M}_{X/Y,x}^{gp},$$

which by the map induced by  $b'$  injects into  $k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$ .

Let us now prove the second assertion. For this, as  $b'$  is strict, we may forget the log structures of  $X$  and  $X'$ , and by changing notations, we may assume that  $X' = Y$  and the log structures of  $X$  and  $Y$  are trivial. In particular, we have

$$k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1 = V_0,$$

with the notation of (2). As the question is étale local on  $X$ , and closed points are very dense in the fiber  $X_y$ , in particular, any point has a specialization at a closed point of  $X_y$ , we may assume that  $x$  is localized at a closed point of  $X_y$ , and even, up to base changing  $Y$  by a finite radicial extension, that  $x$  is a rational point of  $X_y$ . We then have

$$(4) \quad k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1 = \mathfrak{m}_x / (\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x),$$

where  $\mathfrak{m}$  denotes a maximal ideal. By [Serre, 1978, 12 2.3, 13 14.4] there is a finitely generated projective  $\Lambda[G]$ -module  $V$  such that  $V_0 = k(x) \otimes V$ . The homomorphism  $V \rightarrow \mathfrak{m}_x / (\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x)$  therefore lifts to a homomorphism of  $\Lambda[G]$ -modules

$$(5) \quad V \rightarrow \mathfrak{m}_x,$$

inducing an isomorphism  $k(x) \otimes V \rightarrow k(x) \otimes \Omega_{X/Y}^1$ . By the jacobian criterion, it follows that the ( $G$ -equivariant) map

$$X \rightarrow Y \times_{\text{Spec } \Lambda} \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V)$$

is étale at  $x$ .

Let us prove the last assertion. First of all, as  $M_x$  is fs,  $v : P \rightarrow M_x$  factors through the saturation  $P^{\text{sat}}$  of  $P$  in  $P^{gp}$ , so we may assume that  $P$  is fs. Then (cf. [Gabber & Ramero, 2009, 5.3.42]) we have a split exact sequence

$$0 \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

with  $P_0^*$  torsionfree and  $H$  a finite group. As  $Q$  is fs and sharp,  $Q^{gp}$  is torsionfree, so the composition  $Q^{gp} \rightarrow P^{gp} \rightarrow P_0^{gp}$  is still injective, as well as the composition



$H \rightarrow P^{gp} \rightarrow (P^{gp}/Q^{gp})$ , hence  $H$  is contained in the torsion part of  $(P^{gp}/Q^{gp})$ , and we have an exact sequence

$$0 \rightarrow H \rightarrow (P^{gp}/Q^{gp})_{tors} \rightarrow (P_0^{gp}/Q^{gp})_{tors} \rightarrow 0,$$

where the subscript *tors* denotes the torsion part. Thus  $(P_0^{gp}/Q^{gp})_{tors}$  is killed by an integer invertible on  $X$ . As  $\overline{M}_x$  is torsionfree, the composition  $P \rightarrow M_x \rightarrow \overline{M}_x$  factors through  $P_0$ , into a map  $v_0 : P \rightarrow \overline{M}_x$ . Consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_x & \longrightarrow & M_x^{gp} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_0 & \xrightarrow{v_0} & \overline{M}_x \longrightarrow \overline{M}_x^{gp} \end{array}$$

where the square is cartesian. As  $P_0^{gp}$  is torsionfree, the map  $P_0^{gp} \rightarrow \overline{M}_x^{gp}$  defined by the lower row admits a lifting  $s : P_0^{gp} \rightarrow M_x^{gp}$ , sending  $P_0$  to  $M_x$ . As  $v$  is a chart,  $P/v^{-1}(\mathcal{O}_x^*) \rightarrow \overline{M}_x$  is an isomorphism, and since  $H$  is contained in  $v^{-1}(\mathcal{O}_x^*)$ ,  $P_0/s^{-1}(\mathcal{O}_x^*) \rightarrow \overline{M}_x$  is an isomorphism as well, hence  $s$  is a chart at  $x$ . Associated with  $s$  is a homomorphism

$$\varphi_0 : G^{ab} \otimes P_0^{gp} \rightarrow \mu$$

and the map

$$b_0 : X \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P_0]$$

defined by the pair  $(s, \varphi_0)$  is an equivariant chart of  $X$  at  $x$  (extending  $a$ ). □

*Proof of 1.1 (beginning).*

The strategy is to check that, at each step of the proof of the absolute modification theorem (VIII-1.1), the log smoothness of  $X/S$  is preserved, and, at the end, that of the quotient  $(X/G)/S$  as well. For some of them, this is trivial, as the modifications performed are log blow ups. Others require a closer inspection.

**1.3. Preliminary reductions.** We may assume that conditions (1) and (2) at the beginning of (VIII-4) are satisfied, namely :

- (1)  $X$  is regular,
- (2)  $Z$  is a  $G$ -strict snc divisor in  $X$ .

Indeed, these conditions are achieved by  $G$ -equivariant saturated log blow up towers (VIII-4.1.1, VIII-4.1.6).

We will now exploit Gabber's preparation lemma 1.3 to give a local picture of  $f$  displaying both the log stratification and the inertia stratification of  $X$ . We work étale locally at a geometric point  $x$  in  $X$  with image  $s$  in  $S$ . Up to replacing  $G$  by the inertia group  $G_x$  at  $x$ , we may assume that  $G = G_x$ .

We now apply 1.3. Let  $N$  be the exponent of  $G$ . Assume  $S$  strictly local at  $s$ . We may replace  $\Lambda = \mathbf{Z}[1/N, \mu]$  by its localization at the (Zariski) image of  $s$ , so that  $\Lambda$  is either the cyclotomic field  $\mathbf{Q}(\mu)$  or its localization at a finite place of its ring of integers, of characteristic  $p = \text{char}(k(s))$  not dividing  $n$ . Choose a chart

$$a : S \rightarrow \text{Spec } \Lambda[Q]$$

with  $Q$  fs and the inverse image of  $\mathcal{O}_{s,s}^*$  in  $Q$  equal to  $\{1\}$ , so that  $Q$  is sharp and  $Q \xrightarrow{\sim} \overline{M}_s$ . Let  $C$  denote  $k(s)$  if  $\mathcal{O}_{s,s}$  contains a field, and a Cohen ring of  $k(s)$  otherwise. Let  $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$  be a family of elements of  $\mathbf{m}_s$  such that the images of the  $y_i$ 's in  $\mathcal{O}_{s,s}/I_s$  form a regular system of parameters, where  $I_s = I(s, M_s)$  is the

ideal generated by the image of  $M_s - \mathcal{O}_{S,s}^*$  by the canonical map  $\alpha : M_s \rightarrow \mathcal{O}_{S,s}$ . By [Kato, 1994, 3.2], the chart  $\alpha$  extends to an isomorphism

$$(1.a) \quad C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]]/(g) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{S,s},$$

where  $g \in C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]]$  is 0 if  $k(s)$  contains a field, and congruent to  $p = \text{char}(k(s)) > 0$  modulo the ideal generated by  $Q - \{1\}$  and  $(y_1, \dots, y_m)$  otherwise. By 1.3, up to shrinking  $X$  around  $x$ , we can find a  $G$ -equivariant commutative diagram (with trivial action of  $G$  on the bottom row)

$$(1.b) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & X' \xrightarrow{b} \text{Spec}(\Lambda[P] \otimes_{\Lambda} \text{Sym}_{\Lambda}(V)), \\ & \searrow & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ & & S \xrightarrow{a} \text{Spec} \Lambda[Q] \end{array}$$

where :

- (i) the square is cartesian ;
- (ii)  $a, b,$  and  $c$  are strict, where the log structure on  $\text{Spec} \Lambda[Q]$  (resp.  $\text{Spec}(\Lambda[P] \otimes_{\Lambda} \text{Sym}_{\Lambda}(V))$ ) is the canonical one, given by  $Q$  (resp.  $P$ ) ;  $P$  is an fs monoid, with  $P^*$  torsionfree ;  $G$  acts on  $\Lambda[P]$  by  $g(\lambda p) = \lambda \chi(g, p)p$ , for some homomorphism

$$\chi : G^{\text{ab}} \otimes P^{\text{gp}} \rightarrow \mu$$

- (iii)  $V$  is a free, finitely generated  $\Lambda$ -module, equipped with a  $G$ -action ;
- (iv) the right vertical arrow is the composition of the projection onto the factor  $\text{Spec} \Lambda[P]$  and  $\text{Spec} \Lambda[h]$ , for a homomorphism  $h : Q \rightarrow P$  such that  $h^{\text{gp}}$  is injective and the torsion part of  $\text{Coker} h^{\text{gp}}$  is annihilated by an integer invertible on  $X$  ;
- (v)  $c$  is étale.

(vi) Consider the map

$$v : P \rightarrow M_x$$

defined by the chart  $X \rightarrow \text{Spec} \Lambda[P]$  induced by  $bc$ . Up to localizing on  $X'$  around  $x$ , we may assume that  $v$  factors through the localization  $P_{(\mathfrak{p})}$  of  $P$  at the prime ideal  $\mathfrak{p}$  complementary of the face  $v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$ . Replacing  $P$  by  $P_{(\mathfrak{p})}$ ,  $P$  decomposes into

$$(1.c) \quad P = P^* \oplus P_1,$$

with  $P^* = v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$  free finitely generated over  $\mathbf{Z}$ , and  $P_1$  sharp, and the image of  $x$  by  $bc$  into the factor  $\text{Spec} \Lambda[P]$  is the rational point at the origin. Then  $v$  induces an isomorphism  $P_1 \xrightarrow{\sim} \overline{M}_x$ . By the assumptions (1), (2), we have  $\overline{M}_x \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}^r$ . One can therefore choose  $(e_i \in P_1)$  ( $1 \leq i \leq r$ ) forming a basis of  $P_1$ . Then  $v(e_i) = t_i \in M_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$  is a local equation for a branch  $Z_i$  of  $Z$  at  $x$ ,  $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$  is the set of branches of  $Z$  at  $x$ , and  $G$  acts on  $t_i$  through the character  $\chi_i = \chi|_{\mathbf{Z}e_i} : G \rightarrow \mu$ .

Furthermore :

- (vii) The square in (1.b) is tor-independent.

Indeed, by the log regularity of  $S$  and the choice of the chart  $a$ , we have, by [Kato, 1994, 6.1],  $\text{Tor}_i^{\mathbf{Z}[Q]}(\mathcal{O}_{S,s}, \mathbf{Z}[P]) = 0$  for  $i > 0$ .

Though this will not be needed, one can describe the local structure of (1.b) more precisely as follows. Let

$$(1.d) \quad Y := \text{Spec} (\wedge[P] \otimes_{\wedge} \text{Sym}_{\wedge}(V)) = \text{Spec} (\wedge[P^*] \otimes_{\wedge} \wedge[P_1] \otimes_{\wedge} \text{Sym}_{\wedge}(V))$$

and let  $Y' := \text{Spec} C[[y_1, \dots, y_m]][[Q]] \times_{\text{Spec} \wedge} Y$ , with the notation of 1.a. Replacing  $X'$  by its strict localization at  $x$  we may assume that  $X = X'$ . Then the completion of  $X$  at  $x$  is either isomorphic to the completion of  $Y'$  at  $x$ , or a regular divisor in it, defined by the equation  $g' = 0$ , where  $g'$  is the image of  $g$  in  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y',x}$ , with the notation of 1.a.

**1.4. Step 3 and log smoothness (beginning).** We will now analyze the modifications performed in the proof of Step 3 in VIII-4.1.9, VIII-4.2.13. The permissible towers used in *loc. cit.* are iterations of operations of the form : for a subgroup  $H$  of  $G$ , blow up the fixed point (regular) subscheme  $X^H$ , and replace  $Z$  by the union of its strict transform  $Z^{\text{st}}$  and the exceptional divisor  $E$ . Though such a blow up is not a log blow up in general, we will see that it still preserves the log smoothness of  $X$  over  $S$ .

We work étale locally around  $x$ , so we can assume  $X = X'$  in 1.b. We then have a cartesian square

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccc} X^H & \xrightarrow{b^H} & Y^H \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array},$$

with  $Y$  as in (1.d). We also have cartesian squares

$$(1.b) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{b} & T \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array},$$

where  $T \subset Y$  is the snc divisor  $\sum T_i$ ,  $T_i$  defined by the equation  $e_i \in P_1$  (1.c), and

$$(1.c) \quad \begin{array}{ccc} Z \times_X X^H & \longrightarrow & T \times_Y Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}.$$

**LEMMA 1.5.** The squares (1.a), (1.b), and (1.c) are tor-independent.

*Proof.* For (1.b), this is because  $Z$  (resp.  $T$ ) is a divisor with normal crossings in  $X$  (resp.  $Y$ ) (cf. [SGA 6 VII 1.2]). For (1.a), as the square (1.b) is tor-independent (by 1.3 (vii)), it is enough to show that the composite (cartesian) square

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccc} X^H & \longrightarrow & Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \text{Spec } \wedge[Q] \end{array}$$

is tor-independent. We have a decomposition

$$(1.b) \quad Y^H = (\text{Spec } \wedge[P^*])^H \times (\text{Spec } \wedge[P_1])^H \times (\text{Spec } \text{Sym}_{\wedge}(V))^H,$$

(products taken over  $\text{Spec } \Lambda$ ), and the map to  $\text{Spec } \Lambda[Q]$  is the composition of the projection onto  $(\text{Spec } \Lambda[P^*])^H \times (\text{Spec } \Lambda[P_1])^H$  and the canonical map induced by  $\text{Spec } \Lambda[Q] \rightarrow \text{Spec } \Lambda[P]$ , which factors through the fixed points of  $H, G$  acting trivially on the base. Let us examine the three factors.

(a) We have

$$(\text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V))^H = \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V_H),$$

where  $V_H$  is the module of coinvariants, a free module of finite type over  $\Lambda$ , as  $H$  is of order invertible in  $\Lambda$ . Therefore  $\text{Spec } \Lambda[Q] \times_{\text{Spec } \Lambda} (\text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V))^H$  is flat over  $\text{Spec } \Lambda[Q]$ , and it is enough to check that  $(\text{Spec } \Lambda[P^*])^H \times (\text{Spec } \Lambda[P_1])^H$  is tor-independent of  $S$  over  $\text{Spec } \Lambda[Q]$ .

(b) The restriction to  $P^* = v^{-1}(\mathcal{O}_{X,x}^*)$  of the 1-cocycle  $z(v) \in Z^1(H, \text{Hom}(P, k(x)^*))$  associated with  $v : P \rightarrow M_x$  ( $h v(a) = z(v)(h, a)v(a)$  for  $h \in H, a \in P$ , see the proof of 1.2 and (VI-3.7)) is a 1-coboundary, hence trivial, as  $B^1(H, \text{Hom}(P, k(x)^*)) = 0$ . Therefore

$$(\text{Spec } \Lambda[P^*])^H = \text{Spec } \Lambda[P^*].$$

(c) Recall that

$$P_1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{N}e_i,$$

with  $e_i$  sent by  $v$  to a local equation of the branch  $Z_i$  of  $Z$ , and that  $G$  acts on  $\Lambda[\mathbf{N}e_i]$  through the character  $\chi_i : G \rightarrow \mu$ . Let  $A \subset \{1, \dots, r\}$  be the set of indices  $i$  such that  $\chi_i|_H$  is trivial. Then

$$(\text{Spec } \Lambda[P_1])^H = \text{Spec } \Lambda[\bigoplus_{i \in A} \mathbf{N}e_i].$$

Let  $I$  be the ideal of  $P$  generated by  $\{e_i\}_{i \notin A}$ . It follows from (b) and (c) that

$$(\text{Spec } \Lambda[P])^H = \text{Spec } \Lambda[P]/(I),$$

where  $(I)$  is the ideal of  $\Lambda[P]$  generated by  $I$ . By [Kato, 1994, 6.1],  $\text{Tor}_i^{\Lambda[Q]}(\mathcal{O}_S, \Lambda[P]/(I)) = 0$  for  $i > 0$ , and therefore (1.a), hence (1.a) is tor-independent. It remains to show the tor-independence of (1.c). For this, again it is enough to show the tor-independence of

$$(1.c) \quad \begin{array}{ccc} Z \times_X X^H & \longrightarrow & T \times_Y Y^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[Q] \end{array} .$$

By (a), (b), (c), we have

$$T \times_Y Y^H = \sum_{i \in A} \text{Spec } \Lambda[P]/(J_i) \times \text{Spec } \text{Sym}_\Lambda(V_H),$$

where  $J_i \subset P$  is the ideal generated by  $e_i \in P_1$ , and  $(J_i)$  the ideal generated by  $J_i$  in  $\Lambda[P]$ . The desired tor-independence follows from the vanishing of  $\text{Tor}_i^{\Lambda[Q]}(\mathcal{O}_S, \Lambda[P]/(J_B))$ , where for a subset  $B$  of  $A$ ,  $J_B$  denotes the ideal generated by the  $e_i$ 's for  $i \in B$ .

LEMMA 1.6. Consider a cartesian square

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

where the right vertical arrow is a regular immersion. If (1.a) is tor-independent, then the left vertical arrow is a regular immersion, and

$$\mathrm{Bl}_{V'}(X') = X' \times_X \mathrm{Bl}_V(X).$$

Let  $W \rightarrow X$  be a second regular immersion, such that  $V \times_X W \rightarrow W$  is a regular immersion, and let  $W' = X' \times_X W$ . If moreover the squares

$$(1.b) \quad \begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V, \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

and

$$(1.c) \quad \begin{array}{ccc} V' \times_{X'} W' & \longrightarrow & V \times_X W, \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

are tor-independent, then the left vertical arrows are regular immersions, and

$$W'^{\mathrm{st}} = X' \times_X W^{\mathrm{st}},$$

where  $W^{\mathrm{st}}$  (resp.  $W'^{\mathrm{st}}$ ) is the strict transform of  $W$  (resp.  $W'$ ) in  $\mathrm{Bl}_V(X)$  (resp.  $\mathrm{Bl}_{V'}(X')$ ).

*Proof.* Let  $I$  (resp.  $I'$ ) be the ideal of  $V$  (resp.  $V'$ ) in  $X$  (resp.  $X'$ ). By the tor-independence of (1.a), if  $u : E \rightarrow I$  is a local surjective regular homomorphism [SGA 6 VII 1.4], the Koszul complex  $g^*K(u)$  is a resolution of  $\mathcal{O}_{V'}$ , hence  $V' \rightarrow X'$  is a regular immersion. Moreover, by [SGA 6 VII 1.2], for any  $n \geq 0$ , the natural map  $g^*I^n \rightarrow I^n$  is an isomorphism, and therefore  $\mathrm{Bl}_{V'}(X') = X' \times_X \mathrm{Bl}_V(X)$ . The tor-independence of (1.b) and (1.c) imply that of

$$\begin{array}{ccc} V' \times_{X'} W' & \longrightarrow & V \times_X W. \\ \downarrow & & \downarrow \\ W' & \longrightarrow & W \end{array}$$

The second assertion then follows from the first one and the formulas (VIII-2.1.3 (ii))

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{st}} &= \mathrm{Bl}_{V \times_X W} W, \\ W'^{\mathrm{st}} &= \mathrm{Bl}_{V' \times_{X'} W'} W'. \end{aligned}$$

**1.7. Step 3 and log smoothness (end).** As recalled at the beginning of 1.4, we have to show that, if  $H$  is a subgroup of  $G$ , then the log regular pair  $(X_1, Z_1)$  is log smooth over  $S$ , where  $X_1 := \mathrm{Bl}_{X^H}(X)$  and  $Z_1$  is the snc divisor  $Z^{\mathrm{st}} \cup E$ ,  $Z^{\mathrm{st}}$  (resp.  $E$ ) denoting the strict transform of  $Z$  (resp. the exceptional divisor) in the blow-up  $h : X_1 \rightarrow X$ .

The question is again étale local above  $X$  around  $x$ , so we may assume that  $X = X'$  and we look at the cartesian square (1.b)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y, \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Spec} \Lambda[Q] \end{array}$$

with  $Y$  as in (1.d), and the associated cartesian squares (1.a), (1.b), and (1.c).

*Claim.* We have

$$(1.a) \quad \mathrm{Bl}_{X^H}(X) = X \times_Y \mathrm{Bl}_{Y^H}(Y),$$

$$(1.b) \quad Z^{\mathrm{st}} = X \times_Y T^{\mathrm{st}}.$$

*Proof.* In view of 1.5 and 1.6, (1.a) follows from the fact that the immersion  $Y^H \rightarrow Y$  is regular. For (1.b) recall that

$$T = T_0 \times_{\mathrm{Spec} \Lambda} \mathrm{Spec} \mathrm{Sym}_\Lambda(V),$$

where  $T_0 \subset \mathrm{Spec} \Lambda[P]$  is the snc divisor

$$T_0 = \sum_{1 \leq i \leq r} \mathrm{div}(z_i)$$

with  $z_i \in \Lambda[P]$  the image of  $e_i \in P_1$  as in 1.c. Hence

$$(1.c) \quad T = \sum_{1 \leq i \leq r} T_i,$$

where  $T_i = \mathrm{div}(z_i) \times_{\mathrm{Spec} \Lambda} \mathrm{Spec} \mathrm{Sym}_\Lambda(V)$ , and  $T^{\mathrm{st}} = \sum_{1 \leq i \leq r} T_i^{\mathrm{st}}$ . We have (1.b)

$$Y^H = (\mathrm{Spec} \Lambda[P])^H \times \mathrm{Spec} \mathrm{Sym}_\Lambda(V_H),$$

with  $(\mathrm{Spec} \Lambda[P])^H$  defined by the equations  $(z_i = 0)_{i \notin \Lambda}$ , with the notations of 1.5 (c). In particular, the immersion  $Y^H \times_Y Z_i \rightarrow Z_i$  is regular, hence, by 1.6, we have  $Z_i^{\mathrm{st}} = X \times_Y T_i^{\mathrm{st}}$ , hence (1.b), which finishes the proof of the claim.

Since the map  $S \rightarrow \mathrm{Spec} \Lambda[Q]$  is strict, in order to prove the desired log smoothness, we may, by this claim, replace the triple  $(X, X^H, Z)$  over  $S$  by  $(Y, Y^H, T)$  over  $\mathrm{Spec} \Lambda[Q]$ . We choose coordinates on  $P^*$ ,  $P_1 = \mathbf{N}^r$ ,  $V$ :

$$P^* = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} \mathbf{Z}f_i, \quad P_1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{N}e_i, \quad V = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \Lambda y_i$$

$$\Lambda[P] = \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r], \quad \mathrm{Sym}_\Lambda(V) = \Lambda[y_1, \dots, y_s],$$

with  $u_i$  (resp.  $z_i$ ) the image of  $f_i$  (resp.  $e_i$ ) in  $\Lambda[P]$ , in such a way that

$$\Lambda[P]^H = \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_{m+1}, \dots, z_r],$$

i. e. is defined in  $\Lambda[P]$  by the equations  $(z_1 = \dots = z_m = 0, \text{ for some } m, 1 \leq m \leq r,$   
and

$$\Lambda[V_H] = \Lambda[y_{n+1}, \dots, y_s],$$

i. e. is defined in  $\Lambda[V]$  by the equations  $y_1 = \dots = y_n = 0$  for some  $n, 1 \leq n \leq s$ .  
Then

$$Y^H \subset Y = \mathrm{Spec} \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s]$$

is defined by the equations

$$z_1 = \dots = z_m = y_1 = \dots = y_n = 0.$$

Then

$$Y' := \mathrm{Bl}_{Y^H}(Y)$$

is covered by affine open pieces :

$$U_i = \mathrm{Spec} \Lambda[(u_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq t}, z'_1, \dots, z'_{i-1}, z_i, z'_{i+1}, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r, y'_1, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

( $1 \leq i \leq m$ ), with  $U_i \rightarrow Y$  given by  $z_j \rightarrow z_i z'_j$  for  $1 \leq j \leq m, j \neq i, y_j \rightarrow z_i y'_j,$   
 $1 \leq j \leq n$ , and the other coordinates unchanged, and

$$V_i = \mathrm{Spec} \Lambda[(u_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq t}, z'_1, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r, y'_1, \dots, y'_{i-1}, y_i, y'_{i+1}, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

( $1 \leq i \leq n$ ), with  $V_i \rightarrow Y$  given by  $z_j \mapsto y_i z'_j$  for  $1 \leq j \leq m$ ,  $y_j \mapsto y_i y'_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ , and the other coordinates unchanged. Recall that  $Y$  has the log structure defined by the log regular pair  $(Y, T)$ , where  $T$  is the snc divisor

$$T = (z_1 \cdots z_r = 0),$$

and  $Y'$  is given the log structure defined by the log regular pair  $(Y', T')$ , where  $T'$  is the snc divisor

$$T' = F \cup T^{\text{st}},$$

where  $F$  is the exceptional divisor of the blow up of  $Y^H$  and  $T^{\text{st}}$  the strict transform of  $T$ . Consider the canonical morphisms

$$Y' \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{g} \Sigma := \text{Spec } \Lambda[Q].$$

They are both morphisms of log schemes. The morphism  $g$  is given by the homomorphism of monoids  $\gamma : Q \rightarrow P$ , i. e.

$$q \in Q \mapsto (\gamma_1(q), \dots, \gamma_t(q), \gamma_{t+1}(q), \dots, \gamma_{t+r}(q), 0, \dots, 0) \in \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s].$$

The blow up  $b$  has been described above in the various charts. Note that  $b$  is not log étale, or even log smooth, in general. However, the composition  $gb : Y' \rightarrow \Sigma$  is log smooth. We'll check this on the charts  $(U_i), (V_i)$ .

(a) *Chart of type  $U_i$ .* We have  $F = (z_i = 0)$ ,  $T^{\text{st}} = (\prod_{1 \leq j \leq r, j \neq i} z'_j = 0)$ . Hence the log structure of  $U_i$  is given by the canonical log structure of  $\Lambda[\mathbf{N}^r]$  in the decomposition

$$U_i = \text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^r] \times \text{Spec } \Lambda[y'_1, \dots, y'_n, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

with the basis element  $e_k$  of  $\mathbf{N}^r$  sent to the  $k$ -th place in  $(z'_1, \dots, z'_{i-1}, z_i, z'_{i+1}, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r)$  (and the basis element  $f_k$  of  $\mathbf{Z}^t$  sent to  $u_k$ ), the third factor having the trivial log structure. Checking the log smoothness of  $gb : U_i \rightarrow \Sigma$  amounts to checking the log smoothness of its factor  $\text{Spec } \Lambda[P] \rightarrow \Sigma = \text{Spec } \Lambda(Q)$ , which is defined by the composition of homomorphisms of monoids

$$Q \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\text{Id} \oplus \beta} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r,$$

where  $\beta$  is the homomorphism  $\mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}^r$  sending  $e_j$  to  $e_j + e_i$  for  $1 \leq j \leq m, j \neq i$ ,  $e_i$  to  $e_i$ , and  $e_j$  to  $e_j$  for  $m+1 \leq j \leq r$ . Recall ((1.b), (iv)) that  $\gamma^{\text{gp}}$  is injective and the torsion part of its cokernel is invertible in  $\Lambda$ . As  $\beta^{\text{gp}}$  is an isomorphism, the same holds for the composition  $(\text{Id} \oplus \beta)\gamma$ , hence  $gb : U_i \rightarrow \Sigma$  is log smooth.

(b) *Chart of type  $V_i$ .* We have  $F = (y_i = 0)$ ,  $T^{\text{st}} = \prod_{1 \leq j \leq m} z'_j \prod_{j \geq m+1} z_j$ . Hence the log structure of  $V_i$  is given by the canonical log structure of  $\Lambda[\mathbf{N}^{r+1}]$  in the decomposition

$$V_i = \text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^{r+1}] \times \text{Spec } \Lambda[(y'_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}, y_{n+1}, \dots, y_s]$$

with the basis element  $e_k$  of  $\mathbf{N}^{r+1}$  sent to the  $k$ -th place in  $(z'_1, \dots, z'_m, z_{m+1}, \dots, z_r)$  if  $k \leq r$ , and  $e_{r+1}$  sent to  $y_i$  (and the basis element  $f_k$  of  $\mathbf{Z}^t$  sent to  $u_i$ ), the third factor having the trivial log structure. Again, Checking the log smoothness of  $gb : V_i \rightarrow \Sigma$  amounts to checking the log smoothness of its factor  $\text{Spec } \Lambda[\mathbf{Z}^t] \times \text{Spec } \Lambda[\mathbf{N}^{r+1}] \rightarrow \text{Spec } \Lambda(Q)$ . This factor is defined by the composition of homomorphisms of monoids

$$Q \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^r \xrightarrow{\text{Id} \oplus \beta} \mathbf{Z}^t \oplus \mathbf{N}^{r+1}$$

where  $\beta : \mathbf{N}^r \rightarrow \mathbf{N}^{r+1}$  sends  $e_j$  to  $e_j + e_{r+1}$  for  $1 \leq j \leq m$ , and to  $e_j$  for  $m+1 \leq j \leq r$ . Then  $\beta^{gp}$  is injective, and its cokernel is isomorphic to  $\mathbf{Z}$ , hence  $(\beta\gamma)^{gp}$  is injective, and we have an exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Coker } \gamma^{gp} \rightarrow \text{Coker } (\beta\gamma)^{gp} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

In particular, the torsion part of  $\text{Coker}(\beta\gamma)^{gp}$  is isomorphic to that of  $\text{Coker } \gamma^{gp}$ , hence of order invertible in  $\Lambda$ , which implies that  $gb : V_i \rightarrow \Sigma$  is log smooth.

This finishes the proof that Step 3 preserves log smoothness.

**1.8. End of proof of 1.1.** We may now assume that in addition to conditions (1) and (2) of **1.3**, condition (3) is satisfied as well, namely

(3)  $G$  acts freely on  $X - Z$  (i. e.  $Z = Z \cup T$  in the notation of **1.1** or **(VIII-1.1)**), and, for any geometric point  $x \rightarrow X$ , the inertia group  $G_x$  is abelian.

We have to check :

*Claim.* If  $f_{(G,X,Z)} : (X', Z') \rightarrow (X, Z)$  is the modification of **(VIII-5.4.4)**, then  $(X', Z')$  and  $(X'/G, Z'/G)$  are log smooth over  $S$ .

Working étale locally around a geometric point  $x$  of  $X$ , we will first choose a strict rigidification  $(X, \bar{Z})$  of  $(X, Z)$  such that  $(X, \bar{Z})$  is log smooth over  $S$ . We will define  $(X, \bar{Z})$  as the pull-back by  $S \rightarrow \Sigma = \text{Spec } \Lambda[Q]$  of a rigidification  $(Y, \bar{T})$  of  $(Y, T)$  which is log smooth over  $\Sigma$ , with the notation of **(1.d)**. Using that  $G (= G_x)$  is abelian, one can decompose  $V$  into a sum of  $G$ -stable lines, according to the characters of  $G$  :

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \Lambda y_i$$

with  $G$  acting on  $\Lambda y_i$  through a character  $\chi_i : G \rightarrow \mu_N$ , i. e.  $gy_i = \chi_i(g)y_i$ . We define  $\bar{T}$  to be the divisor  $z_1 \cdots z_r y_1 \cdots y_s = 0$  in  $Y = \text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}, z_1, \dots, z_r, y_1, \dots, y_s]$ . The action of  $G$  on  $(Y, \bar{T})$  is very tame at  $x$  because the log stratum at  $x$  is  $\text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_t^{\pm 1}]$ , hence very tame in a neighborhood of  $x$  by **(VIII-5.3.2)** (actually on the whole of  $Y$ , cf. **(VIII-4.5, VIII-4.6(a))**). On the other hand,  $(\text{Spec } \Lambda[y_1, \dots, y_s], y_1 \cdots y_s = 0)$  is log smooth over  $\text{Spec } \Lambda$ , and as  $\text{Spec } \Lambda[P]$  is log smooth over  $\Sigma$ ,  $(Y, \bar{T})$  is log smooth over  $\Sigma$ . Since  $f_{(G,X,Z)}$  is compatible with base change by strict inert morphisms, it is enough to check that if  $f_{(G,Y,T)} = f_{(G,Y,\bar{T})} : (Y', T') \rightarrow (Y, T)$  is the modification of **(VIII-5.4.4)** then  $(Y', T')$  is log smooth over  $\Sigma$ . Recall **(VIII-5.3.8)** that we have a cartesian  $G$ -equivariant diagram

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccc} (Y', \bar{T}') & \xrightarrow{\bar{h}'} & (Y, \bar{T}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ (Y'_1, \bar{T}'_1) & \xrightarrow{\bar{h}_1} & (Y_1, \bar{T}_1) \end{array}$$

where the horizontal maps are the compositions of saturated log blow up towers, and the vertical ones Kummer étale  $G$ -covers. From **(1.a)** is extracted the relevant diagram involving  $h := f_{(G,Y,\bar{T})}$ ,

$$\begin{array}{ccc} (Y', T') & \xrightarrow{h} & (Y, T) \\ \downarrow \beta & & \\ (Y'_1, T'_1) & & \end{array}$$



where  $T'_1 = \bar{h}_1^{-1}(T_1)$ , with  $T_1 = T/G$ ,  $T' = \alpha'^{-1}(T'_1)$ , and  $h$  (resp.  $\beta$ ) is the restriction of  $\bar{h}'$  (resp.  $\alpha'$ ) over  $(Y, T)$  (resp.  $(Y'_1, T'_1)$ ). In particular,  $\beta$  is a Kummer étale  $G$ -cover (as Kummer étale  $G$ -covers are stable under any fs base change). As  $G$  acts trivially on  $S$ , this diagram can be uniquely completed into a commutative diagram

$$(1.b) \quad \begin{array}{ccc} (Y', T') & \xrightarrow{h} & (Y, T) \\ \downarrow \beta & & \downarrow f \\ (Y'_1, T'_1) & \xrightarrow{g} & \Sigma \end{array}$$

Here  $f$  is log smooth and  $\beta$  is a Kummer étale  $G$ -cover. Though  $\bar{h}'$  and  $\bar{h}_1$  are log smooth,  $h$  and  $h_1$  are not, in general. However, it turns out that :

(\*)  $g : (Y'_1, T'_1) \rightarrow \Sigma$ , hence  $g\beta = fh : (Y', T') \rightarrow \Sigma$ , are log smooth,

which will finish the proof of the claim, hence of **1.1**. We first prove

(\*\*) With the notation of (1.b),  $(Y_1, \bar{T}_1)$  is log smooth over  $\Sigma$ .

Let us write  $Y = \text{Spec } \Lambda[\bar{P}]$ , with

$$(1.c) \quad \bar{P} = P \times N^s = Z^t \times N^r \times N^s.$$

As  $G$  acts very tamely on  $(Y, \bar{T})$ , the quotient pair  $(Y_1 = Y/G, \bar{T}_1 = \bar{T}/G)$  is log regular. More precisely, by the calculation in (VI-3.5(b)), this pair consists of the log scheme  $Y_1 = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}]$  with its canonical log structure, where

$$\bar{R} = \text{Ker}(\bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)) \cap \bar{P},$$

$\bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)$  being the homomorphism defined by the pairing  $\chi : G \otimes \bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow \mu_N$ . The inclusion  $\bar{R} \subset \bar{P}$  is a Kummer morphism, and  $\bar{P}^{\text{gp}}/\bar{R}^{\text{gp}}$  is annihilated by an integer invertible in  $\Lambda$ . As  $Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$  is injective, with the torsion part of its cokernel annihilated by an integer invertible in  $\Lambda$ , the same is true of  $Q^{\text{gp}} \rightarrow \bar{P}^{\text{gp}}$ , hence of  $Q^{\text{gp}} \rightarrow \bar{R}^{\text{gp}}$ . Thus  $(Y_1, \bar{T}_1) = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}]$  is log smooth over  $\Sigma$ .

Finally, let us prove (\*). It is enough to work locally on  $Y'_1$  so we can replace the log blow up sequence  $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1)$  with an affine chart (i.e. we replace the first log blow up with a chart, then do the same for the second one, etc.). Then  $Y'_1 = \text{Spec } \Lambda[\bar{R}']$ , and  $\bar{R}'^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} \bar{R}^{\text{gp}}$  by VIII-3.1.19. Note that  $\bar{R}' \xrightarrow{\sim} Z^a \times N^b$  where  $D_1, \dots, D_b$  are the components of  $\bar{T}'_1$ . We can assume that  $D_1, \dots, D_c \subseteq T'_1$  and  $D_{c+1}, \dots, D_b$  are not contained in  $T'_1$ . Let  $R' \xrightarrow{\sim} Z^a \times N^c$  denote the submonoid  $\bar{R}'$  that defines the log structure of  $(Y'_1, T'_1)$ . Note that  $R'$  consists of all elements  $g' \in \bar{R}'$  such that  $(g' = 0) \subseteq T'_1$  (as a set). Also, by  $\nu : \bar{R} \rightarrow \bar{R}'$  we will denote the homomorphism that defines  $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1)$ .

We showed in VIII-5.3.8 that  $T_1 = T/G$  is a  $\mathbf{Q}$ -Cartier divisor in  $Y_1$  and observed that therefore  $T'_1$  is a Cartier divisor in  $Y'_1$ . Note that the inclusion  $R \subset \bar{R}$ , where

$$R = \text{Ker}(P^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(G, \mu_N)) \cap \bar{P}$$

defines a log structure on  $Y_1$ . Denote the corresponding log scheme  $(Y_1, T_1)$ . We obtain the following diagram of log schemes (on the left). The corresponding diagram of groups is placed on the right; we will use it to establish log smoothness

of  $g$ . Existence of dashed arrows requires an argument; we will construct them later.

$$(1.d) \quad \begin{array}{ccc} (Y'_1, \bar{T}'_1) & \xrightarrow{\bar{h}_1} & (Y_1, \bar{T}_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y'_1, T'_1) & \dashrightarrow & (Y_1, T_1) \longrightarrow \Sigma \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{R}'^{gp} & \xleftarrow[\sim]{\nu^{gp}} & \bar{R}^{gp} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R'^{gp} & \dashleftarrow & R^{gp} \longleftarrow Q^{gp} \end{array}$$

Part (ii) of the following remark clarifies the notation  $(Y_1, T_1)$ . It will not be used so we only sketch the argument.

**REMARK 1.9.** (i) Note that  $(Y_1, T_1)$  may be not log smooth over  $\Sigma$ . For example, even when  $\Sigma$  is log regular, e.g.  $\text{Spec } k$  with trivial log structure,  $(Y_1, T_1)$  does not have to be log regular, as  $T_1$  may even be non-Cartier. Nevertheless, as  $\bar{h}_1$  is log smooth (even log étale),  $(Y'_1, \bar{T}'_1)$  is log smooth over  $\Sigma$ . Moreover,  $Y'_1$  is regular, and  $\bar{T}'_1$  an snc divisor in it.

(ii) Although  $T_1$  may be bad, one does have that  $R\mathcal{O}_{Y_1}^\times = \mathcal{O}_{Y_1} \cap i_*\mathcal{O}_{Y_1 \setminus T_1}^\times$  for the embedding  $i : Y_1 \setminus T_1 \hookrightarrow Y_1$ . This can be deduced from the formulas for  $R$  and  $\bar{R}$  and the fact that  $\bar{R}\mathcal{O}_{Y_1}^\times = \mathcal{O}_{Y_1} \cap j_*\mathcal{O}_{Y_1 \setminus \bar{T}_1}^\times$  by log regularity of  $(Y_1, \bar{T}_1)$ .

Note that  $Q \rightarrow \bar{P}$  factors through  $P$ , hence  $Q \rightarrow \bar{R}$  factors through  $R = \bar{R} \cap P$ . It follows from (1.c) that  $P$  consists of all elements  $f \in \bar{P}$  whose divisor  $(f = 0)$  is contained in  $T$  (as a set). Therefore  $g \in \bar{R}$  lies in  $R$  if and only if  $(g = 0) \subseteq T_1$  (as a set). This fact and the analogous description of  $R'$  observed earlier imply that  $\nu : \bar{R} \rightarrow \bar{R}'$  takes  $R$  to  $R'$ . Thus, we have established the dashed arrows in (1.d).

Let  $\varphi : Q \rightarrow \bar{R}'$  be the homomorphism defining the composition  $(Y'_1, \bar{T}'_1) \rightarrow (Y_1, \bar{T}_1) \rightarrow \Sigma$ . Since the latter is log smooth,  $\varphi$  is injective, and the torsion part of  $\text{Coker}(\varphi^{gp})$  is annihilated by an integer  $m$  invertible in  $\Lambda$ . Note that  $R^{gp} \hookrightarrow R'^{gp} \hookrightarrow \bar{R}'^{gp}$ , and therefore we also have that  $Q^{gp} \hookrightarrow R'^{gp}$  and the torsion of its cokernel is annihilated by  $m$ . Therefore,  $(Y'_1, T'_1)$  is log smooth over  $\Sigma$ , which finishes the proof of (\*), hence of **1.1**.

**REMARK 1.10.** In the proof of (\*) above, we first proved that  $g$  is log smooth, and deduced that  $g\beta$  is, too. In fact, as  $\beta$  is a Kummer étale  $G$ -cover, the log smoothness of  $g\beta$  implies that of  $g$ . More generally, we have the following descent result, due to Kato-Nakayama ([Nakayama, 2009, 3.4]) :

**THEOREM 1.11.** Let  $X' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$  be morphisms of fs log schemes. If  $g$  is surjective, log étale and exact, and  $fg$  is log smooth, then  $f$  is log smooth.

The assumption on  $g$  is equivalent to saying that  $g$  is a Kummer étale cover (cf. [Illusie, 2002, 1.6]).

### 2. Prime to $\ell$ variants of de Jong's alteration theorems

Let  $X$  be a noetherian scheme, and  $\ell$  be a prime number. A morphism  $h : X' \rightarrow X$  is called an  $\ell'$ -alteration if  $h$  is proper, surjective, generically finite, maximally dominating (i.e., (II-1.1.2) sends each maximal point to a maximal point) and the degrees of the residual extensions  $k(x')/k(x)$  over each maximal point  $x$  of  $X$  are prime to  $\ell$ . The next theorem was stated in (Introduction 0.3 (1)) :

**THEOREM 2.1** (Gabber). Let  $k$  be a field,  $\ell$  a prime number different from the characteristic of  $k$ ,  $X$  a separated and finite type  $k$ -scheme,  $Z \subset X$  a nowhere dense closed subset. Then there exists a finite extension  $k'$  of  $k$ , of degree prime to  $\ell$ , and a projective  $\ell'$ -alteration  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  above  $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$ , with  $\tilde{X}$  smooth and quasi-projective over  $k'$ , and  $h^{-1}(Z)$  is the support of a relative, strict normal crossings divisor.

Recall that a relative, strict normal crossings divisor in a smooth scheme  $T/S$  is a divisor  $D = \sum_{i \in I} D_i$ , where  $I$  is finite,  $D_i \subset T$  is an  $S$ -smooth closed subscheme of codimension 1, and for every subset  $J$  of  $I$  the scheme-theoretic intersection  $\cap_{i \in J} D_i$  is smooth over  $S$ .

We will need the following variant, due to Gabber-Vidal (proof of [Vidal, 2004b, 4.4.1]), of de Jong's alteration theorems [de Jong, 1997, 5.7, 5.9, 5.11], cf. [Zheng, 2009, 3.8]:

**LEMMA 2.2.** Let  $X$  be a proper scheme over  $S = \text{Spec } k$ , normal and geometrically reduced and irreducible,  $Z \subset X$  a nowhere dense closed subset. We assume that a finite group  $H$  acts on  $X \rightarrow S$ , faithfully on  $X$ , and that  $Z$  is  $H$ -stable. Then there exists a finite extension  $k_1$  of  $k$ , a finite group  $H_1$ , a surjective homomorphism  $H_1 \rightarrow H$ , and an  $H_1$ -equivariant diagram with a cartesian square (where  $S = \text{Spec } k$ ,  $S_1 = \text{Spec } k_1$ )

$$(2.a) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ S & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying the following properties :

- (i)  $S_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow S$  is a radicial extension ;
- (ii)  $X_2$  is projective and smooth over  $S_1$  ;
- (iii)  $a : X_2 \rightarrow X_1$  is projective and surjective, maximally dominating and generically finite and flat, and there exists an  $H_1$ -admissible dense open subset  $W \subset X_2$  over a dense open subset  $U$  of  $X$ , such that if  $U_1 = S_1 \times_S U$  and  $K = \text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(U_1))$ ,  $W \rightarrow W/K$  is a Galois étale cover of group  $K$  and the morphism  $W/K \rightarrow U_1$  induced by  $a$  is a universal homeomorphism ;
- (iv)  $(ba)^{-1}(Z)$  is the support of a strict normal crossings divisor in  $X_2$ .

*Proof.* We may assume  $X$  of dimension  $d \geq 1$ . We apply [Vidal, 2004b, 4.4.3] to  $X/S$ ,  $Z$ , and  $G = H$ . We get the data of (*loc. cit.*), namely an equivariant finite extension of fields  $(S_1, H_1) \rightarrow (S, H)$  such that  $S_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow S$  is radicial, an  $H_1$ -equivariant pluri-nodal fibration  $(Y_d \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow S_1, \{\sigma_{ij}\}, Z_0 = \emptyset)$ , and an  $H_1$ -equivariant alteration  $\alpha_1 : Y_d \rightarrow X$  over  $S$ , satisfying the conditions (i), (ii), (iii) of (*loc. cit.*) (in particular  $\alpha_1^{-1}(Z) \subset Z_d$ ). Then, as in the proof of [Vidal, 2004b, 4.4.1], successively applying [Vidal, 2004b, 4.4.4] to each nodal curve  $f_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ , one can replace  $Y_i$  by an  $H_1$ -equivariant projective modification  $Y'_i$  of it such that  $Y'_i$  is regular, and the inverse image  $Z'_i$  of  $Z_i := \cup_j \sigma_{ij}(Y_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$  in  $Y'_i$  is an  $H_1$ -equivariant strict snc divisor. Then,  $X_2 := Y'_d$  is smooth over  $S_1$  and  $Z'_d$  is a relative snc divisor over  $S_1$ . This follows from the analog of the remark following [Vidal, 2004b, 4.4.4] with "semistable pair over a trait" replaced by "pair consisting of a smooth scheme and a relative snc divisor over a field". In particular,  $(ba)^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is a subdivisor of  $Z'_d$ , hence an snc divisor. After replacing  $H_1$

by  $H_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(X_2))$  the open subsets  $U$  and  $V$  of (iii) are obtained as at the end of the proof of [Vidal, 2004b, 4.4.1].

**2.3. Proof of 2.1.** There are three steps.

*Step 1. Preliminary reductions.* By Nagata's compactification theorem [Conrad, 2007], there exists a dense open immersion  $X \subset \bar{X}$  with  $\bar{X}$  proper over  $S$ . Up to replacing  $X$  by  $\bar{X}$  and  $Z$  by its closure  $\bar{Z}$ , we may assume  $X$  proper over  $S$ . By replacing  $X$  by the disjoint sum of its irreducible components, we may further assume  $X$  irreducible, and geometrically reduced (up to base changing by a finite radicial extension of  $k$ ). Up to blowing up  $Z$  in  $X$  we may further assume that  $Z$  is a (Cartier) divisor in  $X$ . Finally, replacing  $X$  by its normalization  $X'$ , which is finite over  $X$ , and  $Z$  by its inverse image in  $X'$ , we may assume  $X$  normal.

*Step 2. Use of 2.2.* Choose a finite Galois extension  $k_0$  of  $k$  such that the irreducible components of  $X_0 = X \times_S S_0$  ( $S_0 = \text{Spec } k_0$ ) are geometrically irreducible. Let  $G = \text{Gal}(k_0/k)$  and  $H \subset G$  the decomposition subgroup of a component  $Y_0$  of  $X_0$ . We apply 2.2 to  $(Y_0/S_0, Z_0 \cap Y_0)$ , where  $Z_0 = S_0 \times_S Z$ . We find a surjection  $H_1 \rightarrow H$  and an  $H_1$ -equivariant diagram of type 2.a :

$$(2.a) \quad \begin{array}{ccccc} Y_0 & \xleftarrow{b'} & Y_1 & \xleftarrow{a'} & Y_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying conditions (i), (ii), (iii), (iv) with  $S$  replaced by  $S_0$ , and  $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$  by  $Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0$ . As  $G$  transitively permutes the components of  $X_0$ ,  $X_0$  is, as a  $G$ -scheme over  $S_0$ , the contracted product

$$X_0 = Y_0 \times^H G,$$

i. e. the quotient of  $Y_0 \times G$  by  $H$  acting on  $Y_0$  on the right and on  $G$  on the left (cf. proof of VIII-5.3.7), and similarly  $Z = Z_0 \times^H G$ . Choose an extension of the diagram  $H_1 \xrightarrow{u} H \xrightarrow{i} G$  into a commutative diagram of finite groups

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ H & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

with  $i_1$  injective and  $v$  surjective (for example, take  $i_1$  to be the graph of  $iu$  and  $v$  the projection). Define

$$X_1 := Y_1 \times^{H_1} G_1, \quad X_2 := Y_2 \times^{H_1} G_1.$$

Then (2.a) extends to a  $G_1$ -equivariant diagram of type 2.a

$$(2.b) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{\quad} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying again (i), (ii), (iii), (iv). In particular, the composition  $h : X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X$  is an alteration above the composition  $S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S$ ,  $X_2$  is projective and

smooth over  $S_1$ , and  $h^{-1}(Z)$  is the support of an snc divisor. However, as regard to **2.1**, the diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{h} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{} & S_1 \end{array}$$

deduced from (2.b) has two defects :

- (a) the extension  $S_1 \rightarrow S$  is not necessarily of degree prime to  $\ell$ ,
- (b) the alteration  $h$  is not necessarily an  $\ell'$ -alteration.

We will first repair (a) and (b) at the cost of temporarily losing the smoothness of  $X_2/S_1$  and the snc property of  $h^{-1}(Z)$ . By (i),  $S_1/\text{Ker}(G_1 \rightarrow G) \rightarrow S_0$  is a radicial extension, hence  $S_1/G_1 \rightarrow S = S_0/G$  is a radicial extension, too. Similarly, by (iii),  $X_2/G_1 \rightarrow X$  is an alteration over  $S_1/G_1 \rightarrow S$ , which is a universal homeomorphism over a dense open subset. Now let  $L$  be an  $\ell$ -Sylow subgroup of  $G_1$ . Then  $S_1/L \rightarrow S_1/G_1$  is of degree prime to  $\ell$ , and  $X_2/L \rightarrow X_2/G_1$  is a finite surjective morphism of generic degree prime to  $\ell$ . Let  $S' := \text{Spec } k' = S_1/L$ ,  $X' = S' \times_S X$ . We get a commutative diagram with cartesian square

(2.c)

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X_2/L & \longleftarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & \\ S & \longleftarrow & S' & \longleftarrow & S_1 & & \end{array}$$

where  $S' \rightarrow S$  is an extension of degree prime to  $\ell$ ,  $S_1 \rightarrow S'$  a Galois extension of group  $L$ ,

$$h_2 : X_2/L \rightarrow X$$

an  $\ell'$ -alteration,  $X_2/S_1$  is projective and smooth, and if now  $h$  denotes the composition  $X_2 \rightarrow X$ ,  $Z_1 := h^{-1}(Z)$  is an snc divisor in  $X_2$ . If  $X_2/L$  was smooth over  $S'$  and  $Z_1/L$  an snc divisor in  $X_2/L$ , we would be finished. However, this is not the case in general. We will use Gabber's theorem **1.1** to fix this.

*Step 3. Use of 1.1.* Let  $Y$  be a connected component of  $X_2$ ,  $(Z_1)_Y = h^{-1}(Z) \cap Y$ ,  $D$  the stabilizer of  $Y$  in  $L$ ,  $I \subset D$  the inertia group at the generic point of  $Y$ . Then  $D$  acts on  $Y$  through  $K := D/I$ , and this action is generically free. As  $Y$  is smooth over  $S_1$  and  $(Z_1)_Y$  is an snc divisor in  $Y$ ,  $(Y, (Z_1)_Y)$  makes a log regular pair, log smooth over  $S_1$ , hence over  $S' = S_1/L$  (equipped with the trivial log structure). We have a  $K$ -equivariant commutative diagram

(2.d)

$$\begin{array}{ccc} (Y/K, (Z_1)_Y/K) & \longleftarrow & (Y, (Z_1)_Y) \\ \downarrow & \swarrow f & \\ S' & & \end{array}$$

where  $K$  acts trivially on  $S'$ , and  $f$  is projective, smooth, and log smooth ( $S'$  having the trivial log structure). We now apply **1.1** to  $(f : (Y, (Z_1)_Y) \rightarrow S' = (S', \emptyset), K)$ , which satisfies conditions (i) - (iii) of (*loc. cit.*). We get a  $D$ -equivariant projective modification  $g : Y_1 \rightarrow Y$  ( $D$  acting through  $K$ ) and a  $D$ -strict snc divisor  $E_1$  on  $Y_1$ , containing  $Z_1 := g^{-1}((Z_1)_Y)$  as a subdivisor, such that the action of  $D$  on  $(Y_1, E_1)$  is very tame, and  $(Y_1, E_1)$  and  $(Y_1/D, E_1/D)$  are log smooth over  $S'$ . Pulling back  $g$

to the orbit  $Y \times^D L$  of  $Y$  under  $L$ , i. e. replacing  $g$  by  $g \times^D L$ , and working separately over each orbit, we eventually get an  $L$ -equivariant commutative square

$$(2.e) \quad \begin{array}{ccc} (Y_2/L, E_2/L) & \longleftarrow & (Y_2, E_2) , \\ v \downarrow & & u \downarrow \\ (X_2/L, Z_1/L) & \longleftarrow & (X_2, Z_1) \end{array}$$

where  $u, v$  are projective modifications (and  $Z_1 = h^{-1}(Z)$ ,  $Z_1/L = h_2^{-1}(Z)$  as above), with the property that the pair  $(Y_2/L, E_2/L)$  is an fs log scheme log smooth over  $S' (= S_1/L)$ , and  $v^{-1}(h_2^{-1}(Z)) \subset E_2/L$ . Let  $w : (\tilde{X}, \tilde{E}) \rightarrow (Y_2/L, E_2/L)$  be a projective, log étale modification such that  $\tilde{X}$  is regular, and  $\tilde{E} = w^{-1}(E_2/L)$  is an snc divisor in  $\tilde{X}$ . For example, one can take for  $w$  the saturated monoidal desingularization  $\tilde{\mathcal{F}}^{\log}$  of (VIII-3.4.9). We then apply 1.2 to the log smooth morphism  $\tilde{X} \rightarrow S'$ . By a special case of the (1.b), with  $Q = \{1\}$ ,  $G = \{1\}$ , as  $P^*$  is torsion free,  $\tilde{X}$  is not only regular, but smooth over  $S'$ , and  $\tilde{E}$  a relative snc on  $\tilde{X}$ . Let

$$\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow X$$

be the composition

$$\tilde{X} \xrightarrow{w} Y_2/L \xrightarrow{v} X_2/L \xrightarrow{h_2} X .$$

This is a projective  $\ell'$ -alteration, and it fits in the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{X} , \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

where  $S'$  is an extension of  $S$  of degree prime to  $\ell$ ,  $\tilde{X}$  is projective and smooth over  $S'$ , and  $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is a sub-divisor of the  $S'$ -relative snc divisor  $\tilde{E}$ , hence a relative snc divisor as well. This finishes the proof of 2.1.

Recall now the theorem stated in (Introduction 0.3 (2)) :

**THEOREM 2.4 (Gabber).** Let  $S$  be a separated, integral, noetherian, excellent, regular scheme of dimension 1, with generic point  $\eta$ ,  $X$  a scheme separated, flat and of finite type over  $S$ ,  $\ell$  a prime number invertible on  $S$ ,  $Z \subset X$  a nowhere dense closed subset. Then there exists a finite extension  $\eta'$  of  $\eta$  of degree prime to  $\ell$  and a projective  $\ell'$ -alteration  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  above  $S' \rightarrow S$ , where  $S'$  is the normalization of  $S$  in  $\eta'$ , with  $\tilde{X}$  regular and quasi-projective over  $S'$ , a strict normal crossings divisor  $\tilde{T}$  on  $\tilde{X}$ , and a finite closed subset  $\Sigma$  of  $S'$  such that :

(i) outside  $\Sigma$ ,  $\tilde{X} \rightarrow S'$  is smooth and  $\tilde{T} \rightarrow S'$  is a relative divisor with normal crossings ;

(ii) étale locally around each geometric point  $x$  of  $\tilde{X}_{s'}$ , where  $s' = \text{Spec } k'$  belongs to  $\Sigma$ , the pair  $(\tilde{X}, \tilde{T})$  is isomorphic to the pair consisting of

$$X' = S'[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] / (u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} - \pi),$$

$$T' = V(t_{r+1} \dots t_m) \subset X'$$

around the point  $(u_i = 1), (t_j = 0)$ , with  $1 \leq r \leq m \leq n$ , for positive integers  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  satisfying  $\text{gcd}(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$ ,  $p$  the characteristic exponent of  $k'$ ,  $\pi$  a local uniformizing parameter at  $s'$  ;

(iii)  $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is a sub-divisor of  $\cup_{s' \in \Sigma} (\tilde{X}_{s'})_{\text{red}} \cup \tilde{T}$ .

The proof follows the same lines as that of 2.1. We need again a Gabber-Vidal variant of de Jong's alteration theorems (cf. [Zheng, 2009, 3.8]). This is essentially [Vidal, 2004b, 4.4.1]), except for the additional data of  $Z \subset X$  and the removal of the hypothesis that  $S$  is a strictly local trait :

LEMMA 2.5. Let  $X$  be a normal, proper scheme over  $S$ , whose generic fiber is geometrically reduced and irreducible,  $Z \subset X$  a nowhere dense closed subset. We assume that a finite group  $H$  acts on  $X \rightarrow S$ , faithfully on  $X$ , and that  $Z$  is  $H$ -stable. Then there exists a finite group  $H_1$ , a surjective homomorphism  $H_1 \rightarrow H$ , and an  $H_1$ -equivariant diagram with a cartesian square

$$(2.a) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S & \xleftarrow{} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying the following properties :

- (i)  $S_1 \rightarrow S$  is the normalization of  $S$  in a finite extension  $\eta_1$  of  $\eta$  such that  $\eta_1/(\text{Ker}(H_1 \rightarrow H)) \rightarrow \eta$  is a radicial extension (where  $\eta$  is the generic point of  $S$ ) ;
- (ii)  $X_2$  is projective and strictly semistable over  $S_1$  (i. e. is strictly semistable over the localizations of  $S_1$  at closed points [de Jong, 1996, 2.16]) ;
- (iii)  $a : X_2 \rightarrow X_1$  is projective and surjective, maximally dominating and generically finite and flat, and there exists an  $H_1$ -admissible dense open subset  $W \subset X_{2,\eta_1}$  over a dense open subset  $U$  of  $X_{\eta_1}$ , such that if  $U_1 = \eta_1 \times_{\eta} U$  and  $K = \text{Ker}(H_1 \rightarrow \text{Aut}(U_1))$ ,  $W \rightarrow W/K$  is a Galois étale cover of group  $K$  and the morphism  $W/K \rightarrow U_1$  induced by  $a$  is a universal homeomorphism ;
- (iv)  $(ba)^{-1}(Z)$  is the support of a strict normal crossings divisor in  $X_2$ , and  $(X_2, (ba)^{-1}(Z))$  is a strict semistable pair over  $S_1$  (i. e. over the localizations of  $S_1$  at closed points [de Jong, 1996, 6.3]).

Note that (ii) and (iv) imply that there exists a finite closed subset  $\Sigma$  of  $S_1$  such that, outside  $\Sigma$ , the pair  $(X_2, (ba)^{-1}(Z))$  consists of a smooth morphism and a relative strict normal crossings divisor.

*Proof.* Up to minute modifications the proof is the same as that of 2.2. We may assume the generic fiber  $X_{\eta}$  of dimension  $d \geq 1$ . We apply [Vidal, 2004b, 4.4.3] to  $X/S$ ,  $Z$ , and  $G = H$ . We get the data of (*loc. cit.*), namely an equivariant finite surjective morphism  $(S_1, H_1) \rightarrow (S, H)$ , with  $S_1$  regular (hence equal to the normalization of  $S$  in the extension  $\eta_1$  of the generic point  $\eta$  of  $S$ ) such that  $\eta_1/\text{Ker}(H_1 \rightarrow H) \rightarrow \eta$  is radicial, an  $H_1$ -equivariant pluri-nodal fibration  $(Y_d \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow S_1, \{\sigma_{ij}\}, Z_0)$ , and an  $H_1$ -equivariant alteration  $\alpha_1 : Y_d \rightarrow X$  over  $S$ , satisfying the conditions (i), (ii), (iii) of (*loc. cit.*) (in particular  $\alpha_1^{-1}(Z) \subset Z_d$ ). Then, as in the proof of [Vidal, 2004b, 4.4.1], successively applying [Vidal, 2004b, 4.4.4] to each nodal curve  $f_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ , one can replace  $Y_i$  by an  $H_1$ -equivariant projective modification  $Y'_i$  of it such that  $Y'_i$  is regular, and the inverse image of  $Z_i := \cup_j \sigma_{ij}(Y_{i-1}) \cup f_i^{-1}(Z_{i-1})$  in  $Y'_i$  is an  $H_1$ -equivariant strict snc divisor. Then, by the remark following [Vidal, 2004b, 4.4.4]  $X_2 := Y'_d$  is strict semistable over  $S_1$  and  $(X_2, Z_d)$  is a strict semistable pair over  $S_1$ . In particular,  $(ba)^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is a subdivisor of  $Z_d$ , hence an snc divisor, and  $(X_2, (ba)^{-1}(Z))_{\text{red}}$  is a strict semistable pair over  $S_1$ . The open subsets  $U$  and  $V$  of (iii) are constructed as at the end of the proof of [Vidal, 2004b, 4.4.1].

**2.6. Proof of 2.4.** It is similar to that of 2.1. There are again three steps. We will indicate which modifications should be made.

*Step 1. Preliminary reductions.* Up to replacing  $X$  by the disjoint union of the schematic closures of the reduced components of its generic fiber, and working separately with each of them, we may assume  $X$  integral (and  $X_\eta \neq \emptyset$ ). Applying Nagata's compactification theorem, we may further assume  $X$  proper and integral. Base changing by the normalization of  $S$  in a finite radicial extension of  $\eta$  and taking the reduced scheme, we reduce to the case where, in addition,  $X_\eta$  is irreducible and geometrically reduced. Then we blow up  $Z$  in  $X$  and normalize as in the previous step 1. Here we used the excellency of  $S$  to guarantee the finiteness of the normalizations.

*Step 2. Use of 2.5.* Let  $S_0$  be the normalization of  $S$  in a finite Galois extension  $\eta_0$  of  $\eta$  such that the irreducible components of the generic fiber of  $X_0 = X \times_S S_0$  ( $S_0 = \text{Spec } k_0$ ) are geometrically irreducible. Let  $G = \text{Gal}(\eta_0/\eta)$  and  $H \subset G$  the decomposition subgroup of a component  $Y_0$  of  $X_0$ . We apply 2.5 to  $(Y_0/S_0, Z_0 \cap Y_0)$ , where  $Z_0 = S_0 \times_S Z$ . We find a surjection  $H_1 \rightarrow H$  and an  $H_1$ -equivariant diagram of type (2.a) satisfying conditions (i), (ii), (iii), (iv) with  $S$  replaced by  $S_0$ , and  $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$  by  $Y_2 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0$ . We then, as above, extend  $H_1 \rightarrow H$  to a surjection  $G_1 \rightarrow G$  and obtain a  $G_1$ -equivariant diagram of type (2.a)

$$(2.a) \quad \begin{array}{ccccc} X_0 & \xleftarrow{b} & X_1 & \xleftarrow{a} & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ S_0 & \xleftarrow{} & S_1 & & \end{array}$$

satisfying again (i), (ii), (iii), (iv). In particular, the composition  $h : X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X$  is an alteration above the composition  $S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S$ ,  $X_2$  is projective over  $S_1$ , with strict semistable reduction, and  $h^{-1}(Z)$  is the support of an snc divisor forming a strict semistable pair with  $X_2/S_1$ . It follows from (i) that  $S_1/G_1 \rightarrow S = S_0/G$  is generically radicial, and by (iii) that  $X_2/G_1 \rightarrow X$  is an alteration over  $S_1/G_1 \rightarrow S$ , which is a universal homeomorphism over a dense open subset. As above, choose an  $\ell$ -Sylow subgroup  $L$  of  $G_1$ . Then  $S_1/L$  is regular,  $S_1/L \rightarrow S_1/G_1$  is finite surjective of generic degree prime to  $\ell$ , and  $X_2/L \rightarrow X_2/G_1$  is a finite surjective morphism of generic degree prime to  $\ell$ . Putting  $S' = S_1/L$ ,  $X' = S' \times_S X$ , we get a commutative diagram with cartesian square

$$(2.b) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X_2/L & \longleftarrow & X_2, \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ S & \longleftarrow & S' & \longleftarrow & S_1 & & \end{array}$$

where  $S'$  is regular,  $S' \rightarrow S$  is finite surjective of generic degree prime to  $\ell$ ,  $S_1 \rightarrow S'$  generically étale of degree the order of  $L$ ,

$$h_2 : X_2/L \rightarrow X$$

an  $\ell'$ -alteration,  $X_2/S_1$  is projective and strictly semistable, and if  $h$  denotes the composition  $X_2 \rightarrow X$ ,  $Z_1 := h^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is an snc divisor in  $X_2$ , forming a strictly semistable pair with  $X_2/S_1$ .

*Step 3. Use of 1.1.* Defining  $Y$ ,  $(Z_1)_Y$ ,  $I \subset D$ ,  $K = D/I$  as in the former step 3,  $K$  acts generically freely on  $Y$ . As the pair  $(Y, (Z_1)_Y)$  is strictly semistable over



$S_1$ , there exists a finite closed subset  $\Sigma_1$  of  $S_1$  such that  $(Y, Y_{\Sigma_1} \cup (Z_1)_Y)$  forms a log regular pair, log smooth over  $S_1$  equipped with the log structure defined by  $\Sigma_1$ . As  $S_1 \rightarrow S' = S_1/L$  is Kummer étale,  $(Y, (Y_{\Sigma'}_{\text{red}} \cup (Z_1)_Y))$  (where  $\Sigma'$  is the inverse image of  $\Sigma_1$ ) is also log smooth over  $S'$  (equipped with the log structure given by  $\Sigma'$ ), and we get a  $K$ -equivariant commutative diagram (2.d), with trivial action of  $K$  on  $S'$  and  $f$  projective and log smooth over  $S'$ . We then apply 1.1 to  $f : (Y, (Y_{\Sigma'}_{\text{red}} \cup (Z_1)_Y)) \rightarrow S'$ , and the proof runs as above. We get a  $D$ -equivariant projective modification  $g : Y_1 \rightarrow Y$  ( $D$  acting through  $K$ ) and a  $D$ -strict snc divisor  $E_1$  on  $Y_1$ , containing  $(g^{-1}((Z_1)_Y) \cup (Y_1)_{\Sigma'})_{\text{red}}$  as a subdivisor, such that the action of  $D$  on  $(Y_1, E_1)$  is very tame, and  $(Y_1, E_1)$  and  $(Y_1/D, E_1/D)$  are log smooth over  $S'$ . After extending from  $D$  to  $L$  we get an  $L$ -equivariant commutative square of type (2.e), with  $(Y_2/L, E_2/L)$  log smooth over  $S' (= S_1/L)$ , and  $(v^{-1}(h_2^{-1}(Z)) \cup (Y_2/L)_{\Sigma'})_{\text{red}} \subset E_2/L$ . As above, we take a projective, log étale modification such that  $\tilde{X}$  is regular, and  $\tilde{E} = w^{-1}(E_2/L)$  is an snc divisor in  $\tilde{X}$ .

We now apply 1.2 to the log smooth morphism  $(\tilde{X}, \tilde{E}) \rightarrow S'$ . It's enough to work étale locally on  $\tilde{X}$  around some geometric point  $x$  of  $\tilde{X}_{s'}$ , with  $s' \in \Sigma'$ . We replace  $S'$  by its strict localization at the image of  $x$ , and consider (1.b), with  $Q = \mathbf{N}$ ,  $G = \{1\}$ ,  $\Lambda = \mathbf{Z}_{(p)}$  if  $p > 1$  and  $\mathbf{Q}$  otherwise, and the chart  $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow M_{S'}, 1 \mapsto \pi$ ,  $\pi$  a uniformizing parameter of  $S'$ . In (1.c) we have  $P^* = \mathbf{Z}^\mu$ ,  $P_1 = \mathbf{N}^\nu$ , for nonnegative integers  $\mu, \nu$ , hence

$$P = \mathbf{Z}^\nu \oplus \mathbf{N}^\mu.$$

Let  $((b_i), (a_i))$  be the image of  $1 \in \mathbf{N}$  in  $P$  in the above decomposition, and let  $(a_1, \dots, a_r), (b_1, \dots, b_s)$  be the sets of those  $a_i$ 's and  $b_i$ 's which are  $\neq 0$ . We may assume  $b_i > 0$  if  $b_i \neq 0$ . As the torsion part of  $\text{Coker}(\mathbf{Z} \rightarrow P^{gp})$  is annihilated by an integer invertible on  $\tilde{X}$ , we have  $\gcd(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$ , where  $p$  is the characteristic exponent of  $k$ . We have  $P = \mathbf{Z}^s \oplus \mathbf{N}^r \oplus \mathbf{Z}^{\nu-s} \oplus \mathbf{N}^{\mu-r}$ . Choosing a basis of  $V$ , we get that étale locally around  $x$ ,  $\tilde{X}$  is given by a cartesian square

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & \text{Spec } \Lambda[z] \end{array}$$

with  $x$  going to the point  $(u_i = 1), (t_j = 0)$ , and  $z \mapsto \pi, z \mapsto u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r}$ , in other words,

$$\tilde{X} = S'[u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}, t_1, \dots, t_n] / (u_1^{b_1} \dots u_s^{b_s} t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r} - \pi),$$

Finally,  $\tilde{E}$  is the union of the special fiber  $\tilde{X}_{s'}$  and a horizontal divisor  $\tilde{T}$ , étale locally given by the equation  $t_{r+1} \dots t_m = 0$ , for an integer  $m$  such that  $1 \leq r \leq m \leq n$ . As  $\tilde{h}^{-1}(Z)_{\text{red}}$  is a sub-divisor of  $(\tilde{X}_{s'})_{\text{red}} \cup \tilde{T}$ , this finishes the proof of 2.4.

### 3. Resolvability, log smoothness, and weak semistable reduction

**3.1. Elimination of separatedness assumptions.** The main aim of §3.1 is to weaken the separatedness assumptions in Theorems VIII-1.1 and 1.1. We start with an example showing how things can go wrong without such an assumption. Recall, see VI-4.1, that if a finite group  $G$  acts on a scheme  $X$  then the fixed point subscheme  $X^G$  is the intersection of graphs of the translations  $g : X \rightarrow X$ . In particular,  $X^G$  is closed whenever  $X$  is separated.

**EXAMPLE 3.1.1.** Let  $G = \{1, \sigma\}$  be a cyclic group of order two. Consider an affine plane  $\mathbf{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$  over a field  $k$  of characteristic different from 2 and let  $X$  be the affine plane with doubled origin, i.e.,  $X$  is glued from two copies of  $\mathbf{A}_k^2$  along  $U = \mathbf{A}_k^2 \setminus \{0\}$ . We provide  $U$  with the action of  $G$  by the rules  $\sigma x = x$  and  $\sigma y = -y$ , and extend this action to  $X$  so that  $\sigma$  intertwines the origins. Then  $X^G$  is the closed subscheme of  $U$  given by  $y = 0$ . In particular, it is not closed in  $X$ , and the inertia stratification (used in the proof of Theorem VIII-1.1) does not make sense. Note that the closure  $Z$  of  $X^G$  is an affine line with doubled origin on which  $G$  acts by permuting the origins. For any  $G$ -equivariant modification  $Y \rightarrow X$  the proper transform of  $Z$  is a modification of  $Z$  and hence is isomorphic to  $Z$ . Thus,  $Y^G$  contains the generic point of  $Z$  but not its origins, and we obtain that  $Y^G$  is not closed. Therefore, the action on  $Y$  is not very tame for any choice of a log structure, and we obtain that the assertion of Theorem VIII-1.1 fails for such  $(G, X, Z = \emptyset)$ .

**3.1.2. Inertia specializing actions.** Example 3.1.1 motivates the following definition: an action of a finite group  $G$  on a scheme  $X$  is *inertia specializing* if for any point  $x \in X$  with a specialization  $y \in X$  one has that  $G_x \subseteq G_y$ . Since a subscheme of  $X$  is closed if and only if it is closed under specializations, we obtain the following result.

**LEMMA 3.1.3.** An action of  $G$  on  $X$  is inertia specializing if and only if for each subgroup  $H \subseteq G$  the subscheme  $X^H$  is closed.

**REMARK 3.1.4.** (i) A large class of examples of inertia specializing actions can be described as follows. The following conditions are equivalent and imply that the action is inertia specializing: (a) any  $G$  orbit is contained in an open separated subscheme of  $X$ , (b)  $X$  admits a covering by  $G$ -equivariant separated open subschemes  $X_i$ . In particular, any admissible action is inertia specializing.

(ii) If  $(G, X, Z)$  is as in Theorem VIII-1.1, but instead of separatedness of  $X$  one only assumes that it possesses a covering by  $G$ -equivariant separated open subschemes  $X_i$ , then the assertion of the theorem still holds true. Indeed, the theorem applies to the  $G$ -equivariant log schemes  $(X_i, Z_i = Z|_{X_i})$ , and by Theorem VIII-5.6.1 the modifications  $f_{(G, X_i, Z_i)}$  agree on the intersections and hence glue to a required modification  $f_{(G, X, Z)}$  of  $X$ .

A quick analysis of the proof of VIII-1.1 is required to obtain the following stronger result.

**THEOREM 3.1.5.** (i) Theorem VIII-1.1 and its complement VIII-5.6.1 hold true if the assumption that  $X$  is separated is weakened to the assumption that the action of  $G$  on  $X$  is inertia specializing.

(ii) Theorem 1.1 holds true if the assumptions that  $X$  and  $S$  are separated are replaced with the single assumption that the action of  $G$  on  $X$  is inertia specializing.

*Proof.* The proof of VIII-1.1 in the general (i.e. not necessarily qc) case runs as follows. First, for any point  $x \in X$  and localizations  $X_x$  and  $Z_x$  one constructs  $f_x = f_{(G_x, X_x, Z_x)}$ . This stage does not use any separatedness assumption. Second, for any specialization  $y$  of  $x$  one shows that after eliminating empty normalized blow ups, the restriction  $f_y|_{X_x}$  coincides with  $f_x$ . For this stage to work we only need that  $G_x \subseteq G_y$ , i.e. the assumption that the action is inertia specializing is

precisely what one uses. The third stage is to show that the family  $f_y$  forms an atomic normalized blow up tower and hence descends to a normalized blow up tower  $f_{(G,X,Z)}$ . It uses the log-inertia stratification in order to control the associated points of the normalized blow up towers  $f_x$ . Since the inertia stratification is well defined for inertia specializing actions, the log-inertia stratification is well defined too, and this stage works fine. Finally, the last stage is to uniformly bound the normalization threshold of  $f_{(G,X,Z)}$  in terms of the combinatorial datum. The argument is local and the combinatorial datum involves only the log-inertia stratification and the size of  $G$ . Hence this stage also extends to our case without any changes.

The proof of Theorem 1.1 runs as follows. One considers the modification  $f_{(G,X,Z)}$  from VIII-1.1 and checks that it satisfies the additional properties asserted by 1.1. This check is local on  $X$  and hence applies to non-separated schemes as well. Since by part (i) of 3.1.5,  $f_{(G,X,Z)}$  is well defined whenever  $G$  acts inertia specializing on  $X$ , we obtain (ii).  $\square$

**3.1.6. Pseudo-projective morphisms and non-separated Chow's lemma.** We conclude §3.1 with recalling a non-separated version of Chow's lemma due to Artin-Raynaud-Gruson. It will be needed to avoid unnecessary separatedness assumptions in the future. We prefer to use the following non-standard terminology: a finite type morphism  $f: X \rightarrow S$  is *pseudo-projective* if it can be factored into a composition of a *local isomorphism*  $X \rightarrow \bar{X}$  (i.e.  $X$  admits an open covering  $X = \cup_i X_i$  such that the morphisms  $X_i \rightarrow \bar{X}$  are open immersions) and a projective morphism  $\bar{X} \rightarrow S$ .

**REMARK 3.1.7.** (i) We introduce pseudo-projective morphisms mainly for terminological convenience. Although pseudo-projectivity is preserved by base changes, it can be lost under compositions. Moreover, even if  $X$  is pseudo-projective over a field  $k$ , its blow up  $X'$  does not have to be pseudo-projective over  $k$  (thus giving an example of a projective morphism  $f: X' \rightarrow X$  and a pseudo-projective one  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  so that the composition is not pseudo-projective). Indeed, let  $X$  be an affine plane with a doubled origin  $\{o_1, o_2\}$ , and let  $X'$  be obtained by blowing up  $o_1$ . By  $\eta$  we denote the generic point of  $C_1 = f^{-1}(o_1)$ . The ring  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X',\eta})$  is a DVR and its spectrum has two different  $k$ -morphisms to  $X'$ : one takes the closed point to  $\eta$  and another one takes it to  $o_2$ . It then follows from the valuative criterion of separatedness that any  $k$ -morphism  $g: X' \rightarrow Y$  with a separated target takes  $o_2$  and  $\eta$  to the same point of  $Y$ . In particular, such  $g$  cannot be a local isomorphism, and hence  $X'$  is not pseudo-projective over  $k$ .

(ii) Note that a morphism  $f$  is separated (resp. proper) and pseudo-projective if and only if it is quasi-projective (resp. projective). So, the following result extends the classical Chow's lemma to non-separated morphisms.

**PROPOSITION 3.1.8.** *Let  $f: X \rightarrow S$  be a finite type morphism of quasi-compact and quasi-separated schemes, and assume that  $X$  has finitely many maximal points. Then there exists a projective modification  $g: X' \rightarrow X$  (even a blow up along a finitely generated ideal with a nowhere dense support) such that the morphism  $X' \rightarrow S$  is pseudo-projective.*

*Proof.* As a simple corollary of the flattening theorem, it is proved in [Raynaud & Gruson, 1971 5.7.13] that there exists a modification  $X' \rightarrow X$  such that  $X' \rightarrow S$  factors as a composition of an étale morphism  $X' \rightarrow \bar{X}$  that induces an isomorphism of dense open subschemes and a projective morphism  $\bar{X} \rightarrow S$ . (In loc.cit. one works with algebraic spaces and assumes that  $f$  is locally separated, but the latter is automatic for

any morphism of schemes.) Our claim now follows from the following lemma (which fails for locally separated morphisms between algebraic spaces).  $\square$

**LEMMA 3.1.9.** Assume that  $\phi: Y \rightarrow Z$  is an étale morphism of schemes that restricts to an open embedding on a dense open subscheme  $Y_0 \hookrightarrow Y$ . Then  $\phi$  is a local isomorphism.

*Proof.* Let us prove that if, in addition,  $\phi$  is separated then  $\phi$  is an open immersion. Since  $Y$  possesses an open covering by separated subschemes, this will imply the lemma. The diagonal  $\Delta_\phi: Y \rightarrow Y \times_Z Y$  is an open immersion, and by the separatedness of  $\phi$ , it is also a closed immersion. Thus,  $Y$  is a connected component of  $Y \times_Z Y$ , and since both  $Y$  and  $Y \times_Z Y$  have dense open subschemes that map isomorphically onto  $Y_0$ ,  $\Delta_\phi$  is an isomorphism. This implies that  $\phi$  is a monomorphism, but any étale monomorphism is an open immersion by [Grothendieck, 1967, 17.9.1].  $\square$

### 3.2. Semistable curves and log smoothness.

**3.2.1. Log structure associated to a closed subset.** Let  $S$  be a reduced scheme. Any closed nowhere dense subset  $W \subset S$  induces a log structure  $j_* \mathcal{O}_U^* \cap \mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathcal{O}_S$ , where  $j: U \hookrightarrow S$  is the embedding of the complement of  $W$ . The associated log scheme will be denoted  $(S, W)$ . By VI-1.4, any log regular log scheme is of the form  $(S, W)$ , where  $W$  is the non-triviality locus of the log structure.

**3.2.2. Semistable relative curves.** Following the terminology of [Temkin, 2010], by a semistable multipointed relative curve over a scheme  $S$  we mean a pair  $(C, D)$ , where  $C$  is a flat  $S$ -scheme of relative dimension one and with fibers having only ordinary nodes as singularities, and  $D \hookrightarrow C$  is a closed subscheme which is étale over  $S$  and disjoint from the singular locus of  $C \rightarrow S$ . We do not assume  $C$  to be neither proper nor even separated over  $S$ .

**PROPOSITION 3.2.3.** Assume that  $(S, W)$  is a log regular log scheme and  $(C, D)$  is a semistable multipointed relative  $S$ -curve such that the morphism  $f: C \rightarrow S$  is smooth over  $S \setminus W$ . Then the morphism of log schemes  $(C, D \cup f^{-1}(W)) \rightarrow (S, W)$  is log smooth.

*Proof.* If  $C$  is proper over  $S$  then this claim is nothing else than VI-1.9. Moreover, the proof of VI-1.9. is local on  $C$ , hence it applies to our case as well.  $\square$

### 3.3. $l'$ -resolvability.

**3.3.1. Alterations.** Assume that  $S'$  and  $S$  are reduced schemes with finitely many maximal points and let  $\eta' \subseteq S'$  and  $\eta \subseteq S$  denote the subschemes of maximal points. Let  $f: S' \rightarrow S$  be an *alteration*, i.e. a proper, surjective, generically finite, and maximally dominating morphism. Recall that  $f$  is an  *$l'$ -alteration* if  $([k(x) : k(f(x))], l) = 1$  for any  $x \in \eta'$ . We say that  $f$  is *separable* if  $k(\eta')$  is a separable  $k(\eta)$ -algebra (i.e.  $\eta' \rightarrow \eta$  has geometrically reduced fibers). If, in addition,  $S'$  and  $S$  are provided with an action of a finite group  $G$  such that  $f$  is  $G$ -equivariant, the action on  $S$  is trivial, the action on  $\eta'$  is free, and  $\eta'/G \xrightarrow{\sim} \eta$ , then we say that  $f$  is a *separable Galois alteration* of group  $G$ , or just *separable  $G$ -alteration*.

**REMARK 3.3.2.** We add the word "separable" to distinguish our definition from Galois alterations in the sense of de Jong (see [de Jong, 1996]) or Gabber-Vidal (see [Vidal, 2004a, p. 370]). In the latter cases, one allows alterations that factor as  $S' \rightarrow S'' \rightarrow S$ , where  $S' \rightarrow S''$  is a separable Galois alteration and  $S'' \rightarrow S$  is purely inseparable.

**3.3.3. Universal  $l'$ -resolvability.** Let  $X$  be a noetherian scheme and let  $l$  be a prime invertible on  $X$ . Assume that for any alteration  $Y \rightarrow X$  and nowhere dense closed subset  $Z \subset Y$  there exists a surjective projective morphism  $f: Y' \rightarrow Y$  such that  $Y'$  is regular and  $Z' = f^{-1}(Z)$  is an snc divisor. (By a slight abuse of language, by saying that a closed subset is an snc divisor we mean that it is the support of an snc divisor.) If, furthermore, one can always choose such  $f$  to be a modification, separable  $l'$ -alteration,  $l'$ -alteration, or alteration, then we say that  $X$  is *universally  $l'$ -resolvable*, *universally separably  $l'$ -resolvable*, *universally  $l'$ -resolvable*, or *universally  $\mathbf{Q}$ -resolvable*, respectively.

**REMARK 3.3.4.** (i) Due to resolution of singularities in characteristic zero, any qc scheme over  $\text{Spec}(\mathbf{Q})$  is universally  $l'$ -resolvable for any  $l$ . This is essentially due to Hironaka, [Hironaka, 1964], though an additional work was required to treat qc schemes that are not algebraic in Hironaka's sense, see [Temkin, 2008b] for the noetherian case and [Temkin, 2011b] for the general case.

(ii) It is hoped that all qc schemes admit resolution of singularities (in particular, are universally  $l'$ -resolvable). However, we are, probably, very far from proving this. Currently, it is known that any qc scheme of dimension at most two admits resolution of singularities (see [Cossart et al., 2009] for a modern treatment). In particular, any qc scheme of dimension at most two is universally  $l'$ -resolvable.

(iii) One can show that any universally  $\mathbf{Q}$ -resolvable scheme is qc, but we prefer not to include this proof here, and will simply add quasi-excellence assumption to the theorems below.

(iv) On the negative side, we note that there exist regular (hence  $l'$ -resolvable) but not universally  $\mathbf{Q}$ -resolvable schemes  $X$ . They can be constructed analogously to examples from I-11.5. For instance, there exists a discretely valued field  $K$  whose completion  $\widehat{K}$  contains a finite purely inseparable extension  $K'/K$  (e.g. take an element  $y \in k((x))$  which is transcendental over  $k(x)$  and set  $K = k(x, y^p) \subset K' = k(x, y) \subset k((x))$  with the induced valuation). The valued extension  $K'/K$  has a defect in the sense that  $e_{K'/K} = f_{K'/K} = 1$ . In other words, the DVR's  $A'$  and  $A$  of  $K'$  and  $K$ , have the same residue field and satisfy  $m_{A'} = m_A A'$ . Since  $A'$  is  $A$ -flat, it cannot be  $A$ -finite. On the other hand,  $A'$  is the integral closure of  $A$  in  $K'$ , and we obtain that  $A$  is not qc. In addition, although  $X = \text{Spec}(A)$  is regular, any  $X$ -finite integral scheme  $X'$  with  $K' \subseteq k(X')$  possesses a non-finite normalization and hence does not admit a desingularization. Thus,  $X$  is not universally  $\mathbf{Q}$ -resolvable.

Our main goal will be to show that universal  $l'$ -resolvability of a qc base scheme  $S$  is inherited by finite type  $S$ -schemes whose structure morphism  $X \rightarrow S$  is maximally dominating (see Theorem 3.5 below, where a more precise result is formulated). The proof will be by induction on the relative dimension, and the main work is done when dealing with the case of generically smooth relative curves.

**THEOREM 3.4.** Let  $S$  be an integral, noetherian, qc scheme with generic point  $\eta = \text{Spec}(K)$ , let  $f: X \rightarrow S$  be a maximally dominating (II-1.1.2) morphism of finite type, and let  $Z \subset X$  be a nowhere dense closed subset. Assume that  $S$  is universally  $l'$ -resolvable (resp. universally separably  $l'$ -resolvable),  $X_\eta = X \times_S \eta$  is a smooth curve over  $K$ , and  $Z_\eta = Z \times_S \eta$  is étale over  $K$ . Then there exist a projective  $l'$ -alteration (resp. a separable projective  $l'$ -alteration)  $\alpha: S' \rightarrow S$ , a projective modification  $\beta: X' \rightarrow (X \times_S S')^{\text{pr}}$ , where  $(X \times_S S')^{\text{pr}}$  is the proper

transform of  $X$ , i.e. the schematic closure of  $X_\eta \times_S S'$  in  $X \times_S S'$ ,

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{b} & (X \times_S S')^{\text{prc}} & \longrightarrow & X \times_S S' & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & & & S' & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

and divisors  $W' \subset S'$  and  $Z' \subset X'$  such that  $S'$  and  $X'$  are regular,  $W'$  and  $Z'$  are snc, the morphism  $f': X' \rightarrow S'$  is pseudo-projective (§3.1.6),  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth, and  $Z' = c^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ , where  $c$  denotes the alteration  $X' \rightarrow X$ .

We also note if  $f$  is separated (resp. proper) then  $f'$  is even quasi-projective (resp. projective) by Remark 3.1.7(ii).

*Proof.* It will be convenient to represent  $Z$  as  $Z_h \cup Z_v$ , where the horizontal component  $Z_h$  is the closure of  $Z_\eta$  and the vertical component  $Z_v$  is the closure of  $Z \setminus Z_h$ . The following observation will be used freely: if  $a_1: S_1 \rightarrow S$  is a (resp. separable) projective  $l'$ -alteration with an integral  $S_1$  and  $b_1: X_1 \rightarrow (X \times_S S_1)^{\text{pr}}$  is a projective modification, then it suffices to prove the theorem for  $f_1: X_1 \rightarrow S_1$  and the preimage  $Z_1 \subset X_1$  of  $Z$  (note that the generic fiber of  $f_1$  is smooth because it is a base change of that of  $f$ ). So, in such a situation we can freely replace  $f$  by  $f_1$ , and  $Z$  will be updated automatically without mentioning, as a rule. We will change  $S$  and  $X$  a few times during the proof. We start with some preliminary steps.

**Step 1.** *We can assume that  $f$  is quasi-projective.* By Proposition 3.1.8, replacing  $X$  with its projective modification we can achieve that  $f$  factors through a local isomorphism  $X \rightarrow \bar{X}$ , where  $\bar{X}$  is  $S$ -projective. Let  $X_1 \subseteq \bar{X}$  be the image of  $X$ . Then the induced morphism  $X_1 \rightarrow S$  is quasi-projective and with smooth generic fiber. If the theorem holds for  $f_1$  and the image  $Z_1 \subset X_1$  of  $Z$ , i.e., there exist  $a: S' \rightarrow S$  and  $b_1: X'_1 \rightarrow (X_1 \times_S S')^{\text{pr}}$  that satisfy all assertions of the theorem, then the theorem also holds for  $f$  and  $Z$  because we can keep the same  $a$  and take  $b = b_1 \times_{X_1} X$ . This completes the step, and in the sequel we assume that  $f$  is quasi-projective. As we will only use projective modifications  $b_1: X_1 \rightarrow (X \times_S S_1)^{\text{pr}}$ , the quasi-projectivity of  $f$  will be preserved automatically.

**Step 2.** *We can assume that  $f$  and  $Z_h \rightarrow S$  are flat.* Indeed, due to the flattening theorem of Raynaud-Gruson, see [Raynaud & Gruson, 1971, 5.7.9], this can be achieved by replacing  $S$  with an appropriate projective modification  $S'$ , replacing  $X$  with the proper transform, and replacing  $Z$  with its preimage. From now on, the proper transforms of  $X$  will coincide with the base changes.

**Step 3.** *Use of the stable modification theorem.* By the stable modification theorem [Temkin, 2010, 1.5 and 1.1] there exist a separable alteration  $\bar{a}: \bar{S} \rightarrow S$  with an integral  $\bar{S}$  and a projective modification  $\bar{X} \rightarrow X \times_S \bar{S}$  such that  $(\bar{X}, \bar{Z}_h)$  is a semistable multipointed  $\bar{S}$ -curve (see §3.2.2), where  $\bar{Z}_h \subset \bar{X}$  is the horizontal part of the preimage  $\bar{Z}$  of  $Z$ . Enlarging  $\bar{S}$  we can assume that it is integral and normal.

$$\begin{array}{ccccc} \bar{X} & \longrightarrow & X \times_S \bar{S} & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow f \\ & & \bar{S} & \xrightarrow{\bar{a}} & S \end{array}$$

**Step 4.** *We can assume that  $\bar{a}$  is a separable projective  $G$ -alteration, where  $G$  is an  $l$ -group.* Since semistable multipointed relative curves are preserved by base

changes, we can just enlarge  $\bar{S}$  by replacing it with any separable projective Galois alteration that factors through  $\bar{S}$ . Once  $\bar{S} \rightarrow S$  is Galois, let  $\bar{G}$  denote its Galois group and let  $G \subseteq \bar{G}$  be any Sylow  $l$ -subgroup. Since  $\bar{S} \rightarrow \bar{S}/G$  is a separable  $G$ -alteration and  $\bar{S}/G \rightarrow S$  is a separable projective  $l'$ -alteration, we can replace  $S$  with  $\bar{S}/G$ , replace  $X$  with  $X \times_S (\bar{S}/G)$ , and update  $Z$  accordingly, accomplishing the step.

Step 5. *The action of  $G$  on  $X \times_S \bar{S}$  via  $\bar{S}$  lifts equivariantly to  $\bar{X}$ . In particular,  $\bar{f}$  becomes  $G$ -equivariant and  $\bar{X} \rightarrow X$  becomes a separable projective  $G$ -alteration.* This follows from [Temkin, 2010, 1.6].

Step 6. *The action of  $G$  on  $\bar{X}$  is inertia specializing.* Indeed, any covering of  $X$  by separated open subschemes induces a covering of  $\bar{X}$  by  $G$ -equivariant separated open subschemes. So, it remains to use Remark 3.1.4(i).

Step 7. *We can assume that  $\bar{S} \rightarrow S$  is finite.* By Raynaud-Gruson there exists a projective modification  $S' \rightarrow S$  such that the proper transform  $\bar{S}'$  of  $\bar{S}$  is flat over  $S'$ . Let  $\eta$  denote the generic point of  $S$  and  $S'$  and let  $\eta'$  denote the generic point of  $\bar{S}$  and  $\bar{S}'$ . Since the morphisms  $\bar{S} \times_S S' \rightarrow S'$  and  $\eta' \rightarrow \eta$  are  $G$ -equivariant and  $\bar{S}'$  is the schematic closure of  $\eta'$  in  $\bar{S} \times_S S'$ , we obtain that the morphism  $\bar{S}' \rightarrow S'$  is a separable projective  $G$ -alteration. Replacing  $\bar{S} \rightarrow S$  with  $\bar{S}' \rightarrow S'$ , and updating  $X$  and  $\bar{X}$  accordingly, we achieve that  $\bar{S} \rightarrow S$  becomes flat, and hence finite. All conditions of steps 1–6 are preserved with the only exception that  $\bar{S}$  may be non-normal. So, we replace  $\bar{S}$  with its normalization and update  $\bar{X}$ . This operation preserves the finiteness of  $\bar{S} \rightarrow S$ , so we complete the step.

Step 8. *Choice of  $W$ .* Fix a closed subset  $W \subsetneq S$  such that  $\bar{S} \rightarrow S$  is étale over  $S \setminus W$ ,  $\bar{f}(\bar{Z}_v) \subseteq \bar{W}$ , where  $\bar{Z}_v$  is the vertical part of  $\bar{Z}$  and  $\bar{W} = \bar{\alpha}^{-1}(W)$ , and  $\bar{f}$  is smooth over  $\bar{S} \setminus \bar{W}$ .

Step 9. *We can assume that  $S$  is regular and  $W$  is snc.* Indeed, by our assumptions on  $S$  there exists a projective  $l'$ -alteration (resp. a separable projective  $l'$ -alteration)  $\alpha: S' \rightarrow S$  such that  $S'$  is regular and  $\alpha^{-1}(W)$  is snc. Choose any preimage of  $\eta$  in  $S' \times_S \bar{S}$  and let  $\bar{S}'$  be the normalization of its closure. Then  $\bar{S}' \rightarrow S'$  is a separable projective Galois alteration with Galois group  $G' \subseteq G$ , so we can replace  $S, \bar{S}, G$  and  $X$  with  $S', \bar{S}', G'$  and  $X \times_S S'$ , respectively, and update  $W, \bar{W}$  and  $Z$  accordingly (i.e. replace them with their preimages). Note that step 9 is the only step where a non-separable alteration of  $S$  may occur.

Step 10. *The morphism  $(\bar{S}, \bar{W}) \rightarrow (S, W)$  is Kummer étale.* Indeed,  $\bar{S} \rightarrow S$  is an étale  $G$ -covering outside of  $W$ , and  $\bar{S}$  is the normalization of  $S$  in this covering, so the assertion follows from IX-2.1.

Consider the  $G$ -equivariant subscheme  $\bar{T} = \bar{Z} \cup \bar{f}^{-1}(\bar{W})$  of  $\bar{X}$ . The morphism  $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (\bar{S}, \bar{W})$  is log smooth by Proposition 3.2.3, hence so is the composition  $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (S, W)$  and we obtain that  $(\bar{X}, \bar{T})$  is log regular. The group  $G$  acts freely on  $\bar{S} \setminus \bar{W}$  and hence also on  $\bar{X} \setminus \bar{T}$ . Also, its action on  $\bar{X}$  is tame and inertia specializing (step 6), hence we can apply Theorem 1.1 to  $(\bar{X}, \bar{T}) \rightarrow (S, W)$ . As a result, we obtain a projective  $G$ -equivariant modification  $(\bar{X}', \bar{T}') \rightarrow (\bar{X}, \bar{T})$  such that  $\bar{T}'$  is the preimage of  $\bar{T}$ ,  $G$  acts very tamely on  $(\bar{X}', \bar{T}')$ , and  $(X', Z') = (\bar{X}'/G, \bar{T}'/G)$  is log smooth over  $(S, W)$  (the quotient exists as a scheme as  $f$  is quasi-projective by Step 1 and the morphisms  $\bar{S} \rightarrow S$  and  $\bar{X}' \rightarrow \bar{X} \rightarrow X \times_S \bar{S}$  are projective). Clearly,  $X'$  is a projective modification of  $X$  and  $Z'$  is the union of the preimages of  $W$  and

$Z$ , hence it only remains to achieve that  $X'$  is regular and  $Z'$  is snc. For this it suffices to replace  $(X', Z')$  with its projective modification  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(X', Z')$  introduced in VIII-3.4.9.  $\square$

REMARK 3.4.1. It is natural to compare Theorem 3.4 and the classical de Jong's result recalled in IX-1.2. The main differences are as follows.

(i) One considers non-proper relative curves in 3.4, and this is the only point that requires to use the stable modification theorem instead of de Jong's result. The reason is that although the problem easily reduces to the case of a quasi-projective  $f$  (see Step 2), one cannot make  $f$  projective, as the compactified generic fiber  $\overline{X}_\eta$  does not have to be smooth (i.e. *geometrically* regular) at the added points.

(ii) One uses  $l'$ -alterations in 3.4. This is more restrictive than in IX-1.2, but the price one has to pay is that the obtained log smooth morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  does not have to be a nodal curve (e.g.  $X' \rightarrow S'$  may have non-reduced fibers). The construction of such  $b: X' \rightarrow X$  involves a quotient by a Sylow subgroup, and is based on Theorem 1.1. (Note also that it seems probable that instead of 1.1 one could use a torification argument of Abramovich-de Jong, see [Abramovich & de Jong, 1997, §1.4.2].)

Now, we are going to use Theorem 3.4 to prove the main result of §3.

THEOREM 3.5. Let  $f: X \rightarrow S$  be a maximally dominating (II-1.1.2) morphism of finite type between noetherian qc schemes, let  $Z \subset X$  be a nowhere dense closed subset, and assume that  $S$  is universally  $l'$ -resolvable, then:

- (i)  $X$  is universally  $l'$ -resolvable.
- (ii) There exist projective  $l'$ -alterations  $a: S' \rightarrow S$  and  $b: X' \rightarrow X$  with regular sources, a pseudo-projective (§3.1.6) morphism  $f': X' \rightarrow S'$  compatible with  $f$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{b} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{a} & S \end{array}$$

and snc divisors  $W' \subset S'$  and  $Z' \subset X'$  such that  $Z' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$  and the morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth.

- (iii) If  $S = \text{Spec}(k)$ , where  $k$  is a perfect field, then one can achieve in addition to (ii) that  $a$  is an isomorphism and the alteration  $b$  is separable. In particular,  $X$  is universally separably  $l'$ -resolvable in this case.

*Proof.* Note that (i) follows from (ii) because any alteration  $X_1$  of  $X$  is also of finite type over  $S$ , so we can apply (ii) to  $X_1$  as well. Thus, our aim is to prove (ii) and its complement (iii). We will view  $Z$  both as a closed subset and a reduced closed subscheme. We start with a few preliminary steps, that reduce the theorem to a special case. We will tacitly use that if  $S_1 \rightarrow S$  and  $X_1 \rightarrow X$  are projective  $l'$ -alterations, separable in case (iii), and  $f_1: X_1 \rightarrow S_1$  is compatible with  $f$ , then it suffices to prove the theorem for  $f_1$  and the preimage  $Z_1 \subset X_1$  of  $Z$ . So, in such situation we can freely replace  $f$  with  $f_1$ , and  $Z$  will be updated automatically without mentioning, as a rule.

Step 1. *We can assume that  $X$  and  $S$  are integral and normal.* For a noetherian scheme  $Y$  let  $\text{Nor}(Y)$  denote the normalization of its reduction. Since  $f$  is maximally dominating, it induces a morphism  $\text{Nor}(f): \text{Nor}(X) \rightarrow \text{Nor}(S)$ , and replacing  $f$  with  $\text{Nor}(f)$  we can assume that  $S$  and  $X$  are normal. Since we can work



separately with the connected components, we can now assume that  $S$  and  $X$  are integral.

**Step 2.** *We can assume that  $f$  is projective.* By Proposition 3.1.8 there exists a projective modification  $X_1 \rightarrow X$  such that the morphism  $X_1 \rightarrow S$  factors into a composition of a local isomorphism  $X_1 \rightarrow \bar{X}$  and a projective morphism  $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow S$ . Replacing  $X$  with  $X_1$  we can assume that  $X$  itself admits a local isomorphism  $g: X \rightarrow \bar{X}$  with an  $S$ -projective target. Let  $\bar{Z}$  be the closure of  $g(Z)$ . Then it suffices to solve our problem for  $\bar{f}$  and  $\bar{Z}$ , as the corresponding alteration of  $\bar{X}$  will induce an alteration of  $X$  as required. Thus, replacing  $X$  and  $Z$  with  $\bar{X}$  and  $\bar{Z}$ , we can assume that  $f$  is projective.

**Step 3.** *It suffices to find  $f'$  which satisfies all assertions of the theorem except the formula for  $Z'$ , while the latter is weakened as  $b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W') \subseteq Z'$ .* Given such an  $f'$  note that  $Z'' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$  is a subdivisor of  $Z'$ , hence it is an snc divisor too. We claim that  $X', Z'', S', W'$  satisfy all assertions of the theorem, and the only thing one has to check is that the morphism  $(X', Z'') \rightarrow (S', W')$  is log smooth. The latter follows from Lemma 3.5.2 whose proof will be given below.

**Step 4.** *In the situation of (iii) we can assume that the field  $k$  is infinite.* Assume that  $S = \text{Spec}(k)$  where  $k$  is a finite field and fix an infinite algebraic  $l'$ -prime extension  $\bar{k}/k$  (i.e. it does not contain the extension of  $k$  of degree  $l$ ). We claim that it suffices to prove (ii) and (iii) for  $\bar{S} = \text{Spec}(\bar{k})$  and the base changes  $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$  and  $\bar{Z} = Z \times_S \bar{S}$ . Indeed, assume that  $\alpha: \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$  is a separable  $l'$ -alteration with a regular source and such that  $\bar{Z}' = \alpha^{-1}(\bar{Z})$  is an snc divisor (obviously, we can take  $\bar{S}' = \bar{S}$  and  $\bar{W}' = \emptyset$ ). Since  $\bar{S} = \lim_i S_i$  where  $S_i = \text{Spec}(k_i)$  and  $k_i/k$  run over finite subextensions of  $\bar{k}/k$ , [Grothendieck, 1966, 8.8.2(ii)] implies that there exists  $i$  and a finite type morphism  $X'_i \rightarrow X_i = X \times_S S_i$  such that  $\bar{X}' \xrightarrow{\sim} X'_i \times_{S_i} \bar{S}$ . For any finite subextension  $k_i \subseteq k_j \subseteq \bar{k}$  set  $X'_j = X'_i \times_{S_i} S_j$  and  $X_j = X_i \times_{S_i} S_j$ , and let  $Z'_j \subset X'_j$  be the preimage of  $Z$ . Then it follows easily from [Grothendieck, 1966, 8.10.5] and [Grothendieck, 1967, 17.7.8] that  $X'_j \rightarrow X_j$  is an  $l'$ -alteration and  $X'_j \rightarrow S_j$  is smooth for large enough  $k_j$ . In the same manner one achieves that  $Z'_j$  is an snc divisor. Now, it is obvious that  $(X'_j, Z'_j) \rightarrow (S, \emptyset)$  is log smooth and  $X'_j \rightarrow X_j \rightarrow X$  is an  $l'$ -alteration.

Now we are in a position to prove the theorem. We will use induction on  $d = \text{tr.deg.}(k(X)/k(S))$ , with the case of  $d = 0$  being obvious. Assume that  $d \geq 1$  and the theorem holds for smaller values of  $d$ .

**Step 5.** *Factorizing  $f$  through a relative curve.* After replacing  $X$  by a projective modification we can factor  $f$  through an integral scheme  $Y$  such that  $g: X \rightarrow Y$  is maximally dominating,  $h: Y \rightarrow S$  is projective, and  $\text{tr.deg.}(k(X)/k(Y)) = 1$ . Indeed, one can obviously construct such a rational map  $h': X \dashrightarrow Y$  even without modifying  $X$  (i.e.  $h'$  is well defined on a non-empty open subscheme  $U \subseteq X$ ). Let  $X'$  be the schematic image of the morphism  $U \hookrightarrow X \times Y$ . Then  $X' \rightarrow X$  is a projective modification (an isomorphism over  $U$ ), and the morphism  $X' \rightarrow S$  factors through  $Y$ .

Let  $\eta = \text{Spec}(k(Y))$  denote the generic point of  $Y$ ,  $X_\eta = X \times_Y \eta$  and  $Z_\eta = Z \times_Y \eta$ . If  $k$  is an infinite perfect field and  $S = \text{Spec}(k)$  then a Bertini type argument from the end of proof of [de Jong, 1996, 4.11] implies that we can choose  $Y$  so that  $X_\eta$  and  $Z_\eta$  are smooth over  $\eta$ . (One assumes that  $k$  is algebraically closed in [de Jong, 1996], but to use Bertini's theorem one only needs that  $k$  is perfect

and infinite.) In the general case, we can achieve that  $X_\eta$  and  $Z_\eta$  are smooth at cost of a purely inseparable alteration of  $Y$ . Indeed, pick up any finite purely inseparable extension  $K/k(Y)$  such that  $Z_K = \text{Nor}(Z \times_\eta \text{Spec}(K))$  (i.e. just the reduction) and  $X_K = \text{Nor}(X \times_\eta \text{Spec}(K))$  are smooth, extend  $K$  to a projective alteration  $Y' \rightarrow Y$ , and replace  $Y$  and  $X$  with  $Y'$  and the schematic closure of  $X_K$  in  $X \times_Y Y'$ , respectively.

Step 6. *Use of Theorem 3.4.* So far, we have constructed the right column of the following diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 (X', Z') & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(L, M_L)} & (L, M_L) & \longrightarrow & (X'', Z'') & \xrightarrow{b''} & X \\
 & \searrow f' & \downarrow g' & \square & \downarrow g'' & & \downarrow g \\
 & & (Y', V') & \xrightarrow{c'} & (Y'', V'') & \xrightarrow{c''} & Y \\
 & & \downarrow h' & & \downarrow h'' & & \downarrow h \\
 & & (S', W') & \xrightarrow{a} & S & \xlongequal{\quad} & S
 \end{array}$$

By Theorem 3.4 there exists a projective  $l'$ -alteration  $c'': Y'' \rightarrow Y$  with regular source, a projective modification  $X'' \rightarrow (X \times_Y Y'')^{\text{pr}}$  with regular source, a projective morphism  $g'': X'' \rightarrow Y''$  compatible with  $g$ , and snc divisors  $V'' \subset Y''$  and  $Z'' \subset X''$  such that  $(X'', Z'') \rightarrow (Y'', V'')$  is log smooth and  $b''^{-1}(Z) \subseteq Z''$ . In case (iii),  $Y$  is universally separably  $l'$ -resolvable by the induction assumption, hence we can take  $c''$  to be separable, and then  $b'': X'' \rightarrow X$  is also separable. In addition, by the induction assumption applied to  $h'': Y'' \rightarrow S'$  and  $V'' \subset Y''$  there exist projective  $l'$ -alterations  $a: S' \rightarrow S$  and  $c': Y' \rightarrow Y''$  with regular sources and snc divisors  $W' \subset S'$  and  $V' \subset Y'$  and a projective morphism  $h': Y' \rightarrow S'$  compatible with  $h''$  such that  $(Y', V') \rightarrow (S', W')$  is log smooth,  $c'^{-1}(V'') \subseteq V'$ , and  $c'$  is separable if the assumption of (iii) is satisfied.

Set  $(L, M_L) = (X'', Z'') \times_{(Y'', V'')}^{\text{fs}} (Y', V')$ , where the product is taking place in the category of fs log schemes. To simplify notation we will write  $\text{P}^{\text{sat}}$  instead of  $(\text{P}^{\text{int}})^{\text{sat}}$  for monoids and log schemes. Recall that  $(L, M_L) = (F, M_F)^{\text{sat}}$ , where  $(F, M_F)$  is the usual log fibered product, and  $F = X'' \times_{Y''} Y'$  by [Kato, 1988, 1.6]. Furthermore, we have local Zariski charts for  $c'$  and  $g''$  modeled, say, on  $P_i \rightarrow P'_i$  and  $P_i \rightarrow Q_i$ . Hence  $(F, M_F)$  is a Zariski log scheme with charts modeled on  $R_i = P'_i \oplus_{P_i} Q_i$ , and  $(L, M_L)$  is a Zariski log scheme with charts modeled on  $R_i^{\text{sat}}$ . Furthermore, the saturation morphism  $L \rightarrow F$  is finite hence the composition  $L \rightarrow F \rightarrow X''$  is projective. The morphism  $g': (L, M_L) \rightarrow (Y', V')$  is a saturated base change of the log smooth morphism  $g'': (X'', Z'') \rightarrow (Y'', V'')$ , hence it is log smooth. As  $(Y', V')$  is log regular,  $(L, M_L)$  is also log regular. Applying to  $(L, M_L)$  the saturated monoidal desingularization functor  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}$  from VIII-3.4.9 we obtain a log regular Zariski log scheme  $(X', Z')$  with a regular  $X'$ . Then  $Z'$  is a normal crossings divisor, which is even an snc divisor since the log structure is Zariski.

We claim that  $(X', Z')$  and  $(S', W')$  are as asserted by the theorem except of the weakening dealt with in Step 3. Indeed, the morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth because it is the composition  $(X', Z') \rightarrow (L, M_L) \rightarrow (Y', V') \rightarrow (S', W')$  of log smooth morphisms. The preimage of  $Z$  in  $X''$  is contained in  $Z''$ , which is the non-triviality locus of the log structure of  $(X'', Z'')$ , hence its preimage in  $X'$  is also contained in the non-triviality locus of the log structure of  $(X', Z')$ , which is  $Z'$ . Clearly,  $Z'$  also contains the preimage of  $W'$ . By the construction,  $S' \rightarrow S$  is

a projective  $l'$ -alteration, and it remains to check that  $X' \rightarrow X$  is also a projective  $l'$ -alteration. Since  $\widetilde{\mathcal{F}}^{\log}(L, M_L)$  is a saturated log blow up tower and  $(L, M_L)$  is log regular, the underlying morphism of schemes  $X' \rightarrow L$  is a projective modification by VIII-3.4.6(i). The projective morphism  $L \rightarrow X''$  is an  $l'$ -alteration because generically (where the log structures are trivial) it is a base change of the projective  $l'$ -alteration  $Y' \rightarrow Y''$ . And  $X'' \rightarrow X$  is a projective  $l'$ -alteration by the construction. It remains to recall that in the situation of (iii) the alterations  $c': Y' \rightarrow Y''$  and  $b'': X'' \rightarrow X$  are separable, hence so are  $(L, M_L) \rightarrow X''$  and the total composition  $X' \rightarrow X$ .  $\square$

**REMARK 3.5.1.** The only place where inseparable alterations are used is the argument at step 5, where we had to choose an inseparable extension  $K/k(Y)$  when  $X_\eta$  or  $Z_\eta$  is not geometrically regular.

**LEMMA 3.5.2.** Assume that  $S$  and  $X$  are regular schemes,  $W \subset S$  and  $Z \subset X$  are snc divisors, and  $f: X \rightarrow S$  is a morphism such that  $f^{-1}(W) \subseteq Z$  and the induced morphism of log schemes  $h: (X, Z) \rightarrow (S, W)$  is log smooth. Then for any intermediate divisor  $f^{-1}(W) \subseteq Z' \subseteq Z$  the morphism  $h': (X, Z') \rightarrow (S, W)$  is log smooth.

*Proof.* We can work locally at a geometric point  $\bar{x} \rightarrow X$ . Let  $x \in X$  and  $s \in S$  be the images of  $\bar{x}$ , and let  $q_1, \dots, q_r \in \mathcal{O}_{S,s}$  define the irreducible components of  $W$  through  $s$ . Set  $Q = \bigoplus_{i=1}^r q_i^{\mathbb{N}}$ . Shrinking  $S$  we obtain a chart  $c: S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])$  of  $(S, W)$ . By Proposition 1.2 applied to  $c, h$ , and  $G = 1$ , after localizing  $X$  along  $\bar{x}$  one can find an fs chart of  $h$  consisting of  $c, X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ , and  $\phi: Q \rightarrow P$  such that the morphism  $X \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  is smooth,  $P^*$  is torsion free,  $\phi$  is injective, and the torsion of  $\text{Coker}(\phi^{\text{gp}})$  is annihilated by an integer  $n$  invertible on  $S$ .

Let  $p_1, \dots, p_t \in \mathcal{O}_{X,x}$  define the irreducible components of  $Z$  through  $x$ . Our next aim is to adjust the chart similarly to 1.b(vi) to achieve that  $\bar{P} \xrightarrow{\sim} N = \bigoplus_{j=1}^t p_j^{\mathbb{N}}$ . Note that  $\bar{M}_{X,x} \xrightarrow{\sim} N$ , where  $M_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$  is the log structure of  $(X, Z)$ . The homomorphism  $\psi: P \rightarrow M_{X,x}$  factors through the fs monoid  $R = P[\Gamma^{-1}]$  where  $\Gamma = \psi^{-1}(M_{X,x}^*)$ . Clearly,  $R^*$  is torsion free,  $\bar{R} \xrightarrow{\sim} N$ , and shrinking  $X$  around  $x$  we obtain a chart  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[R])$ . Since  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[R])$  is open in  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[P])$  the morphism  $X \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[R])$  is smooth. So, we can replace  $P$  with  $R$  achieving that  $\bar{P} \xrightarrow{\sim} N$ , and hence  $P \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^t \oplus \mathbb{Z}^u$ .

Without restriction of generality  $Z'$  is defined by the vanishing of  $\prod_{j=1}^{t'} p_j$  for  $t' \leq t$ . Since  $f^{-1}(W) \subseteq Z'$ , the image of  $Q$  in  $\bar{P}$  is contained in  $\bar{P}' = \bigoplus_{j=1}^{t'} p_j^{\mathbb{N}}$ . Hence  $\phi$  factors through a homomorphism  $\phi': Q \rightarrow P' = \bar{P}' \oplus P^*$ , and we obtain a chart of  $h'$  consisting of  $c, X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$ , and  $\phi'$ . By [Kato, 1994, 3.5, 3.6], to prove that  $h'$  is log smooth it remains to observe that  $\phi'$  is injective, the torsion of  $\text{Coker}(\phi'^{\text{gp}})$  is annihilated by  $n$ , and the morphism

$$X \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[P]) \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$$

is smooth because  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[P]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[P'])$  is so.  $\square$

**3.5.3. Comparison with Theorems 2.1 and 2.4.** Theorems 2.1 and 2.4 follow by applying Theorem 3.5(ii) to  $X \rightarrow S$  and  $Z$  (where one takes  $S = \text{Spec}(k)$  in 2.1). Indeed, the main part of the proofs of 2.1 and 2.4 was to construct  $l'$ -alterations  $X' \rightarrow X$  and  $S' \rightarrow S$  with regular sources, snc divisors  $Z' \subset X'$  and  $W' \subset S'$ ,

and a log smooth morphism  $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$  compatible with  $f$ . Then, in the last paragraphs of both proofs, Proposition 1.2 was used to obtain a more detailed description of  $X'$ ,  $Z'$ , and  $f'$ . In particular, for a zero-dimensional base this amounted to saying that  $X'$  is  $S$ -smooth and  $Z'$  is relatively snc over  $S$ , and for a one-dimensional base this amounted to the conditions (i) and (ii) of 2.4.

Conversely, Theorem 2.1 (resp. 2.4) implies assertion (ii) of Theorem 3.5 under the assumptions of 2.1 (resp. 2.4) on  $X$  and  $S$ . Moreover, the non-separated Chow's lemma could be used in their proofs as well, so the separatedness assumption there could be easily removed. In such case, Theorems 2.1 and 2.4 would simply become the low dimensional (with respect to  $S$ ) cases of Theorem 3.5(ii) plus an explicit local description of the log smooth morphism  $f'$ . The strengthening 3.5(iii), however, was not achieved in 2.1, and required a different proof of the whole theorem.

**3.6. Saturation.** In Theorems 3.4 and 3.5 we resolve certain morphisms  $f: X \rightarrow S$  with divisors  $Z \subset X$  by log smooth morphisms  $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$ . However, as we insisted to use only  $l'$ -alterations and to obtain regular  $X'$  and snc  $Z'$ , we had to compromise a little on the "quality" of  $f'$ . For example, our  $f'$  may have non-reduced fibers. Due to de Jong's theorem, if the relative dimension is one, then one can make  $f'$  a nodal curve. We will see that a similar improvement of  $f'$  is possible in general if one uses arbitrary alterations and allows non-regular  $X'$ . The procedure reduces to saturating  $f'$  and is essentially due to Tsuji and Illusie-Kato-Nakayama.

**3.6.1. Saturated morphisms.** Recall that a homomorphism  $P \rightarrow Q$  of fs (resp. fine) monoids is *saturated* (resp. *integral*) if for any homomorphism  $P \rightarrow P'$  with fs (resp. fine) target the pushout  $Q \oplus_P P'$  is fs (resp. fine). A morphism of fs (resp. fine) log schemes  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  is *saturated* (resp. *integral*) if so are the homomorphisms  $\overline{M}_{X, f(y)} \rightarrow \overline{M}_{Y, y}$ .

**REMARK 3.6.2.** (i) Integral morphism were introduced already by Kato in [Kato, 1988, §4]. Kato also introduced the notion of saturated morphisms, which was first seriously studied by Tsuji in [Tsuji, 1997]. Actually, one can define saturated morphisms for arbitrary fine log schemes, but the definition is more involved than we use. For fs log schemes our definition coincides with the usual one due to [Tsuji, 1997, II 2.13(2)].

(ii) The following two basic properties of saturated morphisms follow from the definition: (a) a composition of saturated morphisms between fs log schemes is saturated, (b) if  $f: Y \rightarrow X$  is a saturated morphism between fs log schemes, then, for any morphism of fs log schemes  $Y' \rightarrow Y$ , the base change  $f': Y' \rightarrow X'$  of  $f$  in the category of log schemes is a saturated morphism of fs log schemes. (Also, it is proved in [Tsuji, 1997, II 2.11] that analogous properties hold for saturated morphisms between arbitrary integral log schemes.)

(iii) Let  $f: Y \rightarrow X$  be a morphism of fs log schemes. It is shown in [Tsuji, 1997, II 3.5] that if  $f$  can be modeled on charts corresponding to saturated homomorphisms of fs monoids  $P_i \rightarrow Q_i$  then  $f$  is saturated. Let us remark that the converse is also true: if  $f$  is saturated then it can be modeled on charts corresponding to  $P_i \rightarrow Q_i$  as above.

**3.6.3. Integrality and saturatedness for log smooth morphisms.** We recall the following result that relates the notions of integral and saturated morphisms to certain properties of the underlying morphisms of schemes.

**PROPOSITION 3.6.4.** *Let  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  be a log smooth morphism between fs log schemes.*

(i) *If  $f$  is integral then  $Y \rightarrow X$  is flat.*

(ii) *Assume that  $f$  is integral. Then  $f$  is saturated if and only if  $Y \rightarrow X$  has reduced fibers.*

*Proof.* The first claim is proved in [Kato, 1988, 4.5] and the second one is proved in [Tsuji, 1997, II 4.2].  $\square$

Sometimes one can also go in the opposite direction: from flatness to integrality.

**PROPOSITION 3.6.5.** *Let  $f: (Y, M_Y) \rightarrow (X, M_X)$  be a log smooth morphism between fs log schemes and assume that the morphism  $Y \rightarrow X$  is flat, then  $f$  is integral.*

*Proof.* It suffices to show that if  $\bar{y} \rightarrow Y$  is a geometric point and  $\bar{x} = f(\bar{y})$  then the homomorphism  $\bar{\phi}: \bar{M}_{X, \bar{x}} \rightarrow \bar{M}_{Y, \bar{y}}$  is integral. By Proposition 1.2 and the argument in 1.3(vi), localizing  $X$  and  $Y$  along these points we can assume that  $f$  is modeled on a chart  $Y_0 = \text{Spec}(\mathbf{Z}[P]) \rightarrow X_0 = \text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])$  corresponding to a homomorphism  $\phi: Q \rightarrow P$  so that the morphism  $g: Y \rightarrow Z = X \times_{X_0} Y_0$  is smooth (in particular, flat), and  $\phi$  has the following properties:  $Q = \bar{M}_{X, \bar{x}}$ ,  $P$  is fs,  $P^*$  is torsion free, the composition  $Q \rightarrow P \rightarrow \bar{P} = P/P^*$  coincides with  $\bar{\phi}$ , the kernel of  $\phi^{\text{gp}}$  is finite, killed by an integer invertible at  $x$ , as well as the torsion part of its cokernel (but we will not need these last two properties). Since  $Q$  is sharp and saturated,  $Q^{\text{gp}}$  is torsion free, so  $\phi$  is injective. We claim that  $\bar{\phi}$  is integral if and only if  $\phi$  is integral. To see this note that if  $Q \rightarrow R$  is a homomorphism of monoids, then  $R \oplus_Q \bar{P}$  is isomorphic to the quotient of  $R \oplus_Q P$  by the image of  $P^*$ , and hence either both pushouts are integral or neither of them is integral. Thus, we need only prove that  $\phi$  is integral.

Note that the morphism  $h: Z \rightarrow X$  is flat at the (Zariski) image  $z \in Z$  of  $\bar{y}$  because  $f$  and  $g$  are flat. Set  $x = h(z)$  and  $k = k(x)$ , then the fiber  $h_x: \text{Spec}(k[P]) \rightarrow \text{Spec}(k[Q])$  of  $h$  over  $x$  is flat at  $z$ . In other words, if  $I \subset k[P]$  is the ideal corresponding to  $z$  then the homomorphism  $k[Q] \rightarrow k[P]_I$  is flat. The preimage of  $m_y$  under  $\mathbf{Z}[P] \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$  contains the set  $m_P = P \setminus P^*$ , hence  $m_P \subset I$  and we obtain that  $I$  contains  $J = k[m_P]$ . Note that the ideal  $J$  is prime as  $k[P]/J \xrightarrow{\sim} k[P^*]$  is a domain due to  $P^*$  being torsion free. Thus, the localization  $k[P]_J$  makes sense, and we obtain a flat homomorphism  $\psi: k[Q] \rightarrow k[P]_J$ .

It is proved in [Kato, 1988, 4.1], that if the homomorphisms  $K[\phi]: K[Q] \rightarrow K[P]$  are flat for any field  $K$  then  $\phi$  is integral. The proof consists of two parts. First one checks that  $\phi$  is injective, which is automatic in our case. This is the only argument in loc.cit. where a play with different fields is needed. We claim that the second part of the proof of the implication (iii)  $\implies$  (v) in [Kato, 1988, 4.1] works fine with a single field  $k$ , and, moreover, it suffices to only use that  $k[Q] \rightarrow k[P]_J$  is flat. Let us indicate how the argument in loc.cit. should be adjusted.

Assume that, as in the proof of [Kato, 1988, 4.1], we are given  $a_1, a_2 \in Q$  and  $b_1, b_2 \in P$  such that  $\phi(a_1)b_1 = \phi(a_2)b_2$ . Let  $S$  be the kernel of the homomorphism of  $k[Q]$ -modules  $k[Q] \oplus k[Q] \rightarrow k[Q]$  given by  $(x, y) \mapsto a_1x - a_2y$ . By the flatness, the kernel of  $k[P]_J \oplus k[P]_J \rightarrow k[P]_J$ ,  $(x, y) \mapsto \phi(a_1)x - \phi(a_2)y$  is generated by the image of  $S$ . Hence there exist representations  $b_1 = \sum_{i=1}^r \phi(c_i) \frac{f_i}{s}$  and  $b_2 = \sum_{i=1}^r \phi(d_i) \frac{f_i}{s}$  with  $c_i, d_i \in k[Q]$ ,  $f_i \in k[P]$ ,  $s \in k[P] \setminus J$ , and  $a_1c_i = a_2d_i$ . Moreover,

multiplying  $s$  and  $f_i$ 's by an appropriate unit  $u \in P^*$  we can assume that  $s = 1 + s'$  for  $s' \in \text{Span}_k(P \setminus \{1\})$ . Then  $b_1 + \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \lambda_\alpha t_\alpha = \sum_{1 \leq i \leq r} \phi(c_i) f_i$ , with  $\lambda_\alpha \in k^*$ , and the  $t_\alpha \in P$  pairwise distinct and distinct from  $b_1$ , so we see that there exist  $a_3 \in Q$ ,  $b \in P$ , and  $1 \leq i \leq r$ , such that  $a_3$  appears in  $c_i$ ,  $b$  appears in  $f_i$ , and  $b_1 = \phi(a_3)b$ . The remaining argument copies that of the loc.cit. verbatim, and one obtains in the end that  $\phi$  satisfies the condition (v) from [Kato, 1988, 4.1]. Thus,  $\phi$  is integral and we are done.  $\square$

Before going further, let us discuss an incarnation of saturated morphisms in (more classical) toroidal geometry.

**REMARK 3.6.6.** In toroidal geometry an analog of saturated morphisms was introduced by Abramovich and Karu in [Abramovich & Karu, 2000]. In the language of log schemes toroidal morphisms can be interpreted as log smooth morphisms  $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$  between log regular schemes (with the toroidal structure given by the triviality loci of the log structures). If  $f$  is a toroidal morphism as above then Abramovich-Karu called it weakly semistable when the following conditions hold:  $S$  is regular,  $f$  is locally equidimensional, and the fibers of  $f$  are reduced. Furthermore, they remarked that the equidimensionality condition is equivalent to flatness of  $f$  whenever  $S$  is regular, see [Abramovich & Karu, 2000, 4.6]. Thus, the weak semistability condition is nothing else but saturatedness of  $f$  and regularity of the target. In particular, saturated log smooth morphisms between log regular log schemes may be viewed as the generalization of weakly semistable morphisms to the case of an arbitrary log regular (or toroidal) base.

Now, we are going to prove the main result of §3.6.

**THEOREM 3.7.** Assume that  $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$  is a log smooth morphism such that  $(S, W)$  is log regular and  $S$  is universally  $\mathbf{Q}$ -resolvable (§3.3.3). Then there exists an alteration  $h: S' \rightarrow S$  such that  $S'$  is regular,  $W' = g^{-1}(W)$  is an snc divisor, and the fs base change  $f': (X', Z') \rightarrow (S', W')$  is a saturated morphism.

Recall that  $(X', Z') = (X, Z) \times_{(S, W)}^{\text{fs}} (S', W')$  and  $f'$  is log smooth because the saturation morphism is log smooth.

*Proof.* By VIII-3.4.9, applying to  $(S, W)$  an appropriate saturated log blow up tower and replacing  $(X, Z)$  with the fs base change we can achieve that  $S$  is regular and  $W$  is normal crossings. By an additional sequence of log blow ups we can also make  $W$  snc (see VIII-4.1.6), so  $(S, W)$  becomes a Zariski log scheme. Now, we can étale-locally cover  $f$  by charts  $f_i: (X_i, Z_i) \rightarrow (S_i, W_i)$  modeled on  $P_i \rightarrow Q_i$  such that  $S_i$  are open subschemes in  $S$ . By [Illusie et al., 2005, A.4.4, A.4.3], for each  $i$  there exists a morphism  $h_i: (S'_i, W'_i) \rightarrow (S_i, W_i)$  such that  $h_i$  is a composition of a Kummer morphism and a log blow up, and the fs base change of  $f_i$  is saturated. (Although the proof in loc.cit. is written in the context of log analytic spaces, it translates to our situation almost verbatim. The only changes are that we have to distinguish étale and Zariski topology on the base (in order to construct log blow ups), and  $h_i$  does not have to be log étale as there might be inseparable Kummer morphisms.)

Note that  $W'_i = h_i^{-1}(W_i)$ . In addition,  $S'_i \rightarrow S_i$  is a projective alteration by VIII-3.4.6. Extend each  $h_i$  to a projective alteration  $g_i: T_i \rightarrow S$ , and let  $h: S' \rightarrow S$  be a projective alteration that factors through each  $T_i$ . By the universal  $\mathbf{Q}$ -resolvability assumption we can enlarge  $S'$  so that it becomes regular and  $Z' = h^{-1}(Z)$  becomes

snc. We claim that  $h$  is as claimed. It suffices to check that the fs base change of each morphism  $f'_i: (X_i, Z_i) \rightarrow (S, W)$  is saturated. However, already the fs base change of  $f'_i$  to  $(T_i, g_i^{-1}(W))$  is saturated by the construction, hence so is its further base change to  $(S', W')$ .  $\square$

**REMARK 3.7.1.** Our proof is an easy consequence of [Illusie et al., 2005, A.4.4 and A.4.3]. The first cited result shows that (locally) any log smooth morphism can be made exact by an appropriate log blow up of the base. This result is somewhat analogous to the flattening theorem of Raynaud-Gruson. The second cited result shows that by a Kummer extension of the base one can (locally) saturate an exact log smooth morphism. It is somewhat analogous to the reduced fiber theorem of Bosch-Lütkebohmert-Raynaud ([Bosch et al., 1995]) which implies that if  $f: Y \rightarrow X$  is a finite type morphism between reduced noetherian schemes then there exists an alteration  $X' \rightarrow X$  such that the normalized base change  $f': \text{Nor}(Y \times_X X') \rightarrow X'$  has reduced fibers. Although the proof of the latter is far more difficult.

**3.8. Characteristic zero case.** Theorem 3.5 can be substantially strengthened when  $S$  is of characteristic zero, i.e., the morphism  $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$  factors through  $\text{Spec}(\mathbf{Q})$ .

**THEOREM 3.9.** Assume that  $S$  is a reduced, noetherian, qe scheme of characteristic zero,  $f: X \rightarrow S$  is a maximally dominating morphism of finite type with reduced source, and  $Z \subset X$  is a nowhere dense closed subset. Then there exist projective modifications  $a: S' \rightarrow S$  and  $b: X' \rightarrow X$  with regular sources, a pseudo-projective morphism  $f': X' \rightarrow S'$  compatible with  $f$ , and snc divisors  $W' \subset S'$  and  $Z' \subset X'$  such that  $Z' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$  and the morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth.

*Proof.* The proof is very close to the proof of Theorem 3.5, so we will just say which changes in that proof should be made. First, we note that any  $S$ -scheme  $Y$  of finite type is noetherian and qe. Thus, if  $Y$  is reduced and  $T \subset Y$  is a nowhere dense closed subset then the pair  $(Y, T)$  can be desingularized by [Temkin, 2008b] in the following sense: there exists a projective modification  $h: Y' \rightarrow Y$  with regular source and such that  $h^{-1}(T)$  is an snc divisor. This result replaces the  $l'$ -resolvability assumption in Theorem 3.5, and it allows to apply the proof of that theorem to our situation with the only changes that one always uses projective modifications instead of projective  $l'$ -alterations, and Theorem 3.4 is replaced with Lemma 3.9.1 below. (Note that Lemma 3.9.1 is weaker than Theorem 3.9, while Theorem 3.4 does not follow from Theorem 3.5.)  $\square$

**LEMMA 3.9.1.** Let  $S$  be an integral, noetherian, qe scheme with generic point  $\eta = \text{Spec}(K)$ , let  $f: X \rightarrow S$  be a maximally dominating morphism of finite type, and let  $Z \subset X$  be a nowhere dense closed subset. Assume that  $X_\eta = X \times_S \eta$  is a smooth curve over  $K$ , and  $Z_\eta = Z \times_S \eta$  is étale over  $K$ . Then there exist projective modifications  $a: S' \rightarrow S$  and  $b: X' \rightarrow X$  with regular sources, a pseudo-projective morphism  $f': X' \rightarrow S'$  compatible with  $f$  and snc divisors  $W' \subset S'$  and  $Z' \subset X'$  such that  $Z' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$  and the morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth.

*Proof.* The proof copies the proof of Theorem 3.4 with the only difference that instead of an  $l$ -Sylow subgroup  $G \subseteq \overline{G}$  one simply takes  $G = \overline{G}$ . The latter is

possible because the schemes are of characteristic zero and hence any action of  $\overline{G}$  is tame.  $\square$

Combining Theorem 3.9 and 3.7 we obtain the following weak semistable reduction theorem.

**THEOREM 3.10.** Assume that  $S$  is a reduced, noetherian, qc scheme of characteristic zero,  $f: X \rightarrow S$  is a maximally dominating morphism of finite type with reduced source, and  $Z \subset X$  is a nowhere dense closed subset. Then there exists an alteration  $S' \rightarrow S$ , a modification  $X' \rightarrow X \times_S S'$  of the proper transform of  $X$ , a pseudo-projective morphism  $f': X' \rightarrow S'$  compatible with  $f$ , and divisors  $W' \subset S'$  and  $Z' \subset X'$  such that  $S'$  is regular,  $W'$  is snc,  $Z' = b^{-1}(Z) \cup f'^{-1}(W')$ , and the morphism  $(X', Z') \rightarrow (S', W')$  is log smooth and saturated (i.e.  $X' \rightarrow S'$  is weakly semistable).

**REMARK 3.10.1.** (i) In the case when  $X$  and  $S$  are integral proper varieties over an algebraically closed field  $k$  of characteristic zero, this theorem becomes the weak semistable reduction theorem of Abramovich-Karu. Our proof has many common lines with their arguments. In particular, the first step of their proof was to make  $f$  toroidal, and it was based on de Jong's theorem. (Note also that in a recent work [Abramovich et al., 2010] of Abramovich-Denef-Karu, the toroidalization theorem was extended to separated schemes of finite type over an arbitrary ground field of characteristic zero.) Our Theorem 3.9 can be viewed as a generalization of the toroidalization theorem of Abramovich-Karu.

(ii) The second stage in the proof of the weak semistable reduction theorem of Abramovich-Karu (the combinatorial stage) is analogous to Theorem 3.7. It obtains as an input a toroidal morphism  $f: (X, Z) \rightarrow (S, W)$  between proper varieties of characteristic zero and outputs an alteration  $h: S' \rightarrow S$  such that  $S'$  is regular,  $W' = h^{-1}(W)$  is snc, and the saturated base change of  $f$  is weakly semistable. The proof is similar to the arguments used in the proofs of [Illusie et al., 2005, A.4.4 and A.4.3]. First, one constructs a toroidal blow up of the base that makes the fibers equidimensional (i.e. makes the log morphism integral), and then an appropriate normalized finite base change is used to make the fibers reduced.



## EXPOSÉ XI

### Produits orientés

Luc Illusie

On fixe un univers  $\mathcal{U}$ . Sauf mention du contraire, les sites (resp. topos) considérés seront des  $\mathcal{U}$ -sites (resp. topos), et « petit » signifiera  $\mathcal{U}$ -petit.

#### 1. Construction des produits orientés

La construction suivante est due à Deligne [Laumon, 1983] :

**1.1.** Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos. On suppose que  $X, Y, S$  ont des sites de définition  $C_1, C_2, D$ , admettant des limites projectives finies, et associés à des prétopologies, et que  $f^*, g^*$  prolongent des foncteurs continus entre sites, et commutant aux limites projectives finies. Soit  $C$  le site suivant :

(i)  $C$  est la catégorie des couples de morphismes  $U \rightarrow V \leftarrow W$  au-dessus de  $X \rightarrow S \leftarrow Y$ , où  $U \rightarrow V$  (resp.  $V \leftarrow W$ ) désigne un morphisme  $U \rightarrow f^*V$  (resp.  $g^*V \leftarrow W$ ) de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) et  $V$  est un objet de  $D$ .

(ii)  $C$  est muni de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes  $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  ( $i \in I$ ) du type suivant :

(a)  $V_i = V, W_i = W$  pour tout  $i$ , et la famille  $(U_i \rightarrow U)$  est couvrante ;

(b)  $U_i = U, V_i = V$  pour tout  $i$ , et la famille  $(W_i \rightarrow W)$  est couvrante ;

(c)  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ , où  $U' = U$  et  $W' \rightarrow W$  est déduit par changement de base d'un morphisme  $V' \rightarrow V$  de  $D$ .

On note  $\tilde{C}$  le topos des faisceaux sur  $C$ .

**LEMME 1.2.** Soit  $F$  un préfaisceau sur  $C$ . Pour que  $F$  soit un faisceau il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) pour toute famille couvrante  $(Z_i \rightarrow Z)$  de  $C$  du type (a) ou (b), la suite  $F(Z) \rightarrow \prod_{i \in I} F(Z_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} F(Z_i \times_Z Z_j)$  est exacte ;

(ii) pour toute famille couvrante  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  du type (c), l'application

$$F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U' \rightarrow V' \leftarrow W')$$

est bijective. En particulier, si l'on note  $(-)^a$  le foncteur faisceau associé, pour toute famille couvrante  $(Z' \rightarrow Z)$  du type (c), le morphisme de faisceaux associés  $Z'^a \rightarrow Z^a$  est un isomorphisme.

La nécessité est triviale pour (i), et pour (ii), il suffit d'observer que le morphisme diagonal

$$(U \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W')$$

est un morphisme couvrant (du type (c)), qui égalise la double flèche

$$(U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W') \rightrightarrows (U \rightarrow V' \leftarrow W').$$

Pour la suffisance, on note que les familles couvrantes  $(Z_i \rightarrow Z)$  de type (a), (b), ou (c) sont stables par changement de base  $Z' \rightarrow Z$ , et on applique [SGA 4 II 2.3].

**1.3.** Notons  $e_X$  (resp.  $e_Y, e_S$ ) l'objet final de  $C_1$  (resp.  $C_2, D$ ). On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{C} \rightarrow X, p_2 : \tilde{C} \rightarrow Y$$

données par

$$p_1^*(U) = (U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y), p_2^*(W) = (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W).$$

On a par ailleurs un morphisme canonique

$$\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$$

donné par le morphisme de foncteurs  $\tau : (gp_2)_* \rightarrow (fp_1)_*$  défini de la façon suivante : pour un faisceau  $F$  sur  $C$ , et un objet  $V$  de  $S$ ,

$$\tau : ((gp_2)_*F)(V) \rightarrow ((fp_1)_*F)(V)$$

est le composé

$$F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y),$$

où la première flèche est induite par la localisation  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)$ , et la seconde est l'inverse de l'isomorphisme donné par **1.2**, relativement au morphisme de type (c)  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$ .

**THÉORÈME 1.4.** Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X, b : T \rightarrow Y$  et d'un morphisme  $t : gb \rightarrow fa$ . Il existe alors un triplet  $(h : T \rightarrow \tilde{C}, \alpha : p_1h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2h \xrightarrow{\sim} b)$ , unique à isomorphisme unique près, tel que le composé

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2h \xrightarrow{\tau} fp_1h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à  $t$ .

Nous aurons besoin, pour la démonstration, du lemme suivant :

**LEMME 1.5.** Soit  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  un objet de  $C$ . Avec la notation de **1.2**, le carré suivant est cartésien :

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccc} Z^a & \longrightarrow & (p_2^*W)^a \\ \downarrow & & \downarrow v \\ (p_1^*U)^a & \xrightarrow{u} & ((gp_2^*)V)^a \end{array} .$$

Dans ce carré,  $v$  et les flèches issues de  $Z^a$  sont les flèches évidentes, et  $u$  est la flèche composée

$$(p_1^*U)^a \longrightarrow ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2^*)V)^a ,$$

où  $\tau$  est le composé

$$(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a \xrightarrow{r^{-1}} (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \longrightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a ,$$

$r$  désignant l'isomorphisme  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \xrightarrow{\sim} (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a$  de **1.2**.

Soit  $z : Z \rightarrow Z' = (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)$  la projection canonique. Le composé  $Z \rightarrow p_1^*U \rightarrow (fp_1)^*V$  se factorise à travers  $z$ . Par suite, et par définition de  $\tau$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z^a & \xrightarrow{z} & Z'^a \\ \downarrow & & \downarrow r \\ (p_1^*U)^a & \longrightarrow & ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^*V)^a \end{array}$$

est commutatif. Comme le composé  $Z \rightarrow p_2^*W \rightarrow (gp_2)^*W$  se factorise aussi à travers  $z$ , le carré 1.a est donc commutatif. Celui-ci est le pourtour du diagramme suivant, où les flèches autres que  $\tau$  sont les flèches évidentes :

$$\begin{array}{ccccc} (f^*U \rightarrow V \rightarrow g^*W)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*W)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*W)^a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (f^*U \rightarrow V \rightarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a \\ \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow \text{Id} \\ (f^*U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \xrightarrow{\tau} & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a \end{array}$$

Chacun des carrés qui le composent est cartésien. Il en est donc de même de 1.a.

**1.6.** Prouvons 1.4. On peut supposer que  $a$  et  $b$  sont donnés par des morphismes de sites, la topologie du site de définition de  $T$  étant moins fine que la topologie canonique (d'après [SGA 4 IV 4.9.4], on pourrait prendre  $T$  lui-même comme site de définition, avec sa topologie canonique). Par 1.5 l'unicité est claire : pour  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  dans  $C$ , on doit avoir

$$(1.a) \quad h^*Z = a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W,$$

où  $a^*U \rightarrow (gb)^*V$  est le composé  $a^*U \rightarrow (fa)^*V \xrightarrow{t} (gb)^*V$ . Les isomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors tautologiques, nous les négligerons dans le reste de la démonstration. Vérifions que le foncteur  $h^*$  donné par 1.a définit un morphisme de topos  $h$  vérifiant la propriété énoncée en 1.4. Comme  $h^*$  commute aux limites projectives finies, pour vérifier que  $h^*$  induit un morphisme de topos, il suffit de vérifier que  $h^*$  est continu ([SGA 4 IV 4.9.1, 4.9.2]). Il est trivial que  $h^*$  transforme familles couvrantes du type (a) ou (b) en familles couvrantes. Par ailleurs, si  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  est une famille couvrante du type (c), le carré

$$\begin{array}{ccc} b^*W' & \longrightarrow & b^*W \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gb)^*V' & \longrightarrow & (gb)^*V \end{array}$$

est cartésien, et par suite

$$a^*U \times_{(gb)^*V'} b^*W' \rightarrow a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W$$

est un isomorphisme. Il reste à vérifier que  $\tau$  induit  $t$ . Mais par définition, le morphisme de faisceaux défini par  $h^*(\tau)$  appliqué à  $V$  est le composé

$$((fa)^*V)^a \xrightarrow{r^{-1}} ((fa)^*V \times_{(gb)^*V} (gb)^*V)^a \longrightarrow ((gb)^*V)^a,$$

donc est égal à celui défini par  $t$  appliqué à  $(fa)^*V$ , ce qui achève la démonstration.

**DÉFINITION 1.7.** Le topos  $\tilde{C}$  construit en 1.1 s'appelle le *produit orienté (gauche)* de  $X$  et  $Y$  au-dessus de  $S$ , et se note  $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ . Les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

sont reliés par la 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ . Il découle de 1.4 que le quadruplet  $(X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y, p_1, p_2, \tau)$  est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix des sites de définition  $C_1, C_2, D$ .

On définit de même le produit orienté droit  $X \overset{\rightarrow}{\times}_S Y$ , avec ses projections canoniques  $p_1 : X \overset{\rightarrow}{\times}_S Y \rightarrow X$ ,  $p_2 : X \overset{\rightarrow}{\times}_S Y \rightarrow Y$  et la 2-flèche  $\tau' : fp_1 \rightarrow gp_2$ , qui possède la propriété universelle de 1.4, avec  $X$  et  $Y$  échangés.

**1.8.** Désignons par  $pt$  un topos ponctuel (catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace réduit à un point). Soient  $x : pt \rightarrow X$ ,  $y : pt \rightarrow Y$  des points de  $X$  et  $Y$  respectivement, et  $u : gy \rightarrow fx$  une 2-flèche. Par 1.4, le triplet  $(x, y, u)$  définit un point  $z : pt \rightarrow X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  tel que  $p_1 z \simeq x$ ,  $p_2 z \simeq y$ . Ce point sera noté  $(x, y, u)$  (ou parfois  $(x, y)$  s'il n'y a pas de confusion à craindre). Tout point de  $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  est de cette forme.

**1.9.** Considérons un diagramme de 1-morphismes de topos

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & S' & \xleftarrow{g'} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array}$$

et des 2-flèches  $a : hf' \rightarrow fu$ ,  $b : gv \rightarrow hg'$ . Notons  $T = X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ ,  $T' = X' \overset{\leftarrow}{\times}_{S'} Y'$ ,  $p_1 : T \rightarrow X$ ,  $p_2 : T \rightarrow Y$ ,  $p'_1 : T' \rightarrow X'$ ,  $p'_2 : T' \rightarrow Y'$  les projections canoniques,  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ ,  $\tau' : g'p'_2 \rightarrow f'p'_1$  les 2-flèches canoniques. Considérons la 2-flèche composée

$$c : gvp'_2 \xrightarrow{b} hg'p'_2 \xrightarrow{\tau'} hf'p'_1 \xrightarrow{a} fup'_1.$$

D'après 1.4,  $c$  définit un diagramme de 1-morphismes

$$(1.b) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{p'_1} & T' & \xrightarrow{p'_2} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow t & & \downarrow v \\ X & \xleftarrow{p_1} & T & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

et des 2-isomorphismes  $\alpha : p_1 t \xrightarrow{\sim} u p'_1$ ,  $\beta : p_2 t \xrightarrow{\sim} v p'_2$  rendant commutatif le carré

$$(1.c) \quad \begin{array}{ccc} g p_2 t & \xrightarrow{\tau} & f p_1 t \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ g v p'_2 & \xrightarrow{a \tau' b} & f u p'_1 \end{array}$$

On dit que le triplet  $(t, \alpha, \beta)$  (ou simplement  $t : T' \rightarrow T$ ) de 1.b est déduit de 1.a par *fonctorialité*. On notera

$$t = u \times_h v.$$

On a une compatibilité évidente pour un composé de deux données 1.a.

**1.10.** Voici quelques exemples.

(a) Dans la situation de 1.4, le triplet  $(a, b, t)$  définit un diagramme de type 1.a

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\text{Id}} & T & \xleftarrow{\text{Id}} & T \\ \downarrow a & & \downarrow f a & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array},$$

avec  $t : g b \rightarrow f a$ , d'où un morphisme

$$a \times_{f a} b : T \times_T T \rightarrow X \times_S T.$$

Par ailleurs, d'après 1.4, les flèches identiques de  $T$  définissent un morphisme canonique, dit *diagonal*

$$\Delta : T \rightarrow T \times_T T.$$

La 1-flèche  $h$  de 1.4 est la composée

$$h = (a \times_{f a} b) \Delta : T \rightarrow X \times_S Y.$$

En particulier, prenant pour  $T$  un topos ponctuel, de sorte que  $\Delta$  est un isomorphisme, on a, avec les notations de 1.8

$$(x, y, u) = x \times_{f x} y : p t \rightarrow X \times_S Y.$$

(b) Dans la situation de 1.7, soient  $X', S', Y'$  des objets de  $X, S, Y$  respectivement, et  $f' : X' \rightarrow S'$ , (resp.  $g' : Y' \rightarrow S'$ ) une flèche au-dessus de  $f$  (resp.  $g$ ), i. e. une flèche  $f' : X' \rightarrow f^*(S')$ , (resp.  $g' : Y' \rightarrow g^*(S')$ ). Notons  $X' \times_{S'} Y'$  l'objet  $(X' \rightarrow S' \leftarrow Y') = p_1^*(X') \times_{(g p_2)^*(S')} p_2^* Y'$  de  $X \times_S Y$ , cf. 1.5, On en déduit un diagramme 2-commutatif de 1- flèches naturelles

$$(1.a) \quad \begin{array}{ccccc} & & (X \times_S Y)_{/(X' \times_{S'} Y')} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ X_{/X'} & \xrightarrow{\quad} & S_{/S'} & \xleftarrow{\quad} & Y_{/Y'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & Y \end{array},$$

où la notation  $(-)/_{-}$  désigne un topos localisé. D'après 1.4, la partie supérieure de 1.a définit un 1-morphisme

$$(1.b) \quad m : (X \times_S^{\leftarrow} Y)_{/(X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y')} \rightarrow X_{/X'} \times_{S/S'}^{\leftarrow} Y_{/Y'}.$$

Il résulte de 1.a que  $m$  est une équivalence, par laquelle, dans la suite, nous identifierons les deux membres. D'autre part, les carrés 2-commutatifs de 1.a définissent, d'après 1.9, une flèche de functorialité

$$X_{/X'} \times_{S/S'}^{\leftarrow} Y_{/Y'} \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y,$$

Celle-ci, ou son composé avec  $m$ ,

$$(1.c) \quad (X \times_S^{\leftarrow} Y)_{/(X' \times_{S'}^{\leftarrow} Y')} \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$$

s'appelle *flèche de localisation*.

**PROPOSITION 1.11.** *Supposons que  $X'$  soit l'objet final de  $X$  et que  $g'$  soit cartésien au-dessus de  $g$ , i. e.  $g' : Y' \xrightarrow{\sim} g^*(S')$ . Alors la flèche 1.c est une équivalence.*

En effet, avec les notations de 1.a, il résulte de 1.2 que la flèche  $e_X \times_S^{\leftarrow} Y' \rightarrow e_X \times_{e_S}^{\leftarrow} e_Y$  de  $X \times_S^{\leftarrow} Y$  est un isomorphisme.

**1.12.** Considérons en particulier le cas où  $S = Y$  est un schéma muni de la topologie étale,  $g = \text{Id}$  et  $f : X \rightarrow S = Y$  est l'inclusion d'un sous-schéma fermé de  $Y$ . Le topos  $T = X \times_Y^{\leftarrow} Y$  joue le rôle d'un *voisinage tubulaire étale* de  $Y$  dans  $X$ . Les points de  $T$  sont les triplets  $(x, y, t)$ , où  $x$  (resp.  $y$ ) est un point géométrique de  $X$  (resp.  $Y$ ) et  $t : y \rightarrow x$  une flèche de spécialisation (cf. [SGA 4 VIII 7.9]). En d'autres termes,  $(x, y, t)$  est la donnée d'un point géométrique  $x$  de  $X$ , d'une généralisation  $y_0$  du point fermé (noté encore par abus  $x$ ) du localisé strict  $X_{(x)}$  de  $X$  en  $x$  et d'un point géométrique de  $X_{(x)}$  localisé en  $y_0$ , ou encore d'une extension séparablement close  $y \rightarrow y_0$  du point générique de  $\overline{\{y_0\}}$ . Par ailleurs, si  $v : Y' \rightarrow Y$  est un voisinage étale de  $X$  dans  $Y$ , i. e. un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ & \nearrow & \downarrow v \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où  $v$  est étale, alors, d'après 1.11 le morphisme canonique

$$X \times_{Y'}^{\leftarrow} Y' \rightarrow X \times_Y^{\leftarrow} Y$$

est une équivalence. Ainsi,  $T$  ne dépend que du hensélisé de  $X$  le long de  $Y$  (lorsque celui-ci est défini, en particulier, pour  $Y$  affine, cf. [Raynaud, 1970]). Nous verrons au numéro suivant et dans l'exposé XII d'autres propriétés de  $T$  précisant cette analogie avec un voisinage tubulaire.

## 2. Tubes et changement de base

**2.1.** Soit  $(S, s)$  un topos ponctué, i. e. un couple formé d'un topos  $S$  et d'un point  $s : \text{pt} \rightarrow S$  de  $S$ . Si  $(S, s)$  et  $(T, t)$  sont des topos ponctuéés, un morphisme (ponctué) de  $(S, s)$  dans  $(T, t)$  est un couple  $(f, a)$  d'un morphisme  $f : S \rightarrow T$  et d'une 2-flèche  $a : fs \rightarrow t$ . Une 2-flèche  $c : (f, a) \rightarrow (g, b)$  est une 2-flèche  $c : f \rightarrow g$

telle que  $b(cs) = a$ . Si  $(S, s)$  est un topos ponctué, on note  $F \mapsto F_s = s^*F$  le foncteur fibre en  $s$ .

Rappelons qu'un topos ponctué  $(S, s)$  est dit *local de centre  $s$*  ([SGA 4 VI 8.4.6]) si, pour tout objet  $F$  de  $S$ , la flèche naturelle  $\Gamma(S, F) \rightarrow F_s$  est bijective. Un morphisme  $(f, a) : (S, s) \rightarrow (T, t)$  de topos ponctué est dit *local* si la 2-flèche  $a : fs \rightarrow t$  est un isomorphisme.

**2.2.** La construction qui suit est due à Gabber. Soit  $(S, s)$  un topos local de centre  $s$ . Notons  $\varepsilon : S \rightarrow \text{pt}$  la projection. Par définition la flèche canonique  $\varepsilon_* \rightarrow s^*$  est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme

$$(2.a) \quad \varepsilon^* \varepsilon_* \xrightarrow{\sim} (s\varepsilon)^*.$$

La flèche d'adjonction  $\varepsilon^* \varepsilon_* \rightarrow \text{Id}$  s'identifie donc, par 2.a, à un morphisme  $(s\varepsilon)^* \rightarrow \text{Id}$ , i. e. à une 2-flèche

$$(2.b) \quad c_s : \text{Id} \rightarrow s\varepsilon$$

entre les 1-morphismes  $\text{Id} : S \rightarrow S$  et  $s\varepsilon : S \rightarrow S$ . Si  $F$  est un objet de  $S$ ,  $(s\varepsilon)^*F$  est le faisceau constant sur  $S$  de valeur  $F_s = \varepsilon_*F = \Gamma(S, F)$ . Si  $U$  est un objet connexe de  $S$ , le morphisme  $(s\varepsilon)^*F \rightarrow F$  induit sur  $\Gamma(U, -)$  le morphisme de restriction  $\Gamma(S, F) \rightarrow \Gamma(U, F)$ . Le composé  $c_s s : s \rightarrow s$  est l'identité :  $(s\varepsilon)^*F \rightarrow F$  induit l'identité sur les fibres en  $s$ .

Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $x : \text{pt} \rightarrow X$  un point de  $X, s = fx : \text{pt} \rightarrow S$  son image dans  $S$ . Le diagramme

$$(2.c) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xrightarrow{\text{Id}} & \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow s & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y \end{array},$$

(où le carré de gauche est 2-commutatif) et la 2-flèche

$$(2.d) \quad c_s g : g \rightarrow s\varepsilon g$$

sont une donnée de type 1.a. Pour un objet  $F$  de  $S, (s\varepsilon g)^*F$  est le faisceau constant sur  $Y$  de valeur  $F_s = \Gamma(S, F)$ , et la flèche  $(s\varepsilon g)^*F \rightarrow g^*F$  est la composée  $\Gamma(S, F)_Y \rightarrow \Gamma(Y, g^*F)_Y \rightarrow g^*F$ . Notons que, par 1.4, le produit orienté  $\text{pt} \overset{\leftarrow}{\times}_{\text{pt}} Y$  s'identifie canoniquement à  $Y$ , avec  $p_1 = \text{Id} : Y \rightarrow Y$ . De 2.c et 2.d on déduit donc un diagramme de type 1.b :

$$(2.e) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y & \xrightarrow{\text{Id}} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow \sigma & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array},$$

en d'autres termes, une section  $\sigma : Y \rightarrow X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  de  $p_2$  telle que  $p_1 \sigma = x\varepsilon g$ . On peut voir cette section comme étant définie, via 1.4 par le couple de morphismes  $x\varepsilon g : Y \rightarrow X, \text{Id} : Y \rightarrow Y$  et la 2-flèche  $c_s g : g \rightarrow fx\varepsilon g = s\varepsilon g$ . On dit que  $\sigma$  est la *section canonique* définie par le point  $x$ . Par composition avec  $p_{2*}$ , la flèche d'adjonction  $\text{Id} \rightarrow \sigma_* \sigma^*$  donne une flèche canonique

$$(2.f) \quad \gamma : p_{2*} \rightarrow \sigma^*.$$

Le résultat suivant est dû à Gabber :

**PROPOSITION 2.3.** Soient  $f : (X, x) \rightarrow (S, s)$  un morphisme local de topos locaux ( $fx = s$ ), et  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de topos. Soit  $y : pt \rightarrow Y$  un point de  $Y$ . Pour tout objet  $F$  de  $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ ,  $\gamma(2.f)$  induit un isomorphisme

$$\gamma_y : (p_{2*}F)_y \xrightarrow{\sim} (\sigma^*F)_y.$$

Soit  $t = \sigma y : pt \rightarrow T$  le point de  $T = X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  image de  $y$  par  $\sigma$ . Ce point est défini (cf. 1.4) par le triplet  $(x, y, u)$ , où  $u : gy \rightarrow fx = fx\epsilon gy = s\epsilon gy = s$  est déduit de 2.d. On a  $(\sigma^*F)_y = F_t$ . Par définition,

$$F_t = \text{colim}_z F(U \rightarrow V \leftarrow W),$$

où  $z : pt \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  parcourt les voisinages de  $t$  dans  $T$ . Comme  $X$  et  $S$  sont locaux, les voisinages de  $t$  de la forme  $\sigma w : pt \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$ , où  $w : pt \rightarrow W$  est un voisinage de  $y$  dans  $Y$  forment un système cofinal. Donc

$$F_t = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où  $z = \sigma w : pt \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$  parcourt les voisinages précédents, avec  $U = e_X, V = e_S$ . Par ailleurs,

$$(p_{2*}F)_y = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où  $w : pt \rightarrow W$  parcourt les voisinages de  $y$  dans  $Y$ . La flèche  $\gamma_y$  est la restriction naturelle. C'est donc un isomorphisme.

**COROLLAIRE 2.3.1.** Sous les hypothèses de 2.3, si  $S$  a assez de points, en particulier, si  $S$  est localement cohérent ([SGA 4 VI 9.0]),  $\gamma(2.f)$  est un isomorphisme.

Il est plausible que l'hypothèse d'existence d'assez de points soit superflue. Celle-ci sera cependant satisfaite dans les applications que nous avons en vue.

**COROLLAIRE 2.3.2.** Sous les hypothèses de 2.3, supposons  $Y$  local de centre  $y$ . Alors  $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  est local de centre  $\sigma(y)$ .

En effet, on a alors  $(p_{2*}F)_y = \Gamma(Y, p_{2*}F) = \Gamma(X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y, F)$ , et  $\gamma_y$  s'identifie à la restriction  $\Gamma(X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y, F) \rightarrow F_{\sigma(y)}$ .

Notons que, si  $f : X \rightarrow S$  est un morphisme local de schémas strictement locaux,  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de schémas strictement locaux, le produit fibré schématique  $X \times_S Y$  n'est pas en général strictement local, ni même local, même si  $g$  est local.

Le résultat ci-après est dû également à Gabber :

**THÉORÈME 2.4.** Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $T = X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ ,  $p_1 : T \rightarrow X, p_2 : T \rightarrow Y$  les projections canoniques,  $\tau = gp_2 \rightarrow fp_1$  la 2-flèche canonique. On suppose  $X, Y, S$  cohérents et  $f, g$  cohérents ([SGA 4 VI 2.3, 2.4.5, 3.1]). Soit  $\Lambda$  un anneau. Alors, pour tout  $F \in D^+(Y, \Lambda)$ , la flèche de changement de base, déduite de  $\tau$ ,

$$(2.a) \quad f^*Rg_*F \rightarrow Rp_{1*}p_2^*F$$

est un isomorphisme (de  $D^+(X, \Lambda)$ ).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui généralise [Orgogozo, 2006, 9.1] :

**LEMME 2.5.** Sous les hypothèses de 2.4,  $T$  est cohérent, et les projections  $p_1, p_2$  sont des morphismes cohérents.



Le topos  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ) admet une (petite) famille génératrice  $C_1$  (resp.  $C_2$ , resp.  $D$ ) formée d'objets cohérents, stable par limites projectives finies ([SGA 4 VI 2.4.5]). Comme  $f$  et  $g$  sont cohérents,  $f^*V$  (resp.  $g^*V$ ) est cohérent si  $V$  est dans  $D$  ([SGA 4 VI 3.2]). La sous-catégorie pleine de  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ) correspondante, munie de la topologie induite, est un site de définition de  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ). Soit  $C$  la catégorie définie comme en 1.1, munie de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles finies de type (a) et (b) et les familles de type (c). Elle est stable par limites projectives finies, et est un site de définition de  $T$ . Il suffit donc de montrer que tout objet de  $C$  est quasi-compact ([SGA 4 VI 2.4.5]). Pour cela, notons  $\mathcal{P}$  la prétopologie définie en 1.1. Décrivons  $\mathcal{P}$ . Pour chaque objet  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  de  $C$ , notons  $\text{Cov}(Z)$  l'ensemble des familles  $(Z_i \rightarrow Z)_{i \in I}$  obtenues par composition d'un nombre fini de familles de type (c) et de familles (finies) de type (a) et (b). En particulier, l'ensemble  $I$  est fini. Par définition, la donnée des  $\text{Cov}(Z)$  vérifie les axiomes PT0, PT2 et PT3 de [SGA 4 II 1.3]. L'axiome PT1 (stabilité par changement de base) est également vérifié, les familles de type (c), ainsi que les familles finies de type (a) (resp. (b)) étant stables par changement de base, et le changement de base commutant à la composition des familles. La donnée des  $\text{Cov}(Z)$  est donc une prétopologie, et par définition, c'est la prétopologie  $\mathcal{P}$ . Comme les familles appartenant à  $\text{Cov}(Z)$  sont finies, tout objet de  $C$  est automatiquement quasi-compact, comme annoncé. La cohérence des projections  $p_1$  et  $p_2$  en découle.

REMARQUE 2.6. Gabber sait montrer que la conclusion de 2.5 vaut sous les seules hypothèses que  $X$ ,  $Y$ ,  $S$  et  $g$  sont cohérents. Nous n'aurons pas besoin de cette généralisation.

2.7. Prouvons 2.4. Comme  $X$  est cohérent, donc possède assez de points, il suffit de vérifier que, pour tout point  $x : \text{pt} \rightarrow X$  de  $X$ , la fibre en  $x$  de 2.a

$$(2.a) \quad (f^*Rg_*F)_x \rightarrow (Rp_{1*}p_2^*F)_x$$

est un isomorphisme. Soit  $s : \text{pt} \rightarrow S$  l'image de  $x$  par  $f$ . Soit  $X_{(x)}$  (resp.  $S_{(s)}$ ) le localisé de  $X$  (resp.  $S$ ) en  $x$  (resp.  $s$ ). Rappelons ([SGA 4 VI 8.4.2]) que  $X_{(x)}$  (resp.  $Y_{(y)}$ ) (noté  $\text{Loc}_x(x)$  (resp.  $\text{Loc}_s(S)$ ) dans *loc. cit.*) est la limite projective

$$X_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} X_{/U},$$

(resp.

$$S_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} S_{/V},$$

où  $U$  (resp.  $V$ ) parcourt la catégorie cofiltrante  $\text{Vois}(x)$  (resp.  $\text{Vois}(s)$ ) des voisinages de  $x$  (resp.  $s$ ) dans  $X$  (resp.  $S$ ). Comme  $X$  (resp.  $S$ ) est cohérent, on peut d'ailleurs se borner aux  $U$  (resp.  $V$ ) qui sont cohérents, les morphismes de transition étant alors automatiquement cohérents. C'est ce que nous ferons dans la suite, notant encore  $\text{Vois}(x)$  (resp.  $\text{Vois}(s)$ ) la sous-catégorie pleine formée des  $U$  (resp.  $V$ ) cohérents. Le topos  $X_{(x)}$  (resp.  $S_{(s)}$ ) est un topos local, au-dessus de  $X$  (resp.  $S$ ), dont l'image du centre est  $x$  (resp.  $s$ ) ([SGA 4 VI 8.4.6]). Le morphisme  $f$  induit un morphisme local  $f_{(x)} : X_{(x)} \rightarrow S_{(s)}$ . Définissons de même

$$T_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} T_{/p_1^*U},$$

$$Y_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} Y_{/g^*V},$$

de sorte qu'on obtient un carré

$$(2.b) \quad \begin{array}{ccc} T_{(x)} & \xrightarrow{p_2} & Y_{(s)} \\ \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ X_{(x)} & \xrightarrow{f} & S_{(s)} \end{array}$$

avec une 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ . Par la compatibilité de la formation des produits orientés à la localisation (1.b), la flèche

$$(2.c) \quad T_{(x)} \rightarrow X_{(x)} \overset{\leftarrow}{\times}_{S_{(s)}} Y_{(s)},$$

déduite de ce carré par 1.4 est une équivalence. D'après 2.5, les topos  $X_{/U}$ ,  $S_{/V}$ ,  $T_{/p_1^*U}$ ,  $Y_{/g^*V}$  sont cohérents, les flèches de transition des systèmes projectifs  $X_{/U}$ ,  $S_{/V}$  sont cohérents, et les morphismes  $g : Y_{/g^*V} \rightarrow S_{/V}$ ,  $p_1 : T_{/p_1^*U} \rightarrow X_{/U}$  sont cohérents. On est donc dans les conditions d'application de [SGA 4 VI 8.7.3], qui, compte tenu de ce que  $S_{(s)}$  et  $X_{(x)}$  sont locaux, implique que les flèches canoniques

$$(2.d) \quad (Rg_*F)_s \rightarrow R\Gamma(S_{(s)}, Rg_*F) \rightarrow R\Gamma(Y_{(s)}, F),$$

$$(2.e) \quad (Rp_{1*}p_2^*F)_x \rightarrow R\Gamma(X_{(x)}, Rp_{1*}p_2^*F) \rightarrow R\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F)$$

sont des isomorphismes. Avec les identifications 2.c, 2.d et 2.e, la flèche 2.a s'identifie à la fibre en  $x$  de la flèche de changement de base (déduite de  $\tau$ ) du carré 2.b. Cette flèche s'écrit

$$(2.f) \quad R\Gamma(Y_{(s)}, F) \rightarrow R\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F).$$

On a :

(\*) : La flèche 2.f s'identifie canoniquement à la flèche de functorialité définie par  $p_2$ .

Pour le vérifier, on peut supposer  $S$  et  $X$  locaux, de centres respectifs  $s$  et  $x$ , et  $f$  local. Par définition, 2.f est la flèche composée

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(S, Rg_*F) & \xrightarrow{2.f} & R\Gamma(T, p_2^*F) \\ \downarrow \alpha & & \uparrow \beta \\ R\Gamma(S, Rg_*Rp_{2*}p_2^*F) & \xrightarrow{R\Gamma(S, \tau)} & R\Gamma(S, Rf_*Rp_{1*}p_2^*F) \end{array}$$

où la flèche  $\alpha$  est définie par la flèche d'adjonction  $\text{adj} : F \rightarrow Rp_{2*}p_2^*F$  (et donc est la flèche de functorialité  $R\Gamma(Y, F) \rightarrow R\Gamma(T, p_2^*F)$  définie par  $p_2$ ), et  $\beta$  est l'isomorphisme canonique de transitivité relatif à  $fp_1 : T \rightarrow S$ . Or, par définition de  $\tau$  (1.3), pour tout faisceau  $G$  sur  $T$ , la flèche

$$\Gamma(S, \tau) : \Gamma(S, (gp_2)_*G) \rightarrow \Gamma(S, (fp_1)_*G)$$

est l'identité. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure du diagramme ci-dessus, ce qui prouve (\*). Il reste à prouver que 2.f est un isomorphisme. En fait, la flèche

$$(2.g) \quad \text{adj} : F \rightarrow Rp_{2*}p_2^*F$$

est un isomorphisme. Pour le voir, il suffit d'observer que, compte tenu de la description de  $\gamma$  donnée en 2.3.2, le composé

$$F \xrightarrow{\text{adj}} Rp_{2*}p_2^*F \xrightarrow{\gamma} \sigma^*p_2^*F = F,$$

où  $\sigma$  est la section de  $p_2$  définie en 2.e et  $\gamma$  l'isomorphisme de 2.3.1, est l'identité. Ceci achève la démonstration de 2.4.

**REMARQUES 2.8.** ((1)) Supposons que les données de 2.4 proviennent de morphismes de schémas, munis de la topologie étale, avec  $X, S, Y$  cohérents et  $f$  et  $g$  cohérents. Les points  $x, s$  sont des points géométriques, et les localisés  $X_{(x)}, S_{(s)}$  des localisés stricts. Si  $f$  est une immersion fermée, la flèche d'adjonction 2.g est un isomorphisme (on peut en effet supposer  $S$  strictement local, et il en est alors de même de  $X$ ). Supposons de plus que  $Y = S, g = \text{Id}_S$  comme en 1.12. On a vu en *loc. cit.* que  $T = X \times_S^{\leftarrow} S$  joue le rôle d'un voisinage tubulaire de  $X$  dans  $S$ . Soient  $j : S^* = S - X \rightarrow S$  l'ouvert complémentaire de  $X$ , et  $T^* = X \times_S^{\leftarrow} S^* = T_{/(e_X \rightarrow e_S \leftarrow S^*)}$  le topos induit. Alors  $T^*$  joue le rôle d'un *voisinage tubulaire épointé* de  $X$  dans  $S$  : pour  $F \in D^+(S^*, \Lambda)$ , on a, par 2.4,

$$f^* Rj_* F \xrightarrow{\sim} \text{Rp}_{1*} p_2^* F.$$

((2)) Sans l'hypothèse de cohérence sur  $g$ , la conclusion de 2.4 peut être en défaut, comme le montre l'exemple suivant, dû à Gabber. Soient  $X$  un espace topologique connexe, non vide,  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion d'un fermé non vide distinct de  $X$ ,  $j : U = X - Y \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Alors  $i^* j_* Z$  est non nul. Mais, si tout point de  $U$  a un voisinage dont l'adhérence dans  $X$  ne rencontre pas  $Y$ , alors le produit orienté  $Y \times_X^{\leftarrow} U$  est vide. C'est le cas par exemple, si  $X$  est le segment  $[0, 1]$  et  $Y$  le point  $\{0\}$ .

((3)) Sous les hypothèses de 2.4, on montre de manière analogue que :

(a) Pour tout faisceau d'ensembles  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* g_* F \rightarrow p_{1*} p_2^* F$$

est un isomorphisme.

On peut espérer des variantes non abéliennes supérieures :

(b) Pour tout faisceau en groupes  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* R^1 g_* F \rightarrow R^1 p_{1*} p_2^* F,$$

est un isomorphisme (de faisceaux d'ensembles pointés).

(c) Plus généralement, pour tout champ  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* g_* F \rightarrow p_{1*} p_2^* F$$

est une équivalence.

La vérification de (b) et (c) semble requérir, outre les techniques de réduction des champs aux gerbes de [Giraud, 1971, III 2.1.5], des résultats de passage à la limite pour la cohomologie non abélienne analogues à ceux de [SGA 4 VI 8.7], pour lesquels nous ne connaissons pas de référence.

((4)) Gabber sait démontrer la généralisation suivante de 2.4. Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $T = X \times_S^{\leftarrow} Y$ . On suppose que  $Y$  et  $S$  sont localement cohérents, et que, pour tout objet cohérent algébrique  $V$  de  $S$ ,  $g^* V$  est cohérent algébrique ([SGA 4 VI 2.1, 2.3]). Alors,

pour tout  $F \in D^+(Y, \Lambda)$ , la flèche de changement de base 2.a est un isomorphisme, et on devrait avoir des résultats analogues dans le cas non abélien, comme en (3) (a), (b), (c) ci-dessus. Gabber déduit ces résultats d'un théorème général de changement de base pour certains topos fibrés.

### 3. Produits fibrés

Les compléments donnés dans ce numéro et le suivant ne seront pas utilisés dans le reste du volume.

**3.1.** Les produits fibrés de topos ont été construits par Giraud [Giraud, 1972, 3.4]. La construction suivante est due à Gabber. Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos comme en 1.1. Soit  $D$  le site suivant :

- ((i)) La catégorie sous-jacente à  $D$  est la catégorie  $C$  considérée en 1.1 (i).
- ((ii))  $D$  est munie de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes  $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  ( $i \in I$ ) de la forme (a), (b), (c) de 1.1 (ii) et de la forme
  - (d)  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ , où  $W' = W$  et  $U' \rightarrow U$  est déduit par changement de base d'un morphisme  $V' \rightarrow V$  du site de définition de  $S$ .

En d'autres termes, la topologie sur  $D$  est la borne supérieure des topologies sur  $C$  définissant les produits orientés  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  et  $X \overrightarrow{\times}_S Y$ .

D'après 1.2, pour qu'un préfaisceau  $F$  sur  $D$  soit un faisceau, il faut et il suffit que  $F$  vérifie les conditions d'exactitude habituelles relatives aux familles couvrantes de type (a) et (b), et que, pour toute famille couvrante  $Z' \rightarrow Z$  de type (c) ou (d),  $F(Z) \rightarrow F(Z')$  soit un isomorphisme.

Soit  $\tilde{D}$  le topos des faisceaux sur  $D$ . On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{D} \rightarrow X, p_2 : \tilde{D} \rightarrow Y$$

données par les mêmes formules qu'en 1.3, et la construction de  $\tau$  en (*loc. cit.*) donne un *isomorphisme*

$$(3.a) \quad \varepsilon : gp_2 \xrightarrow{\sim} fp_1.$$

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X$ ,  $b : T \rightarrow Y$  et d'un isomorphisme  $t : gb \xrightarrow{\sim} fa$ . Il existe alors un triplet  $(h : T \rightarrow \tilde{D}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2 h \xrightarrow{\sim} b)$ , unique à isomorphisme unique près, tel que le composé*

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2 h \xrightarrow{\varepsilon} fp_1 h \xrightarrow{\alpha} fa$$

*soit égal à  $t$ .*

La démonstration est analogue à celle de 1.4. Le foncteur  $h^*$  est encore donné par la formule 1.a. Comme  $t$  est un isomorphisme, on a

$$a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W = a^*U \times_{(fa)^*V} b^*W,$$

où  $b^*V \rightarrow (fa)^*V$  est le composé  $b^*V \longrightarrow (gb)^*V \xrightarrow{t^{-1}} (fa)^*V$ . Il s'ensuit que  $h^*$  transforme famille couvrante de type (d) en famille couvrante, et l'on conclut comme dans 1.6.

DÉFINITION 3.3. Le topos  $\widetilde{D}$  s'appelle *produit fibré de X et Y au-dessus de S*, et se note  $X \times_S Y$ . Les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & X \times_S Y & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

sont reliés par le 2-isomorphisme  $\varepsilon : gp_2 \rightarrow fp_1$ .

EXEMPLES 3.4. ((1)) *Espaces topologiques*. Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des applications continues entre espaces topologiques. Alors le topos  $\widetilde{X \times_S Y}$  des faisceaux sur le produit fibré usuel  $X \times_S Y$  représente le produit fibré  $\widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Y}$  : le morphisme naturel  $\widetilde{X \times_S Y} \rightarrow \widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Y}$  est une équivalence. On définit en effet un quasi-inverse en observant que les ouverts de  $X \times_S Y$  de la forme  $U \times_V W$  forment une base.

((2)) *Schémas*. Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de schémas. Désignons par l'indice zar (resp. ét) le topos zariskien (resp. étale) associé. Du fait de (1), le morphisme naturel  $(X \times_S Y)_{zar} \rightarrow X_{zar} \times_{S_{zar}} Y_{zar}$  n'est pas une équivalence en général. De même, le morphisme naturel  $(X \times_S Y)_{ét} \rightarrow X_{ét} \times_{S_{ét}} Y_{ét}$  n'est pas une équivalence en général, même si  $X, Y, S$  sont les spectres de corps : si  $S = \text{Spec} k, S_{ét}$  est équivalent au topos classifiant BG du groupe profini  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ , où  $\bar{k}$  est une clôture séparable de  $k$ , et la formation de BG commute aux produits fibrés.

#### 4. Topos évanescents et co-évanescents

4.1. Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos comme en 1.1. Le produit orienté

$$(4.a) \quad X \overleftarrow{\times}_S S,$$

où  $S \rightarrow S$  est le morphisme identique, s'appelle le *topos évanescent* de  $f$ . Il est étudié dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006]. Le produit orienté

$$(4.b) \quad S \overleftarrow{\times}_S Y,$$

où  $S \rightarrow S$  est le morphisme identique, joue un rôle important dans les travaux de Faltings sur les théorèmes de comparaison p-adiques et la correspondance de Simpson p-adique (*topos de Faltings*) (cf. [Faltings, 2002], [Faltings, 2005], [Abbes & Gros, 2011a], [Deligne, 1995], [Abbes & Gros, 2011b]). On propose ici de l'appeler *topos co-évanescent* de  $g$ . Du topos évanescent de  $\text{Id}_S$ ,

$$(4.c) \quad \overleftarrow{S} = S \overleftarrow{\times}_S S,$$

qui est aussi le topos co-évanescent de  $\text{Id}_S$ , les produits orientés  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  se déduisent par changement de base. Considérons en effet le produit fibré itéré

$$(4.d) \quad Z = X \times_S \overleftarrow{S} \times_S Y,$$

où la flèche de gauche (resp. droite) de  $\overleftarrow{S}$  vers  $S$  est  $p_1$  (resp.  $p_2$ ). On a des projections naturelles  $q_1 : Z \rightarrow X$ ,  $q_2 : Z \rightarrow Y$  et  $m : Z \rightarrow \overleftarrow{S}$ , avec des isomorphismes  $p_1 m \xrightarrow{\sim} f q_1$ ,  $g q_2 \xrightarrow{\sim} p_2 m$ . Par composition avec la flèche structurale  $\tau : p_2 \rightarrow p_1$  de  $\overleftarrow{S}$ , on en déduit une flèche  $z : g q_2 \rightarrow f p_1$ . D'après 1.4, le triplet  $(q_1, q_2, z)$  définit donc une flèche

$$(4.e) \quad h : Z \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} Y$$

et des isomorphismes  $p_1 h \xrightarrow{\sim} q_1$ ,  $p_2 h \xrightarrow{\sim} q_2$ , par lesquels  $z$  s'identifie à  $\tau h$ , où  $p_1, p_2$  désignent les projections canoniques de  $X \times_S^{\leftarrow} Y$  sur  $X$  et  $Y$ .

PROPOSITION 4.2. *Le morphisme  $h$  (4.e) est un isomorphisme. En particulier, il définit des isomorphismes canoniques*

$$(4.a) \quad X \times_S^{\leftarrow} \overleftarrow{S} \xrightarrow{\sim} X \times_S^{\leftarrow} S,$$

$$(4.b) \quad \overleftarrow{S} \times_S Y \xrightarrow{\sim} S \times_S^{\leftarrow} Y.$$

Il suffit de montrer que  $Z$ , muni de  $(q_1, q_2, z)$  vérifie la propriété universelle du produit orienté. Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X$ ,  $b : T \rightarrow Y$ , et d'une 2-flèche  $t : g b \rightarrow f a$ . Par la propriété universelle de  $\overleftarrow{S}$ , on en déduit d'abord un unique triplet, formé d'un morphisme  $k : T \rightarrow \overleftarrow{S}$  et d'isomorphismes  $p_1 k \rightarrow f a$ ,  $p_2 k \rightarrow g b$  tels que  $t = \tau k$  modulo ces identifications. Puis, par la propriété universelle des produits fibrés, on en déduit un unique quadruplet formé d'un morphisme  $s : T \rightarrow Z$  et d'isomorphismes  $m s \xrightarrow{\sim} k$ ,  $q_1 s \xrightarrow{\sim} a$ ,  $q_2 s \xrightarrow{\sim} b$  tel que  $z s = t$  modulo ces identifications.

4.3. Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de topos. D'après 1.4, les morphismes  $\text{Id}_X$  et  $f$  définissent un morphisme

$$(4.a) \quad \Psi : X \rightarrow X \times_S^{\leftarrow} S$$

tel que

$$(4.b) \quad p_1 \Psi = \text{Id}_X, p_2 \Psi = f, \tau \Psi = \text{Id}_f,$$

où  $\tau : p_2 \rightarrow p_1$  est la 2-flèche structurale de  $X \times_S^{\leftarrow} S$  :

$$(4.c) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{Id}_X \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times_S^{\leftarrow} S & \xrightarrow{p_2} & S \\ & \searrow f & & \swarrow \text{Id}_S & \\ & & S & & \end{array}$$

Le foncteur  $\Psi_*$  s'appelle *foncteur cycles proches*. Pour un objet  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  du site  $\mathcal{C}$  définissant  $X \times_S^{\leftarrow} S$ , on a  $\Psi^*(U \rightarrow V \leftarrow W) = U \times_V W$ , où  $U \times_V W := U \times_{f^*(V)} f^* W$ . Si  $\Lambda$  est un anneau et  $F \in D^+(X, \Lambda)$ , le complexe  $R\Psi_* F \in D^+(X \times_S^{\leftarrow} S, \Lambda)$  (noté aussi  $R\Psi F$ ) s'appelle *complexe des cycles proches* (de  $f$  relatif à  $F$ ).

L'identité  $p_{1*} \Psi_* = \text{Id}$  définit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.d) \quad p_1^* \rightarrow \Psi_*.$$

Pour  $F \in D^+(X, \Lambda)$ , le cône du morphisme  $p_1^*F \rightarrow R\Psi F$  qui s'en déduit s'appelle le *complexe des cycles évanescents* (de  $f$  relatif à  $F$ ) et se note  $R\Phi F$ . Dans le cas des schémas (munis de la topologie étale), ces foncteurs, qui généralisent les foncteurs  $R\Psi$  et  $R\Phi$  de Grothendieck ([SGA 7 I, XIII]), sont étudiés dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006].

Considérons le morphisme de changement de base

$$(4.e) \quad p_{1*} \rightarrow \Psi^*$$

déduit de l'identité  $p_1\Psi = \text{Id}_X$ , en d'autres termes, le morphisme déduit, par application de  $p_{1*}$ , de la flèche d'adjonction  $\text{Id} \rightarrow \Psi_*\Psi^*$ , compte tenu de ce que  $p_{1*}\Psi_* = \text{Id}$ . Le résultat suivant est donné sans démonstration dans [Laumon, 1983] :

**PROPOSITION 4.4.** *Le morphisme 4.e est un isomorphisme.*

On va définir un morphisme

$$(4.a) \quad \Psi^* \rightarrow p_{1*},$$

dont on montrera qu'il est inverse de 4.e. Pour cela, on définit un morphisme

$$(4.b) \quad \text{Id} \rightarrow \Psi_*p_{1*}$$

de la façon suivante. Pour un faisceau  $F$  sur  $X \times_S^{\leftarrow} S$  et un objet  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  du site  $\mathcal{C}$  de 1.1, la flèche  $F(Z) \rightarrow (\Psi_*p_{1*}F)(Z)$  est la composée

$$(4.c) \quad F(Z) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S),$$

où  $W \rightarrow W$  est l'identité, la première flèche est la restriction et la seconde, l'inverse de l'isomorphisme relatif au recouvrement de type (c)

$$(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow (U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S).$$

Le morphisme 4.a est adjoint de 4.b. Notons  $u$  (resp.  $v$ ) le morphisme 4.e (resp. 4.a). On va montrer que  $u$  et  $v$  sont inverses l'un de l'autre. L'argument qui suit est dû à Orgogozo. Il s'agit de montrer que, pour tout faisceau  $F$  sur  $X \times_S^{\leftarrow} S$  et tout faisceau  $G$  sur  $X$ , les applications  $\alpha(F, G) = \text{Hom}(u(F), G) : \text{Hom}(\Psi^*F, G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*}F, G)$  et  $\beta(F, G) = \text{Hom}(v(F), G) : \text{Hom}(p_{1*}F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi^*F, G)$  sont inverses l'une de l'autre.

L'application

$$\alpha(F, G) : \text{Hom}(\Psi^*F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_*G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*}F, G)$$

envoie  $a : F \rightarrow \Psi_*G$  sur  $p_{1*}a : p_{1*}F \rightarrow p_{1*}\Psi_*G = G$ . L'application  $a$  est la donnée d'une famille compatible d'applications  $a_{(U \rightarrow V \leftarrow W)} : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$ , pour  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  parcourant les objets de  $\mathcal{C}$ , "compatible" voulant dire compatible aux flèches de restriction. L'application  $\alpha(a)$  est la famille  $\alpha_{(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} : F(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S) \rightarrow G(U)$ ,  $U$  parcourant les objets de  $\mathcal{X}$ .

L'application

$$\beta(F, G) : \text{Hom}(p_{1*}F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi_*F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_*G)$$

envoie  $b : p_{1*}F \rightarrow G$  sur le composé  $F \rightarrow \Psi_*p_{1*}F \rightarrow \Psi_*G$ , où la première flèche est 4.b et la seconde  $\Psi_*b$ . L'application  $\beta(b)$  est la famille  $\beta_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}(b) : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$  est la composée de 4.c et de

$$(\Psi_*b)(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) : F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) = (p_{1*}F)(U \times_V W) \rightarrow G(U \times_V W).$$

Pour chaque  $\alpha : F \rightarrow \Psi_*G$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(U \rightarrow V \leftarrow W) & \xrightarrow{\alpha_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}} & G(U \times_V W) \\ \downarrow & & \uparrow \alpha_{(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} \\ F(U \times_V W \rightarrow W \leftarrow W) & \longrightarrow & F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) \end{array},$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme figurant dans 4.c. Dans ce diagramme, le composé des flèches autres que la flèche horizontale supérieure est  $\beta\alpha_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}$ , donc  $\beta\alpha = \text{Id}$ . La vérification de  $\alpha\beta = \text{Id}$  est triviale également.

**REMARQUE 4.5.** Lorsque les topos  $X$  et  $S$  sont localement cohérents, donc en particulier dans le cas des schémas, on peut prouver 4.4 plus simplement, en se ramenant au cas local. Comme  $X$  a assez de points, il suffit de montrer que, pour tout point  $x : \text{pt} \rightarrow X$ , et tout faisceau  $F$  sur  $X \times_S^{\leftarrow} S$ , la fibre en  $x$  de 4.e, est un isomorphisme. Quitte à remplacer  $X$  par son localisé en  $x$  (cf. 1.a), on peut supposer  $X$  local de centre  $x$ . Soit  $s : \text{pt} \rightarrow S$  l'image de  $x$  par  $f$ . Soit  $F$  un faisceau sur  $T = X \times_S^{\leftarrow} S$ . On doit montrer que

$$(p_{1*}F)_x = \Gamma(T, F) \rightarrow (\Psi_*F)_x = F_{(x,s)}$$

est un isomorphisme. Soient  $S_{(s)}$  le localisé de  $S$  en  $s$  et  $T_{(s)} = T \times_{S_{(s)}}^{\leftarrow} S_{(s)}$ . D'après les résultats de passage à limite invoqués dans 2.7, on a

$$\Gamma(T_{(s)}, F) = \text{colim} \Gamma(T_U, F),$$

où  $U$  parcourt les voisinages cohérents de  $s$  et  $T_U = X \times_{S_U}^{\leftarrow} S_U$ . D'après 1.11, les flèches de restriction  $\Gamma(T, F) \rightarrow \Gamma(T_U, F)$  sont des isomorphismes. On peut donc supposer  $S$  local de centre  $s$ . D'après 2.3.2,  $T$  est alors local, de centre  $(x, s)$ , et  $\Gamma(T, F) = F_{(x,s)} = (\Psi_*F)_x$ .

**4.6.** Soit  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de topos. Les faisceaux sur le topos co-évanescant  $T = S \times_S^{\leftarrow} Y$  (4.b ont une description simple, due à Deligne [Deligne, 1995]. Pour un faisceau  $F$  sur  $T$ , la flèche de restriction  $F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U \rightarrow U \rightarrow U \times_V W)$  est un isomorphisme. Cela suggère de considérer le site  $C_0$  suivant. La catégorie  $C_0$  est celle des flèches  $(V \leftarrow W)$  au-dessus de  $f : Y \leftarrow S$ , i. e. des flèches  $W \rightarrow g^*V$  de  $Y$ . On munit  $C_0$  de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes des types (a) et (b) ci-après :

- (a)  $(V \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$ , où la famille  $(W_i \rightarrow W)_{i \in I}$  est couvrante,
- (b)  $(V_i \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$ , où la famille  $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$  est couvrante, et  $W_i = V_i \times_V W$ .

On montre ([Abbes & Gros, 2011b, 4.10]) que  $C_0$  est un site de définition de  $T$ . Un objet  $F$  de  $S \times_S^{\leftarrow} Y$ , décrit comme un faisceau sur  $C_0$ , s'interprète comme la donnée d'une famille de faisceaux  $F_V : W \mapsto F(V \leftarrow W)$  sur  $g^*V$  et de flèches de restriction  $F_V \rightarrow j_{V/V'}^* F_{V'}$  pour  $V' \rightarrow V$ , définissant  $j_{V/V'} : g^*V' \rightarrow g^*V$ , satisfaisant la condition de descente que, pour une famille couvrante  $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ , la suite

$$F_V \rightarrow \prod_i j_{V_i/V}^* F_{V_i} \rightrightarrows \prod_{ii'} j_{V_{ii'}/V}^* F_{V_{ii'}}$$



soit exacte, où  $V_{ii'} = V_i \times_V V_{i'}$ . D'après 1.4, les morphismes  $g : Y \rightarrow S$  et  $\text{Id}_Y$  définissent un morphisme

$$(4.a) \quad \Psi : Y \rightarrow S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$$

tel que

$$(4.b) \quad p_1 \Psi = g, p_2 \Psi = \text{Id}_Y, \tau \Psi = \text{Id}_g,$$

où  $\tau : gp_2 \rightarrow p_1$  est la 1-flèche structurale de  $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  :

$$(4.c) \quad \begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & g \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow \text{Id}_Y & \\ S & \xleftarrow{p_1} & S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow \text{Id}_S & & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array} .$$

Le foncteur  $\Psi_*$ , qu'on pourrait appeler *foncteur cycles co-proches*, se comporte de manière très différente du foncteur cycles proches de 4.a. En effet, de l'identité  $p_2 \Psi = \text{Id}_Y$  on déduit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.d) \quad p_2^* \rightarrow \Psi_*,$$

analogue de 4.d, et l'on a :

PROPOSITION 4.7. *Le morphisme 4.d est un isomorphisme.*

En particulier, *le foncteur  $\Psi_*$  est exact*. Ici, c'est la flèche de changement de base, déduite de l'identité  $p_2 \Psi = \text{Id}_Y$ ,

$$(4.a) \quad p_{2*} \rightarrow \Psi^*,$$

analogue de 4.e, qui n'est pas, en général, un isomorphisme. On peut donner de 4.7 une démonstration analogue à celle de 4.4. Il est plus simple de déduire ce résultat des descriptions explicites suivantes des foncteurs  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $\Psi$  et du morphisme  $\tau$ . Ces descriptions sont dues à Deligne [Deligne, 1995].

4.8. (a) *Description de  $p_1^*$* . On a  $p_1^*V = (V \leftarrow g^*V)$  (l'objet  $(V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$  de  $C$  correspondant à l'objet  $(V \leftarrow g^*V)$  de  $C_0$ ). Si  $F$  est un faisceau sur  $S$ ,  $p_1^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est la limite inductive des  $F(V')$  suivant la catégorie des flèches  $(V \leftarrow W) \rightarrow p_1^*V'$ . Cette catégorie ayant  $(V \leftarrow W) \rightarrow (V \leftarrow g^*V)$  pour objet initial, cette limite est égale à  $F(V)$ . En d'autres termes,  $p_1^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est  $F(V)$ . Dans la description donnée plus haut d'un faisceau sur  $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  en termes d'une famille de faisceaux sur les  $g^*V$ ,  $p_1^*F$  est la famille des faisceaux constants  $G_V$  sur  $g^*V$  de valeur  $F(V)$ .

(b) *Description de  $p_2^*$* . On a  $p_2^*W = (e_S \leftarrow W)$ . Si  $F$  est un faisceau sur  $Y$ ,  $p_2^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est la limite inductive des  $F(W')$  suivant la catégorie des flèches  $(V \leftarrow W) \rightarrow p_2^*W'$ . Cette catégorie ayant  $(V \leftarrow W) \rightarrow (e_S \leftarrow W)$  pour objet initial, cette limite est égale à  $F(W)$ . En d'autres termes,  $p_2^*F$  est la famille des faisceaux  $H_V$  sur  $g^*V$ , où  $H_V$  est le faisceau  $W \mapsto F(W)$ .

(c) *Description de  $\tau$ .* Si  $F$  est un faisceau sur  $S$ , le morphisme  $\tau : p_1^*F \rightarrow (gp_2)^*F$  est déduit du morphisme de préfaisceaux qui, pour  $(V \leftarrow W)$  dans  $C_0$ , envoie  $F(V)$  dans  $(gp_2)^*F(V \leftarrow W) = (g^*F)(W)$  par le morphisme composé  $F(V) \rightarrow (g^*F)(g^*V) \rightarrow (g^*F)(W)$ . On le voit à l'aide de (a) et (b), en explicitant le morphisme  $(fp_1)^* \rightarrow (gp_2)^*$  adjoint du morphisme  $\tau$  décrit en 1.3.

(d) *Description de  $\Psi_*$ .* Si  $F$  est un faisceau sur  $Y$ , et  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  un objet de  $C$ , on a  $(\Psi_*F)(U \rightarrow V \leftarrow W) = F(U \times_V W)$ . Dans la description de  $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  à l'aide du site  $C_0$ , on a donc

$$(\Psi_*F)(V \leftarrow W) = F(W).$$

Compte tenu de (b), on a donc

$$\Psi_*F = p_2^*F$$

Cette identification est celle donnée par 4.d, ce qui prouve 4.7.

Notons encore que les points de  $T = S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$  sont les flèches  $s \leftarrow y$ , où  $s$  (resp.  $y$ ) est un point de  $S$  (resp.  $Y$ ), et que, pour un faisceau  $F$  sur  $Y$ , si  $(s \leftarrow y)$  est un point de  $T$ , on a

$$(p_2^*F)_{(s \leftarrow y)} = F_y = (\Psi_*F)_{(s \leftarrow y)}.$$

REMARQUE 4.9. Comme l'observe Gabber, l'isomorphisme 4.d implique le théorème de changement de base 2.4 pour  $X = S$ ,  $f = \text{Id}_S$  sans hypothèse de cohérence sur  $S$ ,  $Y$ , et  $g$ .

## Descente cohomologique orientée

Fabrice Orgogozo

### 1. Acyclicité orientée des morphismes propres

**1.1.** L'objet de cette section est de démontrer le théorème **1.2.1** ci-dessous, qui généralise l'invariance par éclatement admissible du voisinage tubulaire défini à l'aide du produit fibré orienté (cf. **XI-1.7** et **XI-2.8**). Avant d'énoncer le théorème, fixons quelques notations. On considère un schéma  $S$  cohérent,  $g : Y \rightarrow S$ ,  $\pi : S' \rightarrow S$ , et  $a : X \rightarrow S'$  des morphismes de schémas avec  $\pi$  propre et  $a$  cohérent. À ces données sont associés :

- le morphisme composé  $b = \pi \circ a$  ;
- le morphisme  $g' : Y' \rightarrow S'$  déduit de  $g$  par le changement de base  $\pi$ , où  $Y' = Y \times_S S'$ , et le morphisme de projection  $\rho : Y' \rightarrow Y$  ;
- les topos  $\mathbb{T} = Y \times_S^{\leftarrow} X$  et  $\mathbb{T}' = Y' \times_{S'}^{\leftarrow} X$  tels que définis en *loc. cit.* par produits orientés des topos étales associés aux schémas considérés, ainsi enfin que le morphisme  $\overleftarrow{\rho} : \mathbb{T}' \rightarrow \mathbb{T}$  déduit par functorialité des morphismes  $\rho$  et  $\pi$  (**XI-1.9**).

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xleftarrow{\rho} & Y' \\
 g \downarrow & \square & \downarrow g' \\
 S & \xleftarrow{\pi} & S' \xleftarrow{a} X \\
 & \xleftarrow{b} & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \mathbb{T}' = Y' \times_{S'}^{\leftarrow} X \\
 \downarrow \overleftarrow{\rho} \\
 \mathbb{T} = Y \times_S^{\leftarrow} X
 \end{array}$$

### 1.2. Énoncés.

**THÉORÈME 1.2.1.** *Sous les hypothèses du 1.1, le morphisme  $\overleftarrow{\rho}$  est acyclique pour les faisceaux de torsion : pour tout entier  $n \geq 1$  et tout objet  $\mathcal{K}$  de  $\mathbf{D}^+(\mathbb{T}, \mathbf{Z}/n)$ , le morphisme d'adjonction  $\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R}\overleftarrow{\rho}_* \overleftarrow{\rho}^* \mathcal{K}$  est un isomorphisme.*

**THÉORÈME 1.2.2.** *Sous les hypothèses du 1.1, le morphisme  $\overleftarrow{\rho}$  est 1-acyclique pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbb{T}$ , le 2-morphisme d'adjonction  $\mathcal{C} \rightarrow \overleftarrow{\rho}_* \overleftarrow{\rho}^* \mathcal{C}$  est une équivalence de catégories.*

### 1.3. Démonstrations.

**1.3.1. Réductions.** Soit  $\mathcal{K}$  comme dans l'énoncé **1.2.1**. Notons  $\mathcal{K}'$  son image inverse  $\overleftarrow{\rho}^* \mathcal{K}$  sur  $\mathbb{T}'$ . Le topos  $\mathbb{T}$  est cohérent, cf. **XI-2.5**. Il a donc assez de points ([SGA 4 VI 9.0]) et ceux-ci sont comme décrits en **XI-1.8**, c'est-à-dire associés à une paire de points (géométriques)  $(y, x)$  de  $Y$  et  $X$  et à une spécialisation  $b(x) \rightsquigarrow g(y)$ . En calculant la fibre du morphisme  $\mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R}\overleftarrow{\rho}_* \overleftarrow{\rho}^* \mathcal{K}$  en un tel point, on vérifie comme en **XI-2.4** que l'on peut supposer  $Y, X, S$  et  $g$  locaux (pour la topologie étale), de sorte que le topos  $\mathbb{T}$  l'est également (cf. **XI-2.1**, **XI-2.3.2**).

Sous ces hypothèses supplémentaires, il nous faut montrer que le morphisme d'adjonction (image inverse)

$$\alpha : R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$$

est isomorphisme. Considérons les projections  $p'_1, p_1, p_2$  et  $p'_2$  telles que ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xleftarrow{p'_1} T' = Y' \overset{\leftarrow}{\times}_{S'} X & \\ \rho \downarrow & \swarrow \overleftarrow{p} \downarrow & \searrow p'_2 \\ Y & \xleftarrow{p_1} T = Y \overset{\leftarrow}{\times}_S X & \xrightarrow{p_2} X \end{array}$$

de sorte qu'on a en particulier l'égalité tautologique  $R\Gamma(T', \mathcal{K}') = R\Gamma(Y', R p'_{1*} \mathcal{K}')$ .

**1.3.2.** *Cas où le complexe  $\mathcal{K}$  provient du schéma  $X$ .* Supposons qu'il existe un complexe  $\mathcal{G} \in D^+(X, \mathbf{Z}/n)$  tel que

$$\mathcal{K} = p_2^* \mathcal{G}.$$

Par commutativité du triangle de droite ci-dessus, on a également  $\mathcal{K}' = p_2'^* \mathcal{G}$ . Le but  $R\Gamma(Y', R p'_{1*} \mathcal{K}')$  du morphisme d'adjonction  $\alpha$  est donc le complexe  $R\Gamma(Y', R p'_{1*} p_2'^* \mathcal{G})$ , lui-même isomorphe, d'après **XI-2.4** à  $R\Gamma(Y', g'^* R a_* \mathcal{G})$ . Par propriété de  $\alpha$  et le théorème de changement de base propre, le morphisme d'adjonction

$$R\Gamma(Y, g^* R \pi_* R a_* \mathcal{G}) \rightarrow R\Gamma(Y, R \rho_* g'^* R a_* \mathcal{G}) = R\Gamma(Y', g'^* R a_* \mathcal{G})$$

est un isomorphisme. Les schémas  $Y$  et  $S$  étant locaux pour la topologie étale et  $g$  étant un morphisme local, on a successivement  $R\Gamma(Y, g^* R \pi_* R a_* \mathcal{G}) = R\Gamma(S, R b_* \mathcal{G})$  et  $R\Gamma(S, R b_* \mathcal{G}) = \mathcal{G}_x$ , où  $x$  est le point de  $X$  évident. Enfin, le topos  $T$  et le morphisme  $p_2$  étant locaux également, on a  $\mathcal{G}_x = R\Gamma(T, \mathcal{K}) = \mathcal{K}_t$ . Nous avons exprimé la flèche  $\alpha$  comme composée de morphismes d'adjonction qui sont des isomorphismes. CQFD.

**1.3.3.** *Cas général.* On ne suppose dorénavant plus que  $\mathcal{K}$  se descend à  $X$ . Considérons cependant le complexe  $\mathcal{G} = \sigma^* \mathcal{K}$ , où  $\sigma$  est la section du morphisme  $p_2$  définie en **XI-2.2**. (Si  $\mathcal{K}$  se descend, on retrouve le complexe  $\mathcal{G}$  ci-dessus.) D'après **XI-2.3**, le morphisme d'adjonction  $R p_{2*} \mathcal{K} \rightarrow \sigma^* \mathcal{K}$  est un isomorphisme, de sorte que la source  $\mathcal{K}_t = R\Gamma(T, \mathcal{K}) = R\Gamma(X, R p_{2*} \mathcal{K})$  du morphisme d'adjonction  $\alpha$  est isomorphe à  $R\Gamma(X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}_x = \overleftarrow{\mathcal{G}}_t$  où l'on pose  $\overleftarrow{\mathcal{G}} = p_2^* \mathcal{G}$ . En d'autres termes, la coüinité  $\overleftarrow{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{K}$  de l'adjonction induit un isomorphisme sur les sections globales du topos local  $T = Y \overset{\leftarrow}{\times}_S X$ . D'après ce qui précède (cas où  $\mathcal{K}$  se descend), le morphisme d'adjonction  $R\Gamma(T, \overleftarrow{\mathcal{G}}) \rightarrow R\Gamma(T', \overleftarrow{\mathcal{G}}')$  est un isomorphisme, où  $\overleftarrow{\mathcal{G}}'$  désigne le tiré en arrière par  $p'_1$  de  $\overleftarrow{\mathcal{G}}$  sur le topos  $T'$ . Il serait donc suffisant de montrer que le morphisme  $c : R p'_{1*} \overleftarrow{\mathcal{G}}' \rightarrow R p'_{1*} \mathcal{K}'$  est un isomorphisme car en appliquant le foncteur  $R\Gamma(Y', -)$  on obtient le morphisme  $R\Gamma(T', \overleftarrow{\mathcal{G}}') \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$  déduit de la coüinité. Par propriété de  $\pi$  donc de  $Y'$  sur  $Y$ , il suffit même de montrer que la restriction de  $c$  à la fibre spéciale  $Y'_y$  est un isomorphisme. C'est ce que nous allons vérifier. (On utilise ici le théorème de changement de base propre pour les faisceaux de torsion.) Soient donc  $y'$  un point (« géométrique ») de  $Y'_y$ ,  $s'$  son image dans  $S'$  et calculons la fibre en  $y'$  du morphisme  $c$ . Notons  $Y''$  et  $S''$  les localisés  $Y'_{(y')}$  et  $S'_{(s')}$  ainsi que  $X''$  le produit fibré  $X \times_{S'} S''$ . La fibre en  $y'$  d'une image directe par  $p'_1$  s'identifie à la cohomologie du topos  $T'' = Y'' \overset{\leftarrow}{\times}_{S''} X''$  (à valeurs dans

le tiré en arrière). Si  $\sigma''$  désigne la section canonique (XI-2.2) de la seconde projection  $p_2'' : T'' \rightarrow X''$ , on a un isomorphisme canonique (XI-2.3)

$$R\Gamma(T'', -) = R\Gamma(X'', \sigma''^* -).$$

Il en résulte qu'il suffit de montrer que la coùinité  $\overleftarrow{\mathcal{G}}'' \rightarrow \mathcal{K}''$  devient un isomorphisme après application du foncteur  $\sigma''$ , où l'on note  $\mathcal{K}''$  et  $\overleftarrow{\mathcal{G}}''$  les tirés en arrière sur  $T''$ . Ceci résulte immédiatement de la transitivité des images inverses et de l'égalité  $\sigma p_2 p \sigma'' = p \sigma''$  où  $p$  désigne le morphisme  $T'' \rightarrow T$ . Cette égalité résulte à son tour du fait que le morphisme  $Y'' \rightarrow Y$  est *local*.

**1.3.4. Cas non abélien.** La démonstration est identique. Pour le théorème de changement de base propre non abélien, on fait appel à [Giraud, 1971, VII.2.2.2]. Signalons que, comme signalé en XI-2.8 (3) nous n'avons pas connaissance d'une référence publiée permettant de justifier le passage à la limite nécessaire au calcul des fibres.

## 2. Descente cohomologique orientée

### 2.1. Topologie orientée des altérations.

**2.1.1.** Soient  $S$  un schéma noethérien et  $\mathcal{B}$  la catégorie des diagrammes de schémas noethériens  $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$  et des morphismes rendant les carrés commutatifs. Considérons le pseudo-foncteur de  $\mathcal{B}$  vers la 2-catégorie des topos, qui envoie l'objet précédent sur le produit fibré orienté  $Y \times_S^{\leftarrow} X$ , où l'on note abusivement  $Y$  pour  $Y_{\text{ét}}$ , etc. Remarquons que les limites finies (resp. les coproduits) existent (resp. existent et sont disjoints, universels) dans la catégorie  $\mathcal{B}$ ; ils se calculent « terme à terme ». Par exemple, le produit fibré de  $X_1 \rightarrow S_1 \leftarrow Y_1$  et  $X_2 \rightarrow S_2 \leftarrow Y_2$  au-dessus de  $X \rightarrow S \leftarrow Y$  est  $(X_1 \times_X X_2) \rightarrow (S_1 \times_S S_2) \leftarrow (Y_1 \times_Y Y_2)$ .

**2.1.2.** On considère la topologie orientée des altérations sur  $\mathcal{B}$  engendrée par les familles ci-dessous :

- ((i))  $((X \rightarrow S \leftarrow Y_i) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{i \in I'}$ , où  $(Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  est une famille alt-couvrante ;
- ((ii))  $((X_i \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{i \in I'}$ , où  $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$  est une famille alt-couvrante ;
- ((iii))  $((X \times_S S_i \rightarrow S_i \leftarrow Y \times_S S_i) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{i \in I'}$ , où  $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$  est une famille alt-couvrante ;
- ((iv))  $((X \rightarrow S' \leftarrow Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$ , où  $S' \rightarrow S$  est un morphisme propre ;
- ((v))  $((X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$ , où  $S' \rightarrow S$  est un morphisme étale.

Remarquons que les propriétés des familles de morphismes (i-v) sont stables par changement de base dans la catégorie  $\mathcal{B}$ .

### 2.2. Énoncés.

**THÉORÈME 2.2.1.** Soit  $(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$  un hyperrecouvrement pour la topologie orientée des altérations, c'est-à-dire un objet simplicial de  $\mathcal{B}$  au-dessus de  $(X \rightarrow S \leftarrow Y)$  tel que pour tout entier  $i \geq 0$ , le morphisme canonique  $(X_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \leftarrow Y_{i+1}) \rightarrow (\text{cosq}_i(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet))_{i+1}$  de la catégorie  $\mathcal{B}$  soit couvrant pour la topologie orientée des altérations. Sous cette hypothèse, et si l'on note  $\overleftarrow{\varepsilon} : T_\bullet = Y_\bullet \times_S^{\leftarrow} X_\bullet \rightarrow T = Y \times_S^{\leftarrow} X$  le morphisme d'augmentation, on a les résultats de descente suivants :

- (i) pour tout complexe de torsion borné inférieurement  $\mathcal{K}$  sur  $Y \overleftarrow{\times}_S X$ , le morphisme d'adjonction  $\mathcal{K} \rightarrow R \overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{K}$  est un isomorphisme.
- (ii) pour tout champ  $\mathcal{C}$  ind-fini sur  $Y \overleftarrow{\times}_S X$ , le morphisme d'adjonction  $\mathcal{C} \rightarrow \overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{C}$  est une équivalence.

**2.2.2.** En d'autres termes, le morphisme  $\overleftarrow{\varepsilon}$  est de descente cohomologique pour les faisceaux de torsion et les champs ind-finis. Pour le sens à donner à l'énoncé (ii), on renvoie à [Giraud, 1971] (spécialement chap. VII, §2.2) et [Orgogozo, 2003], §2.

**2.2.3.** La principale application que nous ferons du théorème précédent est la formule de changement de base suivante.

**THÉORÈME 2.2.4.** Soient  $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$  un diagramme de schémas noethériens et  $\varepsilon : S_\bullet \rightarrow S$  un hyperrecouvrement pour la topologie des altérations. Notons  $f_\bullet : X_\bullet = X \times_S S_\bullet \rightarrow S_\bullet$  et  $g_\bullet : Y_\bullet = X \times_S S_\bullet \rightarrow S_\bullet$  (resp.  $\varepsilon_Y : Y_\bullet = Y \times_S S_\bullet \rightarrow Y$ ) les hyperrecouvrements pour la topologie des altérations (resp. pour la topologie orientée des altérations) qui s'en déduisent.

- (i) Pour tout complexe de torsion borné inférieurement  $\mathcal{K}$  sur  $X$ , le morphisme

$$g^* Rf_* \mathcal{K} \rightarrow R\varepsilon_{Y*} (g_\bullet^* Rf_{\bullet*} \mathcal{K}|_{X_\bullet})$$

est un isomorphisme.

- (ii) Pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$  sur  $X$ , le morphisme

$$g^* f_* \mathcal{C} \rightarrow \varepsilon_{Y*} (g_\bullet^* f_{\bullet*} \mathcal{C}|_{X_\bullet})$$

est un isomorphisme.

**2.3. Démonstration du théorème 2.2.1.** Nous commençons par démontrer le (i). Pour la variante non abélienne (ii), cf. 2.3.8.

**2.3.1. Réductions.** D'après la théorie générale de la descente — cf. p. ex. [Deligne, 1974, 5.3.5] —, il suffit de démontrer le théorème pour les hyperrecouvrements correspondant à un 0-cosquelette associé à une des familles de morphismes du type (i) à (v) (2.1.2). De plus, et pour la même raison, on peut se contenter du cas particulier où les familles alt-couvrantes apparaissant dans la description de recouvrement sont, soit un recouvrement ouvert de Zariski, soit un morphisme propre et surjectif. Il suffit donc de démontrer les cinq propositions suivantes, où l'on fixe un objet  $(X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y)$  de  $\mathcal{B}$ . Rappelons que  $f$  est automatiquement cohérent. Dans les paragraphes ci-dessous, on reprend les notations de l'énoncé. En particulier, on note  $T$  le topos  $Y \overleftarrow{\times}_S X$ , on fixe un entier  $n \geq 1$ , un complexe  $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(T, \mathbf{Z}/n)$  et on note  $\overleftarrow{\varepsilon}$  le morphisme du topos simplicial  $T_\bullet$  vers  $T$ . On veut montrer que la flèche d'adjonction

$$\alpha : \mathcal{K} \rightarrow R \overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{K} = R \overleftarrow{\varepsilon}_* \mathcal{K}_\bullet$$

est un isomorphisme.

**2.3.2. Famille de type (i) :**  $(X \rightarrow S \leftarrow Y') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . Soit  $Y' \rightarrow Y$  un morphisme couvrant pour la topologie de Zariski ou bien propre et surjectif, et  $Y_\bullet = \text{cosq}_0^Y(Y')$  son cosquelette. Par passage aux fibres, on peut supposer les schémas  $X, Y$  et  $S$  ainsi que morphisme  $g : Y \rightarrow S$  locaux. Comme on l'a déjà dit, le topos  $T$  est alors un topos local. Si  $Y' \rightarrow Y$  est Zariski couvrant, il possède alors une section. Il en est donc de même du morphisme  $T' = Y' \overleftarrow{\times}_S X \rightarrow T$ , auquel cas le

résultat est connu (cf. [SGA 4 V bis 3.3.1]). Supposons donc le morphisme  $Y' \rightarrow Y$  propre et surjectif. La flèche  $\alpha$  s'identifie au morphisme

$$\mathcal{K}_t = R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T_\bullet, \mathcal{K}_\bullet) = R\Gamma(Y_\bullet, \text{Rp}_{1\bullet*} \mathcal{K}_\bullet).$$

Reprenons les notations de 1.3.1. Par descente cohomologique classique, l'adjonction  $\mathcal{K}_t = R\Gamma(Y, \text{Rp}_{1*} \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(Y_\bullet, (\text{Rp}_{1*} \mathcal{K})_\bullet)$  est un isomorphisme. Par propriété de  $\rho : Y' \rightarrow Y$ , il nous suffit de montrer que la restriction au-dessus de  $y$  de l'adjonction

$$\beta : (\text{Rp}_{1*} \mathcal{K})_\bullet \rightarrow \text{Rp}_{1\bullet*} \mathcal{K}_\bullet$$

est un isomorphisme. En effet, le théorème de changement de base propre nous dit que la source et le but de  $\alpha$  se calculent par restriction aux fibres spéciales. Que  $\beta_y$  soit un isomorphisme résulte immédiatement du lemme ci-dessous (i), appliqué aux schémas  $Z = Y_i$ .

LEMME 2.3.3. Soient  $X \rightarrow S, Y \rightarrow S$  et  $Z \rightarrow S$  des morphismes cohérents.

(i) Soit  $\gamma : Z \rightarrow Y$  un morphisme cohérent. Notons  $\overleftarrow{\gamma} : Z \times_S X \rightarrow Y \times_S X$  le morphisme induit. Le morphisme d'adjonction

$$\gamma^*(\text{Rp}_{1*}^Y \mathcal{K}) \rightarrow \text{Rp}_{1*}^Z \overleftarrow{\gamma}^* \mathcal{K}$$

est un isomorphisme en tout point de  $Z_y$ .

(ii) Soit  $\delta : Z \rightarrow X$  un morphisme cohérent. Notons  $\overleftarrow{\delta} : Y \times_S Z \rightarrow Y \times_S X$  le morphisme induit. Le morphisme d'adjonction

$$\delta^*(\text{Rp}_{2*}^X \mathcal{K}) \rightarrow \text{Rp}_{2*}^Z \overleftarrow{\delta}^* \mathcal{K}$$

est un isomorphisme en tout point de  $Z$ .

*Démonstration.* (i) Si  $\gamma$  est un morphisme local de schéma locaux, le morphisme  $\overleftarrow{\gamma}$  est un morphisme local de topos locaux. La conclusion en résulte par passage aux fibres en observant que  $Z_{(z)} \rightarrow Y$  est local si  $z$  est un point (géométrique) localisé sur  $Z_y$ . (ii) Même argument : pour tout point (géométrique)  $z$  de  $Z$ , d'image  $x$  par  $\delta$ , le morphisme  $Y \times_S Z_{(z)} \rightarrow Y \times_S X_{(x)}$  est un morphisme local de topos locaux.  $\square$

2.3.4. Famille de type (ii) :  $(X' \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . Quitte à remplacer  $p_1$  par  $p_2$  et utiliser le (ii) du lemme ci-dessus, la même démonstration s'applique. Notons le théorème de changement de base propre n'apparaît pas directement ici mais est néanmoins utilisé dans la démonstration du théorème de descente classique pour  $X_\bullet \rightarrow X$ .

2.3.5. Famille de type (iii) :  $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . Notons  $S_\bullet = \text{cosq}_0^S(S')$  le cosquelette du morphisme  $S' \rightarrow S$  et  $X_\bullet, Y_\bullet$  les schémas simpliciaux qui s'en déduisent. Par localisation, on se ramène au cas où  $S$  est local de sorte que le cas de la topologie de Zariski est un corollaire de l'existence d'une section au morphisme  $S' \rightarrow S$ . Supposons donc  $S' \rightarrow S$  propre et surjectif et factorisons  $\overleftarrow{\varepsilon}$  en

$$Y_\bullet \times_S X_\bullet \xrightarrow{\varphi} Y \times_S X_\bullet \xrightarrow{\pi} Y \times_S X.$$

On a vu en 2.3.4 que le morphisme  $\mathcal{K} \rightarrow R\pi_* \pi^* \mathcal{K}$  est un isomorphisme. D'autre part, il résulte du théorème 1.2.1 et du fait que les images directes se calculent cran par cran que pour tout complexe  $\mathcal{G}_\bullet \in D^+(Y \times_S X_\bullet, \mathbf{Z}/n)$  sur  $Y \times_S X_\bullet$  — par exemple  $\pi^* \mathcal{K}$  — le morphisme d'adjonction  $\mathcal{G}_\bullet \rightarrow R\varphi_* \varphi^* \mathcal{G}_\bullet$  est un isomorphisme. Le résultat en découle.

**2.3.6. Famille de type (iv) :**  $(X \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . On suppose ici que le morphisme  $X \rightarrow S$  se factorise à travers un morphisme *propre*  $S' \rightarrow S$ , et on définit  $S_\bullet$  et  $Y_\bullet$  comme ci-dessus. Remarquons que pour chaque entier  $i \geq 0$ , le topos  $Y_i \times_{S_i} X$  est le topos associé au produit fibré itéré dans la catégorie  $\mathcal{B}$  du morphisme  $(X \rightarrow S' \leftarrow Y') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . Factorisons le morphisme  $\overleftarrow{\varepsilon} : Y_\bullet \times_{S_\bullet} X \rightarrow Y \times_S X$  en

$$Y_\bullet \times_{S_\bullet} X \xrightarrow{\varphi} (Y \times_S X)_{\text{const}} \xrightarrow{\pi} Y \times_S X,$$

où  $(Y \times_S X)_{\text{const}}$  est le topos simplicial constant. Il résulte du théorème **1.2.1** appliqué pour chaque  $i$  aux morphismes  $a : X \xrightarrow{\text{diag}} S_i$  et  $b : S_i \rightarrow S$  que l'adjonction  $\text{Id} \rightarrow R\varphi_* \varphi^*$  est un isomorphisme. On s'est donc ramené au cas trivial où  $S' = S$ .

**2.3.7. Famille de type (v) :**  $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . On suppose ici que le morphisme  $Y \rightarrow S$  se factorise à travers un morphisme *étale*  $S' \rightarrow S$ . Notons à nouveau  $S_\bullet$  le 0-cosquelette de ce morphisme et  $X_\bullet = X \times_S S_\bullet$  le schéma simplicial qui s'en déduit. Comme ci-dessus, notons que pour chaque entier  $i \geq 0$  le topos  $Y \times_{S_i} X_i$  est le topos associé au produit fibré itéré dans la catégorie  $\mathcal{B}$  du morphisme  $(X' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ . Pour montrer que la flèche d'adjonction  $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow R\overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{H}$  est un isomorphisme, on peut supposer — par passage aux fibres — que le schéma  $S$  est strictement hensélien de sorte que le morphisme  $S' \rightarrow S$ , et par conséquent  $(X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ , aient une section. Le résultat est alors évident.

**2.3.8. Variante non abélienne.** Modulo la difficulté signalée ci-dessus (**1.3.4**), il suffit de remplacer les références [Deligne, 1974, 5.3.5] et [SGA 4 V bis 3.3.1] par [Orgogozo, 2003, 2.5, 2.8].

## 2.4. Démonstration du théorème 2.2.4.

**2.4.1. Cas des complexes.** Soit  $\mathcal{H}$  un complexe sur  $X$  comme dans l'énoncé, et notons  $\overleftarrow{\mathcal{H}}$  son image inverse par la seconde projection  $p_2 : Y \times_S X \rightarrow X$ . Il résulte du théorème **2.2.1** (i) que l'adjonction  $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow R\overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{H}$  est un isomorphisme. (On rappelle que  $\overleftarrow{\varepsilon}$  désigne le morphisme d'augmentation  $Y_\bullet \times_{S_\bullet} X_\bullet \rightarrow Y \times_S X$ .)

D'autre part, on a la chaîne d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} g^* Rf_* \mathcal{H} &\xrightarrow{\sim} R p_{1*} \overleftarrow{\mathcal{H}} \\ R p_{1*} \alpha : R p_{1*} \overleftarrow{\mathcal{H}} &\xrightarrow{\sim} R p_{1*} R \overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \overleftarrow{\mathcal{H}} \\ R p_{1*} R \overleftarrow{\varepsilon}_* \overleftarrow{\varepsilon}^* \overleftarrow{\mathcal{H}} &= R \varepsilon_{Y*} R p_{1*} \overleftarrow{\mathcal{H}}_\bullet, \text{ où } \overleftarrow{\mathcal{H}}_\bullet = \overleftarrow{\varepsilon}^* \overleftarrow{\mathcal{H}} \\ R \varepsilon_{Y*} R p_{1*} \overleftarrow{\mathcal{H}}_\bullet &\xleftarrow{\sim} R \varepsilon_{Y*} g_* Rf_* \overleftarrow{\mathcal{H}}_\bullet. \end{aligned}$$

Les premier et dernier isomorphismes résultent de **XI-2.4** et le troisième de la functorialité des images directes.

**2.4.2. Cas des champs.** Même démonstration.



## EXPOSÉ XIII

### Le théorème de finitude

Fabrice Orgogozo

#### 1. Introduction

**1.1.** L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème suivant (0-1).

**THÉORÈME 1.1.1.** Soient  $X$  un schéma noethérien quasi-excellent (I-2.10),  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini,  $n \geq 1$  un entier inversible sur  $X$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible de  $\mathbf{Z}/n$ -modules sur  $Y$ . Alors :

- ((i)) Pour tout entier  $q \geq 0$  le faisceau  $R^q f_* \mathcal{F}$  est constructible.
- ((ii)) Il existe un entier  $N$  tel que  $R^q f_* \mathcal{F} = 0$  pour  $q \geq N$ .

**1.1.2.** De façon équivalente, le morphisme  $Rf_* : D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$  induit un morphisme  $D_c^b(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$  entre les sous-catégories de complexes à cohomologie bornée et constructible.

#### 1.2. Remarques.

**1.2.1. Organisation de l'exposé.** L'énoncé ci-dessus est la conjonction d'un résultat de *constructibilité* (i) et d'un résultat d'*annulation* (ii). Dans le §2, nous présentons une démonstration de la constructibilité qui ne requiert pas la forme forte du théorème d'uniformisation mais seulement la forme faible (VII-1.1). Les ingrédients clefs supplémentaires sont le théorème de pureté absolu, le théorème de constructibilité générique (dû à P. Deligne) et la descente cohomologie orientée. Au paragraphe 2.3, nous donnons une démonstration de résultat d'annulation pour les schémas *de dimension finie*, qui complète la démonstration du théorème 1.1.1 pour ces schémas. Le cas général est traité en §3, en s'appuyant sur le théorème d'uniformisation premier à  $\ell$  (IX-1.1), où  $\ell$  est un nombre premier divisant  $n$ . Enfin, nous étendons ce résultat d'abord au cas des coefficients  $\ell$ -adiques, où  $\ell$  est un nombre premier inversible sur les schémas considérés, puis au cas des champs (comme coefficients).

**1.2.2. Terminologie et notations.** Nous dirons d'un complexe  $\mathcal{K} \in \mathbf{Ob} D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ , où  $\Lambda$  est un anneau fini, est *constructible* s'il appartient à  $\mathbf{Ob} D_c^b(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ , c'est-à-dire si ses faisceaux de cohomologie sont constructibles, nuls en grands degrés. Lorsque  $n \geq 1$  est fixé et que cela ne semble pas créer de confusion nous notons  $\Lambda$  l'anneau  $\mathbf{Z}/n$ . De même, un complexe  $\mathcal{K}$  sur un schéma  $X$  étant donné, nous noterons souvent encore  $\mathcal{K}$  ses images inverses sur différents  $X$ -schémas.

#### 2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible

Dans cette section, on démontre 1.1.1 (i), dont on reprend les notations.

**2.1. Réductions.** Les réductions suivantes sont classiques : cf. p. ex. [SGA 4 XVI 4.5].

**2.1.1.** *Réduction au cas où le faisceau  $\mathcal{F}$  est constant.* D'après [SGA 4 IX 2.14 (ii)], le faisceau  $\mathcal{F}$  s'injecte dans une somme finie  $\mathcal{G} = \bigoplus_{i \in I} g_{i*} C_i$  d'images directes par des morphismes finis  $g_i$  de faisceaux en  $\mathbf{Z}/n$ -modules constants constructibles  $C_i$ . On peut supposer  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ . Cela résulte d'une part du fait qu'un sous-quotient d'un faisceau constructible est constructible<sup>i</sup> et d'autre part de la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle

$$Rf_* \mathcal{F} \rightarrow Rf_* \mathcal{G} \rightarrow Rf_*(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \xrightarrow{+1}.$$

Enfin, on peut supposer  $\mathcal{F}$  constant constructible car on peut supposer l'ensemble  $I$  être un singleton et l'égalité  $Rf_*(g_* C) = R(f \circ g)_* C$ , où  $g$  est un morphisme fini, nous permet de supposer  $g = \text{Id}$ . Décomposant  $n$  en produit, on se ramène au cas où  $\mathcal{F}$  est un faisceau constant  $F_\ell$ , le nombre premier  $\ell$  étant inversible sur  $X$  (cf. p. ex. [SGA 4  $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 2.2 b)).

**2.1.2.** *Réduction au cas où le morphisme  $f$  est une immersion ouverte.* Un faisceau sur le schéma noëthérien donc cohérent  $X$  étant constructible si et seulement si il l'est localement pour la topologie de Zariski ([SGA 4 IX 2.4 (i)]), on peut supposer  $X$  affine. On utilise ici le fait trivial que la formation des images directes commute au changement de base par un ouvert de Zariski. On peut également supposer  $Y$  affine ; cela résulte par exemple de l'analogue faisceautique

$$E_1^{p,q} = R^q f_p * (\mathcal{F}|_{Y_p}) \Rightarrow R^{p+q} f_* \mathcal{F}$$

de la suite spectrale de Leray ([Deligne, 1974], 5.2.7.1), où les  $f_p : Y_p \rightarrow X$  sont déduits de  $f$  et d'un hyperrecouvrement Zariski  $Y_\bullet \rightarrow Y$ . Le morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est alors affine donc quasi-projectif, et le théorème de constructibilité étant connu pour les morphismes propres ([SGA 4 XIV 1.1]), on peut supposer que  $f$  est une *immersion ouverte* dominante. (On pourrait également utiliser le théorème de compactification de Nagata.) Conformément à l'usage, nous noterons dorénavant  $j : U \rightarrow X$  le morphisme  $f$ .

## 2.2. Fin de la démonstration du théorème 1.1.1 (i).

**2.2.1.** Soit  $q \geq 0$  un indice pour lequel on souhaite montrer que le faisceau  $R^q j_* F_\ell$  est constructible. On rappelle que  $j$  est une immersion ouverte  $U \hookrightarrow X$  et  $\ell$  est un nombre premier inversible sur  $X$ . Il résulte du critère de constructibilité [SGA 4 IX 2.4.(v)] qu'il suffit de démontrer que pour toute immersion fermée  $g : Z \hookrightarrow X$ , le faisceau  $g^* R^q j_* F_\ell$  est constructible *sur un ouvert dense* de  $Z$ . Le théorème d'uniformisation locale (VII-1.1), joint à la méthode classique de construction d'hyperrecouvrements ([Deligne, 1974], §6.2), a pour corollaire immédiat le fait suivant.

**THÉORÈME 2.2.2.** *Il existe un hyperrecouvrement pour la topologie des altérations  $\varepsilon_\bullet : X_\bullet \rightarrow X$  satisfaisant les conditions suivantes :*

- (i) pour chaque  $i \leq q + 1$ , le schéma  $X_i$  est régulier connexe,
- (ii) pour chaque  $i \leq q + 1$ , l'image inverse  $U_i$  de  $U$  dans  $X_i$  est le complémentaire du support d'un diviseur strictement à croisements normaux,

<sup>i</sup>Pour le voir, on peut utiliser le fait qu'un faisceau est constructible si et seulement si il est noëthérien, cf. [SGA 4 IX 2.9 (i)].

**2.2.3.** Notons  $Z_\bullet$ ,  $g_\bullet$  et  $j_\bullet$  le schéma et les morphismes simpliciaux qui se déduisent de  $Z$ ,  $g$  et  $j$  respectivement par le changement de base  $X_\bullet \rightarrow X$ . Il résulte du théorème de pureté absolue (XVI-3.1.1) que le complexe  $g_\bullet^*Rj_{\bullet*}\Lambda$  sur  $Y_\bullet$  est à cohomologie constructible en degré  $\leq q + 1$ . Par ailleurs, il résulte du théorème de constructibilité générique [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 1.9 (i)] — appliqué aux morphismes  $\varepsilon_p : Z_p \rightarrow Z$  et aux complexes  $g_p^*Rj_{p*}\mathbf{F}_\ell$  — et de la suite spectrale rappelée ci-dessus qu'il existe un ouvert dense de  $Z$  au-dessus duquel le tronqué en degrés inférieurs ou égaux à  $q$  de l'image directe  $R\varepsilon_{Z_\bullet*}(g_\bullet^*Rj_{\bullet*}\mathbf{F}_\ell)$  est *constructible*. D'après XII-2.2.4 (i) cette image directe est isomorphe à  $g^*Rj_*\mathbf{F}_\ell$ . Le faisceau  $g^*Rj_*\mathbf{F}_\ell$  est donc constructible sur un ouvert dense de  $Z$ . CQFD.

### 2.3. Compléments.

**THÉORÈME 2.3.1.** Soient  $S$  un schéma noëthérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini entre  $S$ -schémas de type fini et  $n$  un entier inversible sur  $S$ . Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaite :

- ((i)) le schéma  $S$  est de dimension 1 ;
- ((ii)) le schéma  $S$  est local de dimension 2.

Alors, pour faisceau de  $\mathbf{Z}/n$ -modules constructible  $\mathcal{F}$  sur  $X$  les faisceaux image directe  $R^q f_* \mathcal{F}$  sont constructibles et nuls pour  $q \gg 0$ .

**REMARQUE 2.3.2.** On verra en XIX-2.2 qu'il existe un contre-exemple à la constructibilité lorsque  $S$  est noëthérien de dimension 2 (non local). Ceci résulte de l'existence d'une surface régulière et d'un diviseur possédant une infinité de points doubles. Il serait intéressant de construire un contre-exemple à l'énoncé de constructibilité précédent lorsque  $S$  est *local* (noëthérien) de dimension 3, ou bien de montrer qu'il n'en existe pas.

*Esquisse de démonstration.* (i) D'après le théorème de constructibilité générique ([SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 1.9 (i)), il existe un ouvert dense de  $S$  au-dessus duquel le résultat est acquis. On peut donc supposer le schéma  $S$  *local*. Il est également loisible de le supposer strictement hensélien. Par restriction à ses composantes irréductibles, on peut finalement supposer  $S$  local *intègre* (de dimension 1). Soit  $S' \rightarrow S$  le morphisme de normalisation. C'est un homéomorphisme universel de sorte que l'on peut remplacer  $S$  par  $S'$ . Or, ce dernier schéma est noëthérien régulier, de dimension 1. La conclusion résulte alors du théorème de constructibilité [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 1.1] et du théorème de finitude de la dimension cohomologique [SGA 4 X 3.2, 4.4]. (Voir aussi [Illusie, 2003, 2.4] et XVIII-1.1.)

(ii) Soit  $s$  le point fermé de  $S$ . Le schéma  $S - \{s\}$  étant de dimension 1 le résultat est acquis au-dessus de ce ouvert. Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathbf{Z}/n$ -Module constructible sur  $X$  et considérons un triangle distingué

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow Rj_* j^* \mathcal{F},$$

où  $j$  est l'immersion ouverte  $X - X_s \hookrightarrow X$ . Notons que  $\mathcal{H}$  est à support dans  $X_s$  et constructible si  $Rj_* j^* \mathcal{F}$ . Appliquant le foncteur  $Rf_*$  au triangle précédent et utilisant la finitude sur  $X - X_s$  (resp.  $X_s$ ), on est ramené à montrer la constructibilité des images directes par les immersions ouvertes  $X - X_s \hookrightarrow X$  et  $Y - Y_s \hookrightarrow Y$ . On utilise alors le morphisme de complétion  $\widehat{S} \rightarrow S$  et le théorème de comparaison de Gabber-Fujiwara ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]) pour se ramener au cas où le schéma local  $S$  est complet, donc excellent.  $\square$

**2.3.3.** Reprenons les notations du théorème 1.1.1 et supposons le schéma  $X$  de dimension finie. Le (i) de *loc. cit.* joint au théorème de Lefschetz affine XV-1.1.2<sup>ii</sup> entraînent le complément suivant, qui sera amélioré dans la section suivante.

**PROPOSITION 2.3.4.** *Soit  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent de dimension finie. Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini. Pour tout entier  $n \geq 1$  inversible sur  $X$ , le foncteur  $Rf_* : D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$  est de dimension cohomologie finie. En particulier, il induit un foncteur de  $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$  dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$ .*

*Démonstration.* Supposons  $X$  de dimension finie  $d$ . On peut supposer  $X$  affine. Quitte à considérer un hyperrecouvrement Zariski de  $Y$  par des schémas affines, on peut également supposer ce schéma affine. Soit maintenant  $N$  un majorant de la dimension des fibres de  $f$ . La dimension cohomologique du foncteur image directe par  $f$  est au plus  $d + N$ . En effet, si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $X$ , et  $\mathcal{F}$  un  $\mathbf{Z}/n$ -faisceau constructible sur  $Y$ , on a  $(Rf_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = R\Gamma(Y \times_X X_{(\bar{x})}, \mathcal{F})$ . Les schémas  $X' = X_{(\bar{x})}$  et  $Y' = Y \times_X X_{(\bar{x})}$  admettent respectivement les fonctions de dimension  $\delta_{X'} : x' \mapsto \dim(\overline{\{x'\}})$  et la fonction induite  $\delta_{Y'}$  définie en XIV-2.5.2. Notons que  $\delta_{X'}$  est bornée par  $d$  et  $\delta_{Y'}$  par  $d + N$ . Il résulte donc du théorème de Lefschetz affine (sous la forme XV-1.2.4) que  $H^q(Y', \mathcal{F}) = 0$  pour  $q > d + N$ .  $\square$

**REMARQUE 2.3.5.** On verra en XVIII-1.1 que l'on a un résultat d'annulation sous la seule hypothèse que  $X$  est noëthérien de dimension finie : si  $X$  est un schéma noëthérien strictement local hensélien de dimension  $d > 0$  et  $n$  est inversible sur  $X$ , alors tout ouvert de  $X$  est de  $n$ -dimension cohomologique au plus  $2d - 1$ .

**2.3.6. Constructibilité des images directes dans le cas non abélien.** Quitte à remplacer la réduction 2.1.1 par [SGA 1 XIII §3, (4)], l'usage de [SGA 4 XIV 1.1] en 2.1.2 par [SGA 1 XIII 6.2], le théorème de pureté absolu par [SGA 1 XIII 2.4], le théorème de finitude [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 1.9 (i)] par [Orgogozo, 2003, 2.2] et enfin XII-2.2.4 (i) par XII-2.2.4 (ii), on obtient essentiellement par la même méthode une démonstration du théorème suivant.

**THÉORÈME 2.4 (XXI-1.2).** *Soient  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent,  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini, et  $L$  l'ensemble des nombres premiers inversibles sur  $X$ . Pour tout champ en groupoïdes constructible ind- $L$ -fini sur  $Y_{\text{ét}}$  le champ  $f_* \mathcal{C}$  est constructible.*

### 3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à $\ell$

Dans cette section, on démontre le théorème 1.1.1. Constructibilité (i) et annulation (ii) sont établis simultanément.

#### 3.1. Réduction au cas d'une immersion ouverte et de la finitude hors d'un lieu de codimension donnée.

**3.1.1.** Comme en 1.2.2, posons  $\Lambda = \mathbf{Z}/n$ , où  $n$  est l'entier inversible sur  $X$  de l'énoncé. Pour chaque entier  $c \geq 0$ , considérons la propriété  $(P_c)$  suivante :

*Pour tout schéma quasi-excellent noëthérien  $X$ , toute immersion ouverte dominante  $j : U \hookrightarrow X$  et tout complexe  $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ , il existe un fermé  $T \hookrightarrow X$  de codimension strictement supérieure à  $c$  tel que  $(Rj_* \mathcal{K})|_{X-T}$  appartienne à  $\text{Ob } D_c^b((X-T)_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

<sup>ii</sup>Le lecteur constatera que cette référence à un exposé ultérieur ne génère pas de cercle vicieux.

**3.1.2.** La conjonction des énoncés  $(P_c)$  pour chaque  $c \geq 0$ , entraîne le théorème. Soit en effet une paire  $(f, \mathcal{F})$  comme dans l'énoncé du théorème. D'après le théorème de compactification de Nagata, il existe une immersion ouverte  $j : X \hookrightarrow \bar{X}$  et un morphisme propre  $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow Y$  tels que  $f = \bar{f}j$ . La formule de composition  $Rf_* = R\bar{f}_*Rj_*$  et le théorème de finitude pour les morphismes propres, nous ramènent à démontrer la constructibilité de complexe  $\mathcal{K} = Rj_*\mathcal{F}$ . (Voir aussi 2.1.2.) La conclusion résulte alors du lemme suivant.

**LEMME 3.1.3.** Soient  $X$  un schéma noethérien et  $\mathcal{K} \in \text{Ob } D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Supposons que pour tout entier  $c \geq 0$ , il existe un fermé  $T_c$  de codimension strictement supérieure à  $c$  tel que  $\mathcal{K}|_{X-T_c} \in \text{Ob } D^+((X - T_c)_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors,  $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

*Démonstration.* Le schéma  $X$  étant noethérien, ses localisés sont de dimension finie et pour toute suite de fermés  $(T_c)_{c \in \mathbb{N}}$  comme dans l'énoncé, on a  $X = \bigcup_c (X - T_c)$ . D'autre part, le schéma  $X$  étant quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini des ouverts  $X - T_c$ . La conclusion résulte alors du fait que si  $U, U'$  sont deux ouverts de  $X$  tels que  $\mathcal{K}|_U \in \text{Ob } D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ ,  $\mathcal{K}|_{U'} \in \text{Ob } D_c^b(U'_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on a également  $\mathcal{K}|_{U \cup U'} \in \text{Ob } D_c^b((U \cup U')_{\text{ét}}, \Lambda)$ .  $\square$

**3.1.4.** Nous allons démontrer la propriété  $(P_c)$  ci-dessus par récurrence sur  $c$ . Insistons sur le fait que *le schéma  $X$  et le complexe  $\mathcal{K}$  sont variables*. Pour  $c = 0$ , cette propriété est triviale : prendre  $T = X - U$ . Soit  $c \geq 1$  et supposons la propriété établie au cran  $c - 1$ . On souhaite la démontrer au cran  $c$ .

**3.2. Récurrence : l'ingrédient clef et une première réduction.**

**3.2.1.** D'après le théorème d'uniformisation première à  $\ell$  (IX-1.1) et le théorème de la forme standard (II-3.2.3), il existe une famille finie indexée, par un ensemble  $I$  d'éléments  $i$ , de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_i''' & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & Y = \coprod_{j \in J} Y_j & & & \\
 \text{fini, plat, surjectif} \downarrow \text{degré premier à } \ell & & & \downarrow & & & \\
 X_i'' & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & X' & \xrightarrow{\quad p \quad} & X & \xleftarrow{\quad j \quad} & U \\
 & \text{étale} & & \text{propre, birationnel} & & & 
 \end{array}$$

- où, en plus des propriétés indiquées ci-dessus,
- la famille  $(X_i'' \rightarrow X')$  est couvrante pour la topologie étale complètement décomposée ;
  - les schémas  $Y_j, j \in J$ , sont réguliers ;
  - l'image inverse de  $U$  dans  $Y_j$  est le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux.

**3.2.2.** Soit  $(j, \mathcal{K})$  une paire comme dans l'énoncé de la propriété  $P_c$  (3.1). Nous verrons seulement plus tard que l'on peut supposer  $\mathcal{K} = \Lambda$ . D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux paires  $(j, \mathcal{K})$  et  $(j', \mathcal{K})$ , où  $j'$  est l'immersion ouverte de  $U' = U \times_X X'$  dans  $X'$ , il existe deux fermés  $T \hookrightarrow X$  et  $T' \hookrightarrow X'$  de codimension  $\geq c$  tels que les complexes  $Rj_*\mathcal{K}$  et  $Rj'_*\mathcal{K}$  soient constructibles sur les ouverts complémentaires correspondants. Le fermé  $T$  n'ayant qu'un nombre fini de points maximaux et l'énoncé à démontrer — la constructibilité hors d'un fermé de codimension  $> c$  — étant un problème local au voisinage de ces points, on peut supposer  $T$  irréductible, de codimension  $c$ , de point générique noté  $\eta_T$ . Soit  $\eta'$  un point maximal de  $T'$ . Si l'image par  $p$  de  $\eta'$  n'est pas égale à  $\eta_T$ , la composante irréductible correspondante de  $T'$  disparaît après localisation (Zariski)

au voisinage de  $\eta_T$ . Compte tenu du fait que  $T$  est de codimension  $c$  et  $T'$  de codimension au moins égale, toute composante irréductible  $T'_\alpha$  de  $T'$  dominant  $T$  est nécessairement de dimension égale à celle de  $T$ , et le morphisme induit  $T'_\alpha \rightarrow T$  est génériquement fini. Quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de  $\eta_T$  dans  $X$ , on peut finalement supposer que  $T'$  est une somme  $\coprod_\alpha T'_\alpha$ , où les  $T'_\alpha$  sont irréductibles et les morphismes  $T'_\alpha \rightarrow T$  sont *finis*, surjectifs.

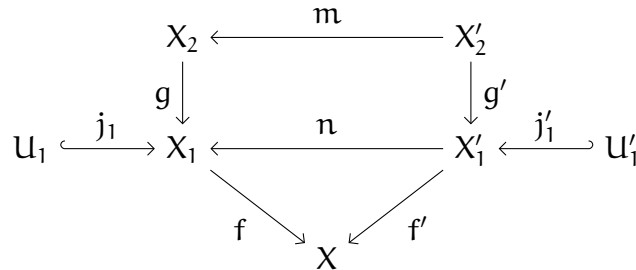
**3.3. Notation : le complexe  $\psi_f(g, \mathcal{K})$ .**

**3.3.1.** Pour tout  $X$ -schéma  $f : X_1 \rightarrow X$  et tout  $X_1$ -schéma  $g : X_2 \rightarrow X_1$ , notons  $h$  le morphisme composé  $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$  et  $j_1$  l'immersion ouverte  $U_1 = X_1 \times_X U \hookrightarrow X_1$  déduite de  $j$  par changement de base. Considérons le complexe de faisceaux sur  $X$ ,

$$\psi_f(g, \mathcal{K}) := Rg_*(h^*(Rj_{Y*}\mathcal{K})).$$

Ci-dessous, le morphisme  $g$  sera le plus souvent une immersion fermée, qui sera parfois supprimée de la notation, ainsi que  $f$ , si cela ne semble pas induire de confusion. Par exemple,  $\psi(X, \mathcal{K}) = Rj_*\mathcal{K}$ .

**3.3.2.** La formation du complexe  $\psi$  est fonctorielle en le sens suivant : pour tout diagramme commutatif



le morphisme de changement de base (adjonction)  $n^*Rj_{Y*}\mathcal{K} \rightarrow Rj_{Y'*}\mathcal{K}$  induit un morphisme

$$\psi_f(g, \mathcal{K}) \rightarrow \psi_{f'}(g', \mathcal{K}).$$

**3.4. Seconde localisation.**

**3.4.1.** Nous dirons qu'un morphisme d'une catégorie dérivée  $D^+(\mathcal{T}, \Lambda)$ , où  $\mathcal{T}$  est le topos étale d'un schéma, est un  $D_c^b$ -isomorphisme ou isomorphisme *modulo*  $D_c^b$ , s'il a un cône dans  $D_c^b(\mathcal{T}, \Lambda)$ . Cela revient d'après [Neeman, 2001, 2.1.35] à supposer que la flèche induite dans la catégorie triangulée quotient  $D^+(\mathcal{T}, \Lambda)/D_c^b(\mathcal{T}, \Lambda)$  est un *isomorphisme*. Notons que dans la terminologie d'*op. cit.*, la sous-catégorie  $D_c^b(\mathcal{T}, \Lambda)$  est *épaisse*. La localisation considérée ici (due à J.-L. Verdier) est l'analogie triangulée de celle considérée par J.-P. Serre dans le cas des catégories abéliennes.

**PROPOSITION 3.4.2.** *Quitte à se restreindre au voisinage de  $\eta_T$ , on peut supposer que le morphisme d'adjonction*

$$\psi_{Id}(T \hookrightarrow X, \mathcal{F}) \rightarrow \psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathcal{F})$$

est un  $D_c^b$ -isomorphisme.

Notons que le terme de droite,  $\psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathcal{F})$ , est isomorphe à la somme directe  $\bigoplus_\alpha \psi_p(T'_\alpha \hookrightarrow X', \mathcal{F})$ .

*Démonstration.* Soit  $p_U$  le morphisme induit par  $p$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $X$ ; c'est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert  $W$  de  $U$ . Notons  $i$  l'immersion fermée du complémentaire  $Z = U - W$  dans  $U$ . On a sur  $U$  un triangle distingué

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathrm{R}p_{U*} p_U^* \mathcal{H} \rightarrow i_* \mathcal{H} \xrightarrow{+1},$$

où  $\mathcal{H}$  est constructible sur  $Z$ , d'après le théorème de finitude pour le morphisme propre  $p_U$ . Il résulte du théorème de changement de base propre pour  $p$  que le triangle distingué précédent devient, après application du foncteur  $\psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, -)$ , le triangle distingué de complexes supportés sur  $T$  suivant :

$$\psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, \mathcal{H}) \rightarrow \psi_p(p^{-1}(T) \hookrightarrow X', \mathcal{H}) \rightarrow \psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, i_* \mathcal{H}) \xrightarrow{+1}.$$

Première étape. Nous allons commencer par montrer que la première flèche est génériquement sur  $T$  un  $D_c^b$ -isomorphisme. (« Génériquement sur  $T$  » : quitte à se restreindre à un voisinage Zariski convenable de  $\eta_T$ .) Soient en effet  $\bar{Z}$  l'adhérence de  $Z$  dans  $X$ ,  $\bar{j} : Z \hookrightarrow \bar{Z}$  l'immersion ouverte et  $\bar{i} : \bar{Z} \hookrightarrow X$  l'immersion fermée, représentés dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{i} & Z = U - W \\ \downarrow j & & \downarrow \bar{j} \\ X & \xleftarrow{\bar{i}} & \bar{Z} \end{array}$$

La restriction à  $T$  du complexe  $\psi(T, i_* \mathcal{H})$  — dont on veut montrer qu'elle est génériquement  $D_c^b$ -nulle — est isomorphe à la restriction du complexe  $\bar{i}_* \bar{R}\bar{j}_* \mathcal{H}$ . Le fermé  $\bar{Z}$  étant de codimension  $\geq 1$  dans  $X$ , car  $W$  est partout dense dans  $X$ , l'hypothèse de récurrence pour la paire  $(\bar{j}, \mathcal{H})$  entraîne immédiatement le résultat.

Deuxième étape. Pour conclure, il nous faut maintenant montrer que le morphisme d'adjonction  $\psi_p(p^{-1}(T), \mathcal{H}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{H})$ , à travers lequel le morphisme  $\psi_{\mathrm{Id}}(T, \mathcal{H}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{H})$  de l'énoncé se factorise est, génériquement sur  $T$ , un  $D_c^b$ -isomorphisme. Sur le fermé  $T'_p = p^{-1}(T)$  de  $X'$ , considérons la restriction  $\mathcal{L} = (\mathrm{R}j'_* \mathcal{H})|_{p^{-1}(T)}$  de l'image directe par  $j'$  de  $\mathcal{H}$ , et le triangle distingué

$$(T'_p - T' \hookrightarrow T'_p)_! \mathcal{L}|_{T'_p - T'} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow (T' \hookrightarrow T'_p)_* \mathcal{L}|_{T'} \xrightarrow{+1}$$

constitué de ses prolongements par zéro. Rappelons que  $j'$  désigne l'immersion ouverte de  $U'$  dans  $X'$ . Par définition de  $T'$ , le premier complexe est constructible; il en est donc de même de son image directe (dérivée) par le morphisme propre  $p_T$ . Or, l'image directe de la seconde flèche par  $p_T$  n'est autre que le morphisme d'adjonction  $\psi_p(T'_p, \mathcal{H}) \rightarrow \psi_p(T', \mathcal{H})$ . CQFD.  $\square$

### 3.5. Construction d'une rétraction.

**3.5.1.** Quitte à rétrécir  $X$  un peu plus encore, on peut supposer que pour tout  $\alpha$  (on rappelle que  $T' = \coprod_{\alpha} T'_{\alpha}$ ), il existe un indice  $i_{\alpha}$  tel que le morphisme étale  $X''_{i_{\alpha}} \rightarrow X'$  ait une section  $\sigma_{\alpha}$  au-dessus de  $T'_{\alpha}$ . Cela résulte du fait que la famille  $(X''_i \rightarrow X')_i$  est complètement décomposée, de sorte qu'une section existe au voisinage du point générique de  $T'_{\alpha}$  (II-2.2.3). La propriété du morphisme dominant  $X' \rightarrow X$  permet de déduire l'existence d'un ouvert convenable de  $X$  de celle d'un ouvert de  $X'$ .

**3.5.2.** Pour simplifier les notations, on pose pour chaque indice  $\alpha$ ,  $X''_{\alpha} = X''_{i_{\alpha}}$ ,  $X'''_{\alpha} = X'''_{i_{\alpha}}$  et on note  $T''_{\alpha} \subset X''_{\alpha}$  l'image de  $T'_{\alpha}$  par une section  $\sigma_{\alpha}$  comme ci-dessus, et enfin  $T'''_{\alpha} \subseteq X'''_{\alpha}$  l'image inverse de  $T''_{\alpha}$  par le morphisme fini  $X'''_{\alpha} \rightarrow X''_{\alpha}$ .

**PROPOSITION 3.5.3.** *Le morphisme d'adjonction  $\psi(T'_{\alpha} \hookrightarrow X'_{\alpha}, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T''_{\alpha} \hookrightarrow X''_{\alpha}, \mathcal{K})$  est un isomorphisme.*

Bien entendu, les complexes ci-dessus sont calculés en munissant les schémas  $X'_{\alpha}$  et  $X''_{\alpha}$  de la structure de  $X$ -schéma évidente. Nous nous autoriserons dorénavant cet abus de notation.

*Démonstration.* Résulte du fait que le morphisme  $X''_{\alpha} \rightarrow X'$  est étale. □

**PROPOSITION 3.5.4.** *Le morphisme d'adjonction  $\psi(T''_{\alpha} \hookrightarrow X'_{\alpha}, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T'''_{\alpha} \hookrightarrow X''_{\alpha}, \mathcal{K})$  a un inverse à gauche.*

*Démonstration.* Considérons le diagramme à carrés cartésiens suivant :

$$\begin{array}{ccccc} T'''_{\alpha} & \longrightarrow & X'''_{\alpha} & \xleftarrow{j'''_{\alpha}} & U'''_{\alpha} \\ \pi_T \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_U \\ T''_{\alpha} & \longrightarrow & X''_{\alpha} & \xleftarrow{j''_{\alpha}} & U''_{\alpha} \end{array}$$

où  $U''_{\alpha} = U \times_X X''_{\alpha}$ , de même pour  $U'''_{\alpha}$ , et  $\pi : X'''_{\alpha} \rightarrow X''_{\alpha}$  est comme en 3.2.1. En particulier, le morphisme  $\pi_U$  est fini, plat, et de degré générique premier à  $\ell$ , de sorte que le morphisme composé

$$\mathcal{K} \rightarrow \pi_{U*} \pi_U^* \mathcal{K} \xrightarrow{\text{Tr}} \mathcal{K}$$

est la multiplication par le degré, donc inversible. Appliquons le foncteur  $Rj''_{\alpha}$ . Par composition des images directes, le terme du milieu est  $\pi_* Rj'''_{\alpha*} \mathcal{K}$ , où l'omet le foncteur image inverse de la notation (1.2.2). D'après le théorème de changement de base pour les morphismes finis, sa restriction au fermé  $T''_{\alpha}$  est isomorphe à  $\pi_{T*} ((Rj'''_{\alpha*} \mathcal{K})|_{T'''_{\alpha}})$ . En poussant les faisceaux sur  $X$  par le morphisme  $T''_{\alpha} \rightarrow X$ , la suite précédente devient donc

$$\psi(T''_{\alpha} \hookrightarrow X''_{\alpha}, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T'''_{\alpha} \hookrightarrow X'''_{\alpha}, \mathcal{K}) \rightarrow \psi(T''_{\alpha} \hookrightarrow X''_{\alpha}, \mathcal{K})$$

et la composition de ces flèches est un isomorphisme. □

### 3.6. Cas des coefficients constants : utilisation du théorème de pureté.



**3.6.1.** Posons  $T''' = \coprod T''_\alpha, X''' = \coprod X''_\alpha$  et considérons le diagramme commutatif de morphismes d'adjonction, complété du morphisme trace :

$$\begin{array}{ccccccc} \psi(T \hookrightarrow X, \mathcal{K}) & \dashrightarrow & \psi(T' \hookrightarrow X', \mathcal{K}) & \dashrightarrow & \psi(T'' \hookrightarrow X'', \mathcal{K}) & \longrightarrow & \psi(T''' \hookrightarrow X''', \mathcal{K}) \xrightarrow{\text{Tr}} \psi_p(T'' \hookrightarrow X'', \mathcal{K}). \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \psi(T''' \rightarrow Y, \mathcal{K}) \end{array}$$

D'après les trois propositions précédentes, les flèches en tirets deviennent des isomorphismes modulo  $D_c^b$ . Si le complexe  $\psi(T''' \rightarrow Y, \mathcal{K})$  est *constructible*, c'est-à-dire nul modulo  $D_c^b$ , il en résulte que  $\psi(T \hookrightarrow X, \mathcal{K})$  — ou, de façon équivalente,  $(Rj_*\mathcal{K})|_T$  — est également constructible.

**PROPOSITION 3.6.2.** *Le complexe  $\psi(T''' \rightarrow Y, \Lambda)$  est constructible.*

*Démonstration.* Le morphisme composé  $T''' \rightarrow X$  étant fini, il suffit de démontrer que le complexe  $Rj_Y * \Lambda$  est constructible. Cela résulte des hypothèses faites en 3.2.1 et du théorème de pureté XVI-3.1.1.  $\square$

**3.7. Réduction au cas des coefficients constants.**

**3.7.1.** Pour achever la démonstration du théorème 1.1.1, il nous faut maintenant montrer que la propriété  $(P_c)$  de §3.1, où  $c$  est fixé, résulte du cas particulier où  $\mathcal{K} = \Lambda$  et de l'énoncé  $P_{c-1}$ .

**3.7.2.** Commençons par observer que l'on peut supposer  $\mathcal{K}$  concentré en degré 0, c'est-à-dire être un *faisceau* constructible, que nous noterons dorénavant  $\mathcal{F}$ . L'ensemble des faisceaux constructibles satisfaisant à la propriété à établir au rang  $c$  est, à  $X$  fixé, stable par extension et facteur direct. D'après [SGA 5 I 3.1.2], on peut supposer  $\mathcal{F} = \pi_* k_! \Lambda$  où  $\pi : U' \rightarrow U$  est un morphisme *fini* et  $k : W \hookrightarrow U'$  une immersion ouverte, avec  $U'$  *intègre*. D'après le théorème principal de Zariski ([ÉGA IV<sub>3</sub> 8.12.6]), le morphisme composé  $U' \rightarrow X$ , *quasi-fini*, se factorise en une immersion ouverte  $j' : U' \hookrightarrow X'$  suivie d'un morphisme fini  $\bar{\pi} : X' \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{k} & U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ & & \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ & & U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Le complexe  $Rj_* \pi_* k_! \Lambda$ , dont on s'interroge sur la constructibilité, est isomorphe au complexe  $\bar{\pi}_* Rj'_* k_! \Lambda$ . En vertu du lemme suivant, on peut supposer  $X' = X$ .

**LEMME 3.7.3.** *Soient  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme fini de schémas,  $T_Y$  un fermé de  $Y$  et  $T_X = f(T_Y)$  son image.*

- (i) *On a l'inégalité :  $\text{codim}(T_X, X) \geq \text{codim}(T_Y, Y)$ .*
- (ii) *Soit  $K \in \text{Ob } D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  tel que  $K|_{Y-T_Y} \in \text{Ob } D^+((Y - T_Y)_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors,  $(f_* K)|_{X-T_X} \in \text{Ob } D^+((X - T_X)_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

*Démonstration.* Le premier énoncé est bien connu. Le second est un corollaire immédiat de la préservation de la constructibilité par le morphisme composé, fini,  $Y - f^{-1}(T_X) \hookrightarrow Y - T_Y \rightarrow X - T_X$ .  $\square$

**3.7.4.** Soient  $j : U \rightarrow X$  et  $k : W \rightarrow U$  sont deux immersions ouvertes, avec  $U$  intègre. Nous souhaitons maintenant déduire la constructibilité du complexe  $Rj_*k_!\Lambda$  hors d'un fermé de codimension au moins  $c$  de la propriété analogue pour les complexes  $Rj_*\Lambda$ . Admettant ce résultat pour ces derniers, il résulte du triangle distingué  $k_!\Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow i_*\Lambda \xrightarrow{+1}$ , où  $i$  est l'immersion fermée du complémentaire  $F$  de  $W$  dans  $U$ , qu'il suffit de démontrer la constructibilité de  $Rj_*i_*\Lambda$  hors d'un fermé de codimension au moins  $c$ . Le schéma  $U$  étant intègre, l'adhérence  $\bar{F}$  de  $F$  dans  $X$  est de codimension strictement positive  $X$ . Soit  $m : F \hookrightarrow \bar{F}$  l'immersion ouverte correspondante et  $n : \bar{F} \hookrightarrow X$  l'immersion fermée. On a tautologiquement :

$$Rj_*i_*\Lambda = n_*Rm_*\Lambda,$$

par commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ \uparrow i & & \uparrow \bar{\pi} \\ F & \xrightarrow{m} & \bar{F} \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence ( $P_{c-1}$ ), il existe un fermé  $T_{\bar{F}}$  de  $\bar{F}$ , de codimension au moins  $c$  dans  $\bar{F}$ , tel que la restriction de  $Rm_*\Lambda$  à l'ouvert  $\bar{F} - T_{\bar{F}}$  de  $\bar{F}$  soit constructible. L'image directe par l'immersion fermée  $n$  du complexe  $Rm_*\Lambda$  est donc constructible sur l'ouvert  $X - T_{\bar{F}}$  de  $X$ . La conclusion résulte maintenant du fait que la codimension de  $T_{\bar{F}}$  dans  $X$  est *strictement supérieure* à  $c$ .

**REMARQUE 3.7.5.** O. Gabber sait également démontrer un résultat de *constructibilité uniforme*, dans l'esprit de ceux de [Katz & Laumon, 1985, §3] mais sans hypothèse sur la caractéristique. Cf. courriel à Luc Illusie, du 3 avril 2007 ; voir aussi [Orgogozo, 2011].

## 4. Coefficients $\ell$ -adiques

**4.1. Définitions.** On rappelle ici la construction, due à Torsten Ekedahl ([Ekedahl, 1990]), de la catégorie triangulée des complexes bornés constructibles  $\ell$ -adiques. Voir aussi [Fargues, 2009], §5 pour un résumé et quelques améliorations. Pour un formalisme également valable pour les champs et sous des hypothèses moins restrictives, cf. « Enhanced six operations and base change theorem for sheaves on Artin stacks » de Zheng Weizhe et Liu Y.

On fixe ici un schéma noëthérien  $X$ , sur lequel un nombre premier  $\ell$  est inversible.

**4.1.1. Systèmes projectifs.** Notons  $X^{\mathbf{N}}$  le topos des systèmes projectifs indicés par  $\mathbf{N}$  de faisceaux étales sur  $X$ ; on en fait un topos annelé via  $\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}} := (\mathbf{Z}/\ell^n)_n$ . Un *système projectif  $\ell$ -adique* de faisceaux sur  $X$  est un  $\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}$ -module sur  $X^{\mathbf{N}}$ , c'est-à-dire un système projectif de faisceaux abéliens  $\mathcal{F} = (\dots \rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \dots)$  sur  $X$ , où  $\mathcal{F}_n$  un  $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ -modules sur  $X$ . Ils constituent une catégorie abélienne, dont on note  $D(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}})$  la catégorie dérivée. Un tel système projectif de faisceaux est dit *essentiellement nul* si pour tout  $n$  il existe un entier  $m \geq n$  tel que le morphisme de transition  $\mathcal{F}_m \rightarrow \mathcal{F}_n$  correspondant soit nul. De même, un complexe  $\mathcal{K} \in \text{Ob } D(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}})$  est essentiellement nul si chaque système projectif  $H^i(\mathcal{K})$  de faisceau l'est.

**4.1.2.  $\mathbf{Z}_\ell$ -complexes.** Soit  $\mathbf{D}_c^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{D}(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N)$  des complexes

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_n \in \text{Ob } \mathbf{D}^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^n))_n$$

dont la « réduction modulo  $\ell$  »

$$\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^N} \mathcal{K} = (\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^n} \mathcal{K}_n)_n$$

soit un *pro-objet essentiellement constant* de  $\mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell)$ . (« Essentially constant » : isomorphe, modulo les complexes essentiellement nuls, à un système projectif provenant de  $\mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell)$ .) Un tel objet est appelé un  *$\mathbf{Z}_\ell$ -complexe borné constructible* ; ils forment une catégorie triangulée.

**4.1.3. Catégorie triangulée des  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux.** On note  $\mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$  la catégorie triangulée obtenue à partir de la catégorie  $\mathbf{D}_c^b(X^N, \mathbf{Z}/\ell^N)$  en inversant les *isomorphismes essentiels modulo  $\ell$* , c'est-à-dire les flèches  $u$  tel que  $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^N} u$  ait un cône essentiellement nul. De même, on peut définir variantes non bornées et non constructibles.

**4.1.4.** Comme expliqué en [Fargues, 2009, §5.9], lorsque  $X$  est de type fini sur un corps séparablement clos ou fini, la catégorie obtenue est équivalente à la catégorie  $2 - \lim_n \mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(X, \mathbf{Z}/\ell^n)$  considérée par P. Deligne dans Weil II. Notons qu'en toute généralité, les constituants d'un  $\mathbf{Z}_\ell$ -complexe borné constructible sont de tor-dimensions finies. On rappelle ([SGA 4 XVII 4.1.9]) qu'un complexe  $\mathcal{K} \in \text{Ob } \mathbf{D}^b(T, A)$ , où  $T$  est un topos et  $A$  un Anneau commutatif, est dit de *tor-dimension* inférieure ou égale à  $n$  si pour tout complexe  $\mathcal{L}$  de  $A$ -modules concentré en degrés positifs ou nuls,  $H^i(\mathcal{K} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{L}) = 0$  pour tout  $i < -n$ .

**4.1.5.** Un des points clefs de la théorie est le *lemme de  $\square$ -Ekedahl* d'après lequel le foncteur triangulé noté  $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} -$ , déduit du foncteur de réduction modulo  $\ell$  ci-dessus, est *conservatif* :  $\mathcal{K} \in \text{Ob } \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$  est nul si et seulement si le complexe  $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathcal{K} \in \text{Ob } \mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell)$  l'est. Nous renvoyons le lecteur à [Ekedahl, 1985, prop. 1.1] ou [Illusie, 1983, 2.3.7, 2.4.5] pour une première apparition de ce lemme, et [Ekedahl, 1990, 3.6.(ii)] pour le résultat précédent.

**4.1.6.** D'après ce lemme, et ces corollaires (*op. cit.*, th. 5.1.(ii) et th. 6.3), le théorème de finitude  $\ell$ -adique ci-dessus résulte d'un théorème de finitude pour les coefficients finis.

## 4.2. Théorèmes : énoncés.

**THÉORÈME 4.2.1.** Soient  $X$  un schéma noethérien quasi-excellent de dimension finie,  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$  et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini. Pour tout entier  $n \geq 1$ , le foncteur  $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n) \rightarrow \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n)$  envoie  $\mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n)$  dans  $\mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n)$ .

*Démonstration.* D'après le résultat du paragraphe §2.3, le foncteur  $\mathbf{R}f_*$  est de dimension cohomologique finie. La conclusion résulte de [SGA 4 XVII 5.2.11] (tor-dimension finie) et du théorème 1.1.1 (constructibilité).  $\square$

**REMARQUE 4.2.2.** On devrait pouvoir montrer, par réduction au cas des schémas de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , que pour tout morphisme cohérent  $f$ , le foncteur  $\mathbf{R}f_*$  envoie un faisceau plat constructible sur un complexe de de tor-dimension au plus zéro.

D'après les résultats esquissés dans [Ekedahl, 1990, §5-6], on peut déduire du théorème précédent le théorème  $\ell$ -adique suivant.

**THÉORÈME 4.2.3.** *Soient  $X$  un schéma noëthérien quasi-excellent de dimension finie,  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$  et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini. Le foncteur  $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^+(Y^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}) \rightarrow \mathbf{D}^+(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}})$ ,  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_n)_n \mapsto \mathbf{R}f_*\mathcal{K} = (\mathbf{R}f_*\mathcal{K}_n)_n$  induit un foncteur  $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(Y, \mathbf{Z}_{\ell}) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathbb{C}}^b(X, \mathbf{Z}_{\ell})$ .*

## EXPOSÉ XIV

### Fonctions de dimension

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Nous définissons la notion de fonction de dimension sur un schéma  $X$  et nous montrons l'existence de telles fonctions localement pour la topologie étale si  $X$  est quasi-excellent.

#### 1. Universelle caténarité des schémas henséliens

Dans cette partie, nous rappelons les notions de *caténarité* et d'*universelle caténarité*. Le lecteur pourra consulter l'exposé I pour plus de détails.

**1.1. Schémas universellement caténaux.** Soient  $S$  un espace topologique et  $X \subset Y$  des fermés irréductibles de  $S$ . Notons  $\text{codim}(X, Y)$  la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles  $X \subsetneq Z \subset Y$ . Si  $S$  est un schéma,  $X$  et  $Y$  des sous-schémas fermés intègres et  $x$  le point générique de  $X$ , on a

$$\text{codim}(X, Y) = \dim(\mathcal{O}_{Y,x}).$$

**DÉFINITION 1.1.1** ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 14.3.2]). Un schéma  $S$  est *caténaire* s'il est noethérien et si pour toute chaîne  $X \subset Y \subset Z$  de fermés irréductibles de  $S$ , on a

$$\text{codim}(X, Z) = \text{codim}(Y, Z) + \text{codim}(X, Y).$$

Un schéma  $S$  est *universellement caténaire* si tout schéma de type fini sur  $S$  est caténaire.

La notion de caténarité est stable par localisation et par restriction à des sous-schémas fermés. Ainsi,  $S$  est universellement caténaire si et seulement si pour tout entier  $n \geq 0$ , le schéma  $\mathbf{A}_S^n$  est caténaire.

**LEMME 1.1.2.** *Un schéma de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

*Démonstration.* Si  $S$  est Cohen-Macaulay, il est caténaire d'après [Matsumura, 1980a] 16.B. Comme pour tout  $n \geq 0$ , le schéma  $\mathbf{A}_S^n$  reste Cohen-Macaulay, le schéma  $S$  est bien universellement caténaire.  $\square$

**EXEMPLE 1.1.3.** Tout schéma régulier est universellement caténaire car Cohen-Macaulay. En particulier, le spectre d'un corps, un trait et le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète sont universellement caténaux. Tout schéma de type fini sur un schéma régulier est universellement caténaire.

**PROPOSITION 1.1.4** ([Matsumura, 1980a] 28.P). *Un schéma local complet noethérien est universellement caténaire.*

*Démonstration.* Le théorème de structure de Cohen [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8] permet d'écrire tout schéma local complet noëthérien comme fermé dans le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un anneau de Cohen. L'universalité caténaire résulte de l'exemple précédent et de la stabilité de cette notion par passage à un fermé.  $\square$

**1.2. Un théorème de Ratliff.** On dit qu'un schéma noëthérien est *équidimensionnel* si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension (finie). Soit  $S$  un schéma local noëthérien. On note  $\widehat{S}$  le spectre du complété de l'anneau de  $S$  en son idéal maximal.

**DÉFINITION 1.2.1.** Le schéma local  $S$  est *formellement équidimensionnel* si  $\widehat{S}$  est équidimensionnel. Il est *formellement caténaire* si pour tout  $s \in S$ , l'adhérence  $\overline{\{s\}}$  est formellement équidimensionnelle.

Soit  $S$  un schéma local noëthérien. Ratliff a démontré le théorème fondamental suivant, qui a déjà été mentionné dans la proposition I-7.1.1.

**THÉORÈME 1.2.2 ([Matsumura, 1989] 31.7).** *Pour un schéma local noëthérien  $S$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $S$  est formellement caténaire,
- $S$  est universellement caténaire,
- $\mathbf{A}_S^1$  est caténaire,
- $S$  est caténaire et pour tout  $s \in S$ , tout schéma intègre  $S'$  muni d'une flèche finie et dominante  $S' \rightarrow \overline{\{s\}}$  et tout point fermé  $s'$  de  $S'$ , on a  $\dim(\mathcal{O}_{S',s'}) = \dim(\overline{\{s\}})$ .

On a ajouté une quatrième condition équivalente à l'énoncé [Matsumura, 1989, Theorem 31.7]. Il résulte de [ÉGA IV<sub>2</sub> 5.6.10] que les trois premières conditions équivalentes impliquent la quatrième. La réciproque est démontrée au cours de la démonstration de [Matsumura, 1989, Theorem 31.7] (au second paragraphe de la page 255).

**COROLLAIRE 1.2.3 ([Matsumura, 1989] 31.2).** *Tout schéma noëthérien de dimension  $\leq 2$  est caténaire. Tout schéma noëthérien de dimension  $\leq 1$  est universellement caténaire.*

**1.3. Schémas henséliens et catéarité.** Nous avons vu que tout schéma local complet noëthérien est universellement caténaire dans la proposition 1.1.4. Les schémas locaux henséliens jouissent également de bonnes propriétés de catéarité.

**PROPOSITION 1.3.1.** *Tout schéma local hensélien caténaire est universellement caténaire.*

*Démonstration.* Soit  $S = \text{Spec}(A)$  un schéma local hensélien caténaire, soit  $P$  un idéal premier de  $A$ , soit  $L$  une extension finie de  $\text{Frac}(A/P)$  et soit  $B$  une extension finie de  $A/P$  contenue dans  $L$ . D'après le théorème 1.2.2, il suffit de prouver que la dimension du localisé de  $B$  en chacun de ses idéaux maximaux est égale à la dimension de  $A/P$ . Toute algèbre finie sur un anneau hensélien est semi-locale d'après [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.5] et [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.6]. Comme le schéma  $B$  est intègre, il est local. Le théorème du « going-up » ([Matsumura, 1989] 9.3 et 9.4) montre qu'on a bien  $\dim(B) = \dim(A/P)$ .  $\square$

Rappelons également le résultat suivant, conséquence du corollaire I-6.3 ii).

**PROPOSITION 1.3.2.** *Tout schéma local hensélien quasi-excellent est universellement caténaire.*

Ainsi, tout schéma local hensélien quasi-excellent est excellent.

## 2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension

**2.1. Définitions.** Soit  $X$  un schéma. Pour tout point  $x$  de  $X$  et tout point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ , on note  $X_{(x)}$ ,  $X_{(x)}^h$  et  $\widehat{X}_{(x)}$  le localisé, l'hensélisé et le complété de  $X$  en  $x$ . De même, l'on note  $X_{(\bar{x})}$  l'hensélisé strict de  $X$  en  $\bar{x}$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ , et  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  deux points géométriques au dessus de  $x$  et  $y$ .

**DÉFINITION 2.1.1** ([SGA 4 VII 7.2]). Un morphisme de spécialisation  $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$  est la donnée d'un  $X$ -morphisme  $X_{(\bar{x})} \rightarrow X_{(\bar{y})}$  entre hensélisés stricts.

D'après [SGA 4 VII 7.4], la donnée d'une spécialisation  $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$  est équivalente à la donnée d'un  $X$ -morphisme  $\bar{x} \rightarrow X_{(\bar{y})}$ .

**DÉFINITION 2.1.2.** Soit  $r \in \mathbf{N}$ . On dit qu'une spécialisation  $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$  est une *spécialisation de codimension  $r$*  si l'adhérence de l'image de  $\bar{x}$  dans  $X_{(\bar{y})}$  est un schéma de dimension  $r$ .

On dit que  $y$  est une *spécialisation étale immédiate* de  $x$  s'il existe une spécialisation  $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$  qui soit de codimension 1.

On dit que  $y$  est une *spécialisation Zariski immédiate* de  $x$  si  $y \in \overline{\{x\}}$  et si le localisé en  $y$  de l'adhérence de  $x$  est de dimension 1.

Si  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $x$ , on dit également que  $x$  est une *générisation étale immédiate* de  $y$ . Désignons par  $f : X_{(\bar{y})} \rightarrow X_{(y)}$  le morphisme d'hensélisation stricte. Les générisations étales immédiates de  $y$  sont alors les images par  $f$  des points  $x' \in X_{(\bar{y})}$  tels que  $\dim(\overline{\{x'\}}) = 1$ .

Avant d'examiner plus en détail ces notions, on rappelle le fait facile suivant que nous utiliserons implicitement plus bas : si  $f : X \rightarrow S$  est un morphisme plat,  $f$  envoie les points maximaux de  $X$  sur des points maximaux de  $S$ , autrement dit toute composante irréductible de  $X$  domine une composante irréductible de  $S$ .

Si  $x$  et  $y$  sont deux points d'un schéma noëthérien  $X$  tels que  $y \in \overline{\{x\}}$  (au sens habituel, c'est dire que  $y$  est une spécialisation de  $x$  ou encore que  $x$  est une générisation de  $y$ ), alors  $y$  est une spécialisation Zariski (resp. étale) immédiate de  $x$  si et seulement si c'est le cas dans  $\overline{\{x\}}_{(y)}$ . Pour certaines considérations, ceci permet de supposer que  $X$  est local intègre de point générique  $x$  et de point fermé  $y$ . Dans ce cas,  $y$  est spécialisation Zariski immédiate de  $x$  si et seulement si  $\dim(X) = 1$ . Dans le cas étale, cela se lit sur l'hensélisé strict :

**PROPOSITION 2.1.3.** *Si  $x$  et  $y$  sont deux points d'un schéma noëthérien  $X$ , le point  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $x$  si et seulement si  $y \in \overline{\{x\}}$  et que le hensélisé strict en un point géométrique au-dessus de  $y$  de l'adhérence de  $x$  possède une composante irréductible de dimension 1.*

*Démonstration.* On se ramène au cas particulier  $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$  envisagé plus haut. Le point  $y$  est une spécialisation étale immédiate si et seulement s'il existe un

point  $\tilde{x}$  de  $X_{(\bar{y})}$  au-dessus de  $x$  tel que l'adhérence de  $\tilde{x}$  dans  $X_{(\bar{y})}$  soit de dimension 1. Cela équivaut comme il est énoncé ici que  $X_{(\bar{y})}$  possède une composante irréductible de dimension 1. En effet, si on note  $\tilde{x}$  le point générique de  $C$ , par l'argument de platitude énoncé plus haut,  $C$  domine  $X$ , c'est-à-dire que  $\tilde{x}$  est au-dessus de  $x$ . Inversement, si  $\tilde{x}$  est un point au-dessus de  $x$  dont l'adhérence dans  $X_{(\bar{y})}$  soit de dimension 1, on peut noter  $C$  une composante irréductible de  $X_{(\bar{y})}$  contenant  $\tilde{x}$ . Le point générique de  $C$  et  $\tilde{x}$  étant tous les deux au-dessus de  $x$ , ils sont égaux puisque l'un est une généralisation de l'autre et que les fibres de  $X_{(\bar{y})} \rightarrow X$  sont discrètes.  $\square$

**PROPOSITION 2.1.4.** *Soit  $X$  un schéma noëthérien. Une spécialisation Zariski immédiate entre points de  $X$  est une spécialisation étale immédiate, et la réciproque est vraie si  $X$  est universellement caténaire.*

On peut supposer que  $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$  comme précédemment. Pour l'implication, on suppose que  $\dim(X) = 1$  et on veut montrer que  $X_{(\bar{y})}$  possède une composante irréductible de dimension 1. En fait, toutes les composantes irréductibles de  $X_{(\bar{y})}$  sont de dimension 1. En effet, le schéma  $X_{(\bar{y})}$  est local et tout point de  $X_{(\bar{y})}$  autre que  $\bar{y}$  appartient à la fibre de  $x$  pour le morphisme « pro-étale »  $X_{(\bar{y})} \rightarrow X$ . L'espace topologique sous-jacent à  $X_{(\bar{y})} - \{\bar{y}\}$  est donc fini, discret (et non vide). Ceci implique que toute composante irréductible de  $X_{(\bar{y})}$  est de dimension 1. Pour la réciproque, nous utiliserons deux lemmes :

**LEMME 2.1.5.** *Soit  $X$  un schéma local noëthérien hensélien de point fermé  $y$ . Soit  $\bar{y}$  un point géométrique au-dessus de  $y$ . Alors,  $X$  possède une composante irréductible de dimension 1 si et seulement si le hensélisé strict  $X_{(\bar{y})}$  en possède une.*

*Démonstration.* Si  $C$  est une composante irréductible de dimension 1 de  $X_{(\bar{y})}$ , son image ensembliste dans  $X$  est fermée car  $p: X_{(\bar{y})} \rightarrow X$  est entier. Comme  $p$  est plat,  $p(C)$  est une composante irréductible de  $X$  contenant exactement deux points donc  $\dim(p(C)) = 1$ . Inversement, la surjectivité et la platitude de  $p$  impliquent que si  $D \subset X$  est une composante irréductible de dimension 1, il existe une composante irréductible  $C$  de  $X_{(\bar{y})}$  telle que  $p(C) = D$ . On a bien sûr  $\dim(C) \geq 1$ . Soit  $z \in C$  un point qui ne soit pas le point générique de  $C$ . Le point  $p(z)$  ne peut pas être le point générique de  $D$  car sinon la fibre générique de  $p$  ne serait pas discrète. C'est donc que  $p(z)$  est le point fermé de  $D$ . Le fait que  $p^{-1}(y)$  soit discret implique alors que  $z$  ne peut être que le point fermé de  $C$ . Le schéma local intègre  $C$  possède donc exactement deux points :  $\dim(C) = 1$ .  $\square$

**LEMME 2.1.6.** *Soit  $X$  un schéma local noëthérien. Si  $X$  possède une composante irréductible de dimension 1, alors son complété  $\widehat{X}$  aussi et la réciproque est vraie si  $X$  est universellement caténaire.*

*Démonstration.* Commençons par le cas où  $X$  est intègre. Comme  $X$  et  $\widehat{X}$  ont la même dimension (cf. [Zariski & Samuel, 1975, chap. VIII, §9]), si  $\dim(X) = 1$ , alors  $\dim(\widehat{X}) = 1$ . Un schéma local de dimension 1 n'a bien sûr que des composantes irréductibles de dimension 1. Inversement, si  $X$  est universellement caténaire, d'après le théorème 1.2.2, les composantes irréductibles de  $\widehat{X}$  ont toutes la même dimension. Si l'une d'entre elles est de dimension 1, le schéma  $\widehat{X}$  est lui aussi de dimension 1, et alors  $\dim(X) = \dim(\widehat{X}) = 1$ .



Dans le cas général, notons  $X_i$  les composantes irréductibles de  $X$ . Pour tout  $i$ , le produit fibré  $X_i \times_X \widehat{X}$  s'identifie à  $\widehat{X}_i$  (voir [SGA 1 IV 3]). C'est un fait que les composantes irréductibles des différents  $\widehat{X}_i$  sont exactement les composantes irréductibles de  $\widehat{X}$  : ce sont des parties fermées irréductibles recouvrant  $\widehat{X}$  et aucune d'entre elles n'est contenue dans une autre (ceci se déduit du fait que chaque composante irréductible de  $\widehat{X}_i$  domine  $X_i$ ). Il est dès lors évident que l'énoncé pour  $X$  résulte de l'énoncé pour les schémas locaux intègres  $X_i$ .  $\square$

Montrons la réciproque énoncée dans la proposition 2.1.4. Soit  $X$  un schéma local noëthérien intègre universellement caténaire de point générique  $x$  et de point fermé  $y$ . On suppose que  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $x$ . D'après la proposition 2.1.3, cela signifie que  $X_{(\bar{y})}$  possède une composante irréductible de dimension 1, ce qui équivaut d'après le lemme 2.1.5 à dire que le hensélisé  $X_{(\bar{y})}^h$  possède une composante irréductible de dimension 1. Le complété  $\widehat{X}$  de  $X$  est aussi celui de  $X_{(\bar{y})}^h$ , le sens facile du lemme 2.1.6 appliqué à  $X_{(\bar{y})}^h$  montre que  $\widehat{X}$  possède une composante irréductible de dimension 1. La réciproque de ce lemme appliquée au schéma universellement caténaire  $X$  montre que  $X$  possède une composante irréductible de dimension 1. Ceci montre que  $y$  est une spécialisation Zariski immédiate de  $x$ .

Si le schéma  $X$  est quasi-excellent, on peut alors lire les spécialisations étales d'un point  $x$  de  $X$  dans le complété de  $X$  en  $x$  :

**PROPOSITION 2.1.7.** *Soit  $X$  un schéma quasi-excellent. Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ . On suppose que  $y \in \overline{\{x\}}$ . Notons  $c : \widehat{X}_{(y)} \rightarrow X_{(y)}$  le morphisme de complétion. Le point  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $x$  si et seulement si  $c^{-1}(\overline{\{x\}})$  possède une composante irréductible de dimension 1.*

*Démonstration.* On peut supposer que  $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$ . Le point  $y$  est une spécialisation étale immédiate de  $X$  si et seulement si  $X_{(\bar{y})}$  possède une composante irréductible de dimension 1, c'est-à-dire, d'après le lemme 2.1.5 que  $X_{(\bar{y})}^h$  en possède une. Comme  $X_{(\bar{y})}^h$  est universellement caténaire (cf. proposition 1.3.2), cela équivaut encore d'après le lemme 2.1.6 à dire que  $\widehat{X}$  possède une composante irréductible de dimension 1.  $\square$

**DÉFINITION 2.1.8.** On appelle *fonction de dimension* sur  $X$  toute fonction  $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que pour toute spécialisation étale immédiate  $x \rightsquigarrow y$  entre points de  $X$ , on ait

$$\delta(y) = \delta(x) - 1.$$

La notion de fonction de dimension ne voit pas les éléments nilpotents :  $\delta$  est une fonction de dimension sur  $X$  si et seulement si elle induit une fonction de dimension sur le sous-schéma réduit  $X^{\text{red}}$ . De plus si  $U \xrightarrow{i} X$  est un morphisme étale et  $\delta$  est une fonction de dimension sur  $X$ ,  $\delta \circ i$  définit une fonction de dimension sur  $U$ . Plus précisément, l'ensemble des fonctions de dimension sur les  $X$ -schémas étales définit un faisceau étale sur  $X$ . La différence entre deux fonctions de dimension sur  $X$  est une fonction invariante par spécialisations quelconques, donc une fonction localement constante. Nous montrerons plus loin que si  $X$  est

quasi-excellent, des fonctions de dimension existent localement pour la topologie étale sur  $X$  et que les fonctions de dimension forment un  $\mathbf{Z}$ -torseur étale.

**2.2. Fonctions de dimension et universelle caténarité.** Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

**THÉORÈME 2.2.1** (Gabber). *Un schéma noëthérien est universellement caténaire si et seulement s'il possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

Le théorème résulte de la conjonction du corollaire 2.2.4 et de la proposition 2.2.6 ci-dessous.

**PROPOSITION 2.2.2.** *Soit  $X$  un schéma intègre universellement caténaire. La fonction  $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par  $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$  est une fonction de dimension sur  $X$ .*

*Démonstration.* En vertu de la proposition 2.1.4, comme  $X$  est universellement caténaire, il suffit de montrer que  $\delta(y) = \delta(x) - 1$  pour toute spécialisation Zariski immédiate  $x \rightsquigarrow y$ . Comme  $X$  est caténaire intègre, on a

$$\dim(\mathcal{O}_{X,y}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) + \dim(\mathcal{O}_{\overline{\{y\}},x}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) + 1.$$

□

**REMARQUE 2.2.3.** Si  $X$  n'est pas supposé intègre, la fonction  $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$  n'est pas forcément une fonction de dimension comme le montre l'exemple où  $X$  est obtenu par recollement en un point d'une droite et d'un plan.

**COROLLAIRE 2.2.4.** *Tout schéma universellement caténaire admet des fonctions de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

*Démonstration.* Soit  $X$  un schéma universellement caténaire. Soit  $x \in X$ . Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert de  $x$  pouvant être muni d'une fonction de dimension. L'espace topologique  $X$  est réunion de ses composantes irréductibles  $X_1, \dots, X_n$ . Quitte à remplacer  $X$  par l'ouvert complémentaire des composantes  $X_i$  ne contenant pas  $x$ , on peut supposer que  $x$  appartient à toutes les composantes  $X_i$ . Pour tout  $0 \leq i \leq n$ , notons  $\mathcal{F}_i$  l'ensemble des fonctions de dimension sur  $X_i$ . D'après la proposition 2.2.2, cet ensemble est non vide et est un toseur sous  $\mathbf{Z}$ . On choisit un élément  $\delta_i \in \mathcal{F}_i$  qui vaut 0 sur le point  $x$ . Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , la fonction  $\delta_i - \delta_j$  est localement constante sur  $X_i \cap X_j$  et vaut 0 au point  $x$ . Soit  $F_{i,j}$  le fermé de  $X$ , réunion des composantes connexes de  $X_i \cap X_j$  ne contenant pas  $x$ . Soit  $U$  le complémentaire dans  $X$  de la réunion des  $F_{i,j}$ . Les fonctions  $\delta_i$  se recollent en une fonction de dimension sur  $U$ . □

Démontrons une réciproque partielle du corollaire 2.2.4.

**LEMME 2.2.5.** *Un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est caténaire.*

*Démonstration.* Pour montrer la caténarité, on peut supposer que le schéma  $S$  possède une fonction de dimension  $\delta$ . Supposons que  $X \subset Y$  sont des fermés irréductibles de points génériques respectifs  $x$  et  $y$ . Choisissons une chaîne de spécialisations Zariski immédiates  $y = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x_d = x$  de longueur maximale. Par définition de la codimension, on a  $\text{codim}(X, Y) = d$  et par définition

des fonctions de dimension, compte tenu du sens facile de la proposition 2.1.4, on obtient  $\delta(x) = \delta(y) - d$ , d'où  $\text{codim}(X, Y) = \delta(y) - \delta(x)$ .

Maintenant, si  $X \subset Y \subset Z$  sont des fermés irréductibles, on a :

$$\begin{aligned}\delta(y) - \delta(x) &= \text{codim}(X, Y), \\ \delta(z) - \delta(y) &= \text{codim}(Y, Z), \\ \delta(z) - \delta(x) &= \text{codim}(X, Z).\end{aligned}$$

On en déduit  $\text{codim}(X, Z) = \text{codim}(X, Y) + \text{codim}(Y, Z)$  d'où la caténarité.  $\square$

Grâce au théorème 1.2.2, on peut remplacer « caténaire » par « universellement caténaire » dans le lemme 2.2.5 :

**PROPOSITION 2.2.6.** *Un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est universellement caténaire.*

*Démonstration.* On peut supposer qu'un tel schéma  $S$  est local et possède une fonction de dimension  $\delta$ . Notons  $S^h$  son hensélisé. La fonction  $\delta$  induit une fonction de dimension  $\delta^h$  sur  $S^h$ . D'après le lemme 2.2.5 appliqué à  $S^h$  et à  $\delta^h$ , le schéma  $S^h$  est caténaire. D'après la proposition 1.3.1, il est universellement caténaire. Le théorème 1.2.2 montre alors que  $S^h$  est formellement caténaire. Par conséquent,  $S$  est formellement caténaire donc également universellement caténaire.  $\square$

**2.3. Existence locale pour la topologie étale.** Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.3.1 (Gabber).** *Tout schéma quasi-excellent possède des fonctions de dimension localement pour la topologie étale.*

Une application répétée du lemme suivant (variante de l'argument du corollaire 2.2.4) permet de montrer que si l'énoncé du théorème est vrai pour les composantes irréductibles d'un schéma noëthérien  $X$ , alors le théorème vaut aussi pour  $X$ . Plus loin, on pourra ainsi supposer que  $X$  est intègre.

**LEMME 2.3.2.** *Soit  $X$  un schéma noëthérien dont l'espace topologique sous-jacent soit réunion de deux sous-schémas fermés  $X_1$  et  $X_2$ . Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X_1 \cap X_2$ . On suppose que pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , il existe un voisinage étale  $U_i$  de  $\bar{x}$  dans  $X_i$  tel que  $U_i$  admette une fonction de dimension. Alors, il existe un voisinage étale  $U$  de  $\bar{x}$  dans  $X$  tel que  $U$  admette une fonction de dimension.*

*Démonstration.* Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on choisit un voisinage étale  $U_i$  de  $\bar{x}$  dans  $X_i$  tel que  $U_i$  admette une fonction de dimension  $\delta_i$ . On se donne un point géométrique distingué  $\bar{u}_i$  au-dessus de  $\bar{x}$  et on peut supposer que  $\delta_i(\bar{u}_i) = 0$ . D'après [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.1.1], quitte à remplacer  $U_i$  par un voisinage ouvert de  $\bar{u}_i$ , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale  $\widetilde{U}_i \rightarrow X$  et un isomorphisme  $\widetilde{U}_i \times_X X_i \simeq U_i$ . On peut former le produit fibré  $V = \widetilde{U}_1 \times_X \widetilde{U}_2$ . Notons  $\pi: V \rightarrow X$  la projection et  $\bar{v}$  un point géométrique de  $V$  au-dessus de  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$ . Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , la projection de  $V$  sur le facteur  $\widetilde{U}_i$  induit un morphisme étale  $\pi^{-1}(X_i) \rightarrow U_i$ . Par composition avec ce morphisme étale, la fonction de dimension  $\delta_i$  sur  $U_i$  induit une fonction de dimension  $\tilde{\delta}_i$  sur le sous-schéma fermé  $\pi^{-1}(X_i)$  de  $V$  et elle vérifie  $\tilde{\delta}_i(\bar{v}) = 0$ . Ces fonctions de dimensions  $\tilde{\delta}_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  se recollent sur l'ouvert  $U$

complémentaire dans  $V$  de la réunion des composantes connexes de  $\pi^{-1}(X_1 \cap X_2)$  ne contenant pas  $v$ .  $\square$

Avant de traiter le cas des schémas intègres, commençons par celui des schémas normaux :

**PROPOSITION 2.3.3.** *Soit  $X$  un schéma normal quasi-excellent. La fonction  $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par  $\delta(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$  est une fonction de dimension.*

*Démonstration.* On peut supposer de plus que  $X$  est local. Notons  $Y$  son hensélisé et  $h: Y \rightarrow X$  le morphisme de hensélisation. D'après le théorème I-8.1 et les commentaires subséquents,  $Y$  est lui aussi quasi-excellent. D'après la proposition 1.3.2,  $Y$  est universellement caténaire. Par ailleurs, comme le morphisme  $Y \rightarrow X$  est régulier, la normalité de  $X$  implique celle de  $Y$  (cf. [ÉGA IV<sub>2</sub> 6.5.4]). Le schéma local  $Y$  est donc intègre et universellement caténaire, l'opposé de la codimension définit une fonction de dimension  $\delta': Y \rightarrow \mathbf{Z}$ . Comme une spécialisation étale immédiate entre points de  $X$  se relève pour ainsi dire par définition en une spécialisation étale immédiate de points de  $Y$ , pour montrer que  $\delta$  est une fonction de dimension sur  $X$ , il suffit de montrer que pour tout  $y \in Y$ , si on note  $x = h(y)$ , on a  $\delta(x) = \delta'(y)$ . Il s'agit donc de montrer que  $\dim(Y_{(y)}) = \dim(X_{(x)})$ . Comme la dimension d'un anneau local noëthérien ne change pas par complétion (et donc par hensélisation), il suffit de montrer que  $\dim(Y_{(y)}^h) = \dim(X_{(x)}^h)$ . Les deux schémas locaux excellents  $Y_{(y)}^h$  et  $X_{(x)}^h$  ayant le même hensélisé strict, ils ont bien la même dimension d'après le lemme suivant :  $\square$

**LEMME 2.3.4.** *Soit  $X$  un schéma local excellent. Notons  $\bar{x}$  un point géométrique au-dessus du point fermé  $x$  de  $X$ . Alors,  $\dim(X) = \dim X_{(\bar{x})}$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 2.2.1, il existe une fonction de dimension  $\delta$  sur  $X$ . On peut supposer qu'elle vérifie  $\delta(x) = 0$ . Par composition avec le morphisme  $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$ , on obtient une fonction de dimension  $\delta'$  sur  $X_{(\bar{x})}$ . En utilisant le lien entre fonction de dimension et codimension énoncé dans la démonstration du lemme 2.2.5, il est évident que  $\dim(X)$  (resp.  $\dim(X_{(\bar{x})})$ ) est le maximum atteint par la fonction  $\delta$  sur  $X$  (resp. par  $\delta'$  sur  $X_{(\bar{x})}$ ). Comme  $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$  est surjectif, le maximum de  $\delta$  est le même que celui de  $\delta'$ , donc  $\dim(X) = \dim(X_{(\bar{x})}$ .  $\square$

Revenons au cas du théorème 2.3.1 où  $X$  est supposé intègre et quasi-excellent, et notons  $Y$  son normalisé. Le morphisme  $p : Y \rightarrow X$  est fini et surjectif, donc de descente cohomologique universelle. Notons  $\delta$  une fonction de dimension sur  $Y$ ; son existence est assurée par la proposition 2.3.3. Soit  $p_1$  et  $p_2$  les deux projections  $Y \times_X Y \rightarrow Y$ . La fonction

$$p_1^* \delta - p_2^* \delta : Y \times_X Y \longrightarrow \mathbf{Z}$$

définit un 1-cocycle de Čech, donc une classe  $[p_1^* \delta - p_2^* \delta]$  dans  $H_{\text{ech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z})$ . D'après la théorie de la descente cohomologique, il existe une injection naturelle

$$H_{\text{ech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z}).$$

La classe  $[p_1^* \delta - p_2^* \delta]$  définit donc une classe d'isomorphisme de  $\mathbf{Z}$ -torseurs étales sur  $X$ . Il résulte alors immédiatement de la proposition suivante que  $X$  admet une fonction de dimension localement pour la topologie étale :

**PROPOSITION 2.3.5.** *Soit  $U$  un schéma étale sur  $X$ . L'annulation de la classe  $[p_1^* \delta - p_2^* \delta]|_U$  dans  $H^1(U, \mathbf{Z})$  entraîne l'existence d'une fonction de dimension sur  $U$ .*

*Démonstration.* En utilisant la compatibilité des constructions au changement de base étale  $U \rightarrow X$ , on peut supposer que  $U = X$ . L'annulation de  $[p_1^* \delta - p_2^* \delta]$  dans  $H_{\text{ech}}^1(Y \rightarrow X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z})$  signifie qu'il existe une fonction *localement constante*  $\gamma : Y \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que  $p_1^* \delta - p_2^* \delta = p_1^* \gamma - p_2^* \gamma$ . Autrement dit, quitte à remplacer  $\delta$  par  $\delta - \gamma$ , on peut supposer que  $p_1^* \delta = p_2^* \delta$ . Ainsi,  $\delta : Y \rightarrow \mathbf{Z}$  se descend en une fonction  $\delta' : X \rightarrow \mathbf{Z}$ .

Pour conclure, il s'agit de montrer que si  $p : Y \rightarrow X$  est un morphisme fini surjectif entre schémas quasi-excellents, que  $\delta' : X \rightarrow \mathbf{Z}$  est une fonction et  $\delta = \delta' \circ p$ , alors  $\delta'$  est une fonction de dimension sur  $X$  si  $\delta$  est une fonction de dimension sur  $Y$ . Pour cet énoncé, on peut supposer que  $X$  est local hensélien quasi-excellent, donc universellement caténaire (cf. proposition 1.3.2), ce qui permet d'appliquer la proposition 2.1.4. Pour montrer que  $\delta'$  est une fonction de dimension sur  $X$ , il suffit alors de savoir qu'au-dessus d'une spécialisation Zariski immédiate  $s \rightsquigarrow t$  de points de  $X$ , il existe une spécialisation Zariski immédiate  $s' \rightsquigarrow t'$  de points de  $Y$ .  $\square$

**2.4. Existence globale de fonctions de dimension.** Suivant [ÉGA 0<sub>IV</sub> 14.2.1], on dit qu'un schéma noëthérien  $X$  est équicodimensionnel si ses points fermés ont tous la même codimension (qui est alors égale à  $\dim(X)$ ).

**EXEMPLE 2.4.1.** Les schémas de type fini équidimensionnels sur un corps  $k$  ou sur  $\mathbf{Z}$  sont équicodimensionnels : il est classique que dans cette situation, on a  $\dim(X) = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$  pour tout point fermé  $x$ . Les schémas locaux sont équicodimensionnels car ils possèdent un unique point fermé. Si  $S = \text{Spec}(\mathbf{R})$  est un trait d'uniformisante  $\pi$ , le schéma  $\mathbf{A}_S^1$  n'est pas équicodimensionnel. En effet, il existe un point fermé de  $\mathbf{A}_S^1$  au-dessus du point générique de  $S$  : il suffit d'écrire  $\mathbf{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathbf{R}[t])$  et de considérer  $\mathfrak{m} = (\pi t - 1)$ , qui est un idéal maximal de corps résiduel  $\text{Frac}(\mathbf{R})$ .

Le lemme suivant est inspiré de [ÉGA 0<sub>IV</sub> 14.3.3]<sup>i</sup>.

**LEMME 2.4.2.** *Soit  $X$  un schéma équidimensionnel caténaire dont les composantes irréductibles sont équicodimensionnelles. Pour tout  $x \in X$ , on a*

$$\dim(X) = \dim(\overline{\{x\}}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x}).$$

**REMARQUE 2.4.3.** En particulier, cette égalité est vérifiée pour tout schéma intègre local caténaire. D'après [Matsumura, 1989, th. 31.4], si  $X$  est intègre local noëthérien et si pour tout  $x \in X$ , on a  $\dim(X) = \dim(\overline{\{x\}}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x})$ , alors  $X$  est caténaire.

Le lemme 2.4.2 et la proposition 2.2.2 impliquent le résultat suivant.

**COROLLAIRE 2.4.4.** *Soit  $X$  un schéma intègre, équicodimensionnel et universellement caténaire. La fonction  $\delta : X \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par  $\delta(x) = \dim(\overline{\{x\}})$  est une fonction de dimension sur  $X$ .*

<sup>i</sup>Gabber remarque que la proposition [ÉGA 0<sub>IV</sub> 14.3.3] est fautive. Les assertions a, c et d de *loc. cit.* sont équivalentes entre elles et impliquent b mais ne lui sont pas équivalentes. Il faut remplacer b par la condition «  $X$  est caténaire équidimensionnel et ses composantes irréductibles sont équicodimensionnelles ». Gabber donne comme contre-exemple le spectre du localisé de  $k[x, y, z, w]/(xz, xw)$  en le complémentaire de l'union des idéaux premiers  $(x - 1, y)$  et  $(x, z, w)$  avec  $k$  un corps.

Les conclusions du corollaire sont prises en défaut si  $X$  n'est pas équicodimensionnel. Soient par exemple  $S = \text{Spec}(\mathbb{R})$  un trait d'uniformisante  $\pi$  et  $X = \mathbf{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathbb{R}[t])$ . Si l'on note  $x$  le point fermé de  $X$  correspondant à l'idéal maximal  $(\pi t - 1)$  et  $\eta$  le point générique de  $\mathbf{A}_S^1$ , alors la spécialisation  $\eta \rightsquigarrow x$  est immédiate et pourtant  $\dim(\overline{\{x\}}) = 0$  et  $\dim(\overline{\{\eta\}}) = 2$ .

**COROLLAIRE 2.4.5.** *Soit  $X$  un schéma qui est soit de type fini sur un corps, soit de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , ou soit local universellement caténaire. La fonction définie par  $\delta(x) = \dim(\overline{\{x\}})$  est une fonction de dimension sur  $X$ .*

*Démonstration.* Le schéma  $X$  est universellement caténaire. D'après le corollaire 2.4.4, la fonction  $\delta$  est une fonction de dimension sur chaque composante irréductible de  $X$ . Cette fonction est définie globalement donc est une fonction de dimension sur  $X$ .  $\square$

**2.5. Fonction de dimension induite.** Soient  $Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas et  $\delta_X$  une fonction de dimension sur  $X$ . Dans certains cas nous pouvons construire une fonction de dimension  $\delta_Y$  induite sur  $Y$ . On admet la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.5.1** ([Matsumura, 1980a], 14.C). *Soient  $X$  un schéma noëthérien intègre universellement caténaire,  $Y$  un schéma intègre et  $Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini dominant. Soient  $k(X)$  et  $k(Y)$  les corps de fractions respectifs de  $X$  et  $Y$ , soient  $y$  un point de  $Y$  et  $x$  son image dans  $X$ , et soient  $k(y)$  et  $k(x)$  leurs corps résiduels. On a*

$$\dim(\mathcal{O}_{Y,y}) - \text{degtr}(k(Y)/k(X)) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \text{degtr}(k(y)/k(x)) .$$

**COROLLAIRE 2.5.2.** *Soient  $X$  un schéma noëthérien qui possède une fonction de dimension  $\delta_X$  et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini. La fonction  $\delta_Y : Y \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par*

$$\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) + \text{degtr}(k(f(y))/k(y))$$

*est une fonction de dimension sur  $Y$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $X$  et  $Y$  sont intègres et que  $f$  est dominant. D'après la proposition 2.2.6,  $X$  est universellement caténaire et d'après la proposition 2.2.2,  $x \mapsto -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$  est une fonction de dimension sur  $X$ . Comme les fonctions de dimension forment un  $\mathbf{Z}$ -torseur, on peut supposer que  $\delta_X(x) = -\dim(\mathcal{O}_{X,x})$  pour tout  $x \in X$ .

Le corollaire 2.5.1 montre que  $\delta_Y(y) = -\dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \text{degtr}(k(Y)/k(X))$  et la proposition 2.2.2 montre que  $y \mapsto -\dim(\mathcal{O}_{Y,y})$  est une fonction de dimension sur  $Y$ . Ainsi,  $\delta_Y$  est une fonction de dimension sur  $Y$ .  $\square$

Avant d'établir la functorialité des fonctions de dimension vis-à-vis des morphismes réguliers entre schémas excellents, démontrons un énoncé de changement de base par un morphisme régulier en cohomologie étale. Ce lemme est une simple conséquence du théorème de Popescu I-10.3 et du théorème de changement de base par un morphisme lisse [SGA 4 XVI 1.2].

**LEMME 2.5.3.** *Soient*

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{g'} & T \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas,  $n$  un entier inversible sur  $S$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau étale en  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur  $T$ . Supposons que  $f$  est quasi-compact et quasi-séparé et que  $g$  est un morphisme régulier entre schémas noëthériens. La flèche naturelle de changement de base

$$g^*Rf_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} Rf'_*g'^*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* D'après le théorème de Popescu, il existe un ensemble ordonné filtrant  $I$  et une famille de schémas  $S_i$  indexée par  $I$ , tels que  $S_i$  soit lisse sur  $S$  pour tout  $i \in I$  et que  $S' = \lim_i S_i$ . Il existe donc pour tout  $i \in I$  un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} T' & \xrightarrow{h'_i} & T_i & \xrightarrow{g'_i} & T \\ \downarrow f' & & \downarrow f_i & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{h_i} & S_i & \xrightarrow{g_i} & S \end{array}$$

On conclut grâce à la suite d'isomorphismes suivante pour tout  $q \geq 0$  :

$$\begin{aligned} R^q f'_* g'^*(\mathcal{F}) &\xleftarrow{\sim} \operatorname{colim}_i h_i^* R^q f_{i*} g_i'^*(\mathcal{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} \operatorname{colim}_i g^* R^q f_*(\mathcal{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} g^* R^q f_*(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

Le premier de ces isomorphismes résulte du théorème de passage à la limite [SGA 4 VII 5.11], et le second du théorème de changement de base par le morphisme lisse  $g_i$  [SGA 4 XVI 1.2].  $\square$

Nous prouvons à présent qu'un morphisme régulier entre schémas excellents permet d'induire des fonctions de dimension.

**PROPOSITION 2.5.4.** Soient  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre schémas excellents et  $\delta_X$  une fonction de dimension sur  $X$ . La fonction  $\delta_Y : Y \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par

$$\delta_Y(\mathbf{y}) = \delta_X(f(\mathbf{y})) - \dim \left( \mathcal{O}_{Y_{f(\mathbf{y})}, \mathbf{y}} \right)$$

est une fonction de dimension sur  $Y$ .

*Démonstration.* Comme la vérification est locale, il n'y a pas de mal à supposer  $X$  et  $Y$  strictement locaux et  $f$  local. Soit  $\delta$  une fonction de dimension sur  $Y$ ; son existence est assurée par le théorème 2.2.1. Il suffit de montrer que  $\delta_Y - \delta$  est une fonction constante sur  $Y$ . Les fibres de  $f$  sont régulières donc universellement caténares d'après 1.1.3. La proposition 2.2.2 montre que la fonction qui à  $\mathbf{y} \in Y$  associe

$$-\dim \left( \mathcal{O}_{Y_{f(\mathbf{y})}, \mathbf{y}} \right)$$

induit une fonction de dimension sur chacune des fibres de  $f$ . La fonction  $\delta_Y - \delta$  est donc localement constante sur chaque fibre de  $f$ . Il résulte du lemme 2.5.3 que ces fibres sont connexes : en effet, on a  $H^0(f^{-1}(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^0(x, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  pour tout  $x \in X$  et tout entier  $n$  inversible sur  $X$ . La fonction  $\delta_Y - \delta$  est donc constante sur les fibres de  $f$  et descend à  $X$ . Il suffit de montrer que  $\gamma = \delta_Y - \delta$  est localement constante sur  $X$ . Une façon de calculer la valeur de  $\gamma$  en un point  $s$  de  $X$  consiste à considérer le point générique  $\eta_s$  du schéma régulier connexe  $f^{-1}(s)$ , de sorte que  $\gamma(s) = \delta_X(s) - \delta(\eta_s)$ . Soit  $s' \rightsquigarrow s$  une spécialisation Zariski immédiate entre deux points de  $X$ . Il s'agit de montrer que  $\gamma(s) = \gamma(s')$ . Vu que  $\delta_X$  et  $\delta$  sont

des fonctions de dimension sur  $X$  et  $Y$  respectivement, pour montrer cela, il suffit de savoir que  $\eta_{s'}$  est une spécialisation immédiate de  $\eta_s$ . Pour montrer cela, quitte à remplacer  $X$  par le localisé en  $s$  de l'adhérence de  $s'$ , on peut supposer que  $X$  est local intègre de dimension 1, de point générique  $s'$  et de point fermé  $s$ . Il s'agit alors de montrer que la fibre  $f^{-1}(s)$  est de codimension 1 dans  $Y$ , ce qui résulte facilement du *Hauptidealsatz*.  $\square$

**2.6. Contre-exemple.** Rappelons l'exemple de [ÉGA II 5.6.11] d'un schéma caténaire non universellement caténaire. Soient  $k_0$  un corps et  $k$  une extension purement transcendante de  $k_0$  de degré de transcendance infini. Notons  $S = k[X]_{(X)}$  le localisé de l'anneau de la droite affine sur  $k$  en l'origine et  $V = S[T]$ . Les idéaux maximaux  $\mathfrak{m} = (X, T)$  et  $\mathfrak{m}' = (XT - 1)$  de  $V$  sont respectivement de hauteur 2 et 1, et il existe un isomorphisme  $\phi : V/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} V/\mathfrak{m}'$ . Posons  $C = \{v \in V \mid \phi(v \bmod \mathfrak{m}') = v \bmod \mathfrak{m}\}$ .  $C$  est un sous-anneau de  $V$  qui n'est pas de type fini sur  $k$  et dont le spectre est le quotient de  $\text{Spec}(V)$  par la relation d'équivalence identifiant  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}'$ . Il est intègre et contient l'idéal maximal  $\mathfrak{n}$  image réciproque de  $\mathfrak{m}$ .

**PROPOSITION 2.6.1.** *Le schéma  $\text{Spec}(C)$  est noëthérien, quasi-excellent, caténaire mais non universellement caténaire. Le point fermé correspondant à l'idéal maximal  $\mathfrak{n}$  de  $C$  est une spécialisation étale immédiate mais non Zariski immédiate du point générique de  $\text{Spec}(C)$ .*

*Démonstration.* Le caractère noëthérien est montré dans [ÉGA II 5.6.11] et le caractère quasi-excellent dans [ÉGA II 7.8.4]. Le schéma  $\text{Spec}(C)$  est caténaire d'après le corollaire 1.2.3 car il est de dimension 2. On montre qu'il n'est pas universellement caténaire en vérifiant que la dernière condition du théorème 1.2.2 est prise en défaut. En effet, le morphisme

$$\text{Spec}(V_{(\mathfrak{n})}) \rightarrow \text{Spec}(C_{(\mathfrak{n})})$$

est fini et la fibre du point fermé correspondant à  $\mathfrak{n}$  est constituée des points fermés correspondants à  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}'$ , qui sont de hauteur respective 1 et 2. Le schéma  $\text{Spec}(C)$  est intègre de dimension 2 donc  $\mathfrak{n}$  n'est pas une spécialisation Zariski immédiate du point générique.  $\square$



## Théorème de Lefschetz affine

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

### 1. Énoncé du théorème et premières réductions

#### 1.1. Énoncé.

**1.1.1.** Soient  $X$  un schéma muni d'une fonction de dimension  $\delta_X$  (XIV-2.1.8) et  $n$  un entier inversible sur  $X$ . Pour tout faisceau étale  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Z}/n$ -modules sur  $X$ ,

$$\delta_X(\mathcal{F}) = \sup \{ \delta_X(x), x \in X \mid \mathcal{F}_{\bar{x}} \neq 0 \}.$$

Rappelons (XIV-2.5.2) qu'un morphisme de type fini  $f : Y \rightarrow X$  induit une fonction de dimension sur  $Y$ ; nous la noterons ici  $f^*\delta_X$ . Le théorème principal de cet exposé est le suivant (voir aussi 0-7).

**THÉORÈME 1.1.2.** *Supposons le schéma  $X$  quasi-excellent et le morphisme  $f : Y \rightarrow X$  affine de type fini. Alors, pour tout faisceau constructible  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Z}/n$ -modules sur  $Y$ , on a :*

$$\delta_X(\mathbf{R}^q f_*(\mathcal{F})) \leq f^*\delta_X(\mathcal{F}) - q.$$

**REMARQUE 1.1.3.** Ce théorème a été déjà démontré en 1994 par O. Gabber lorsque  $X$  est de type fini sur un trait, cf. [Illusie, 2003]. La démonstration du théorème précédent procède notamment par réduction à ce cas.

#### 1.2. Reformulation et réductions.

**1.2.1.** Soient  $f$  et  $\mathcal{F}$  comme ci-dessus. La conclusion du théorème signifie que pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$  localisé en un point  $x$  et tout entier  $q > f^*\delta_X(\mathcal{F}) - \delta_X(x)$ , on a

$$(\mathbf{R}f_{*\mathcal{F}})_{\bar{x}} = H^q(Y_{(\bar{x})}, \mathcal{F}) = 0,$$

où l'on note  $Y_{(\bar{x})}$  le produit fibré  $Y \times_X X_{(\bar{x})}$ . Rappelons (XIV-2.4.5) que le schéma strictement local  $X_{(\bar{x})}$  peut être muni la fonction de dimension  $\delta_{X_{(\bar{x})}} : t \mapsto \dim(\overline{\{t\}})$  (XIV-2.4.5); c'est l'unique fonction de dimension nulle en  $x$ . Notons l'inégalité  $f^*\delta_X(\mathcal{F}) - \delta_X(x) \geq f_{(\bar{x})}^*\delta_{X_{(\bar{x})}}(\mathcal{F})$ , triviale dans le cas où  $\delta_X(x) = 0$ , auquel on peut se ramener. Ainsi, le théorème 1.1.2 est équivalent à l'énoncé suivant.

**COROLLAIRE 1.2.2.** *Supposons de plus le schéma  $X$  quasi-excellent, strictement local, muni de la fonction de dimension  $\delta_X : t \mapsto \dim(\overline{\{t\}})$ . Alors, pour tout faisceau constructible  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Z}/n$ -modules sur  $Y$ , on a :*

$$H^q(Y, \mathcal{F}) = 0 \text{ si } q > f^*\delta_X(\mathcal{F}).$$

**1.2.3.** Procédant comme en [SGA 4 XIV 4.4] pour se ramener au cas d'une immersion ouverte affine puis utilisant la méthode de la trace ([SGA 4 IX 5.5] ou [SGA 5 I 3.1.2]) pour se ramener au cas des coefficients constants (voir aussi XIII-3.7), on montre que le théorème est également équivalent au corollaire suivant. (On pourrait d'ailleurs supposer l'entier  $n$  premier.)

**COROLLAIRE 1.2.4.** Soient  $X$  un schéma strictement local quasi-excellent de dimension  $d$ ,  $U$  un ouvert affine de  $X$ , et  $n$  un entier inversible sur  $X$ . Alors,

$$H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } q > d.$$

**1.2.5. Réduction au cas complet.** Supposons dorénavant  $X$  strictement local quasi-excellent, de complété  $\widehat{X}$  en le point fermé, et fixons un ouvert affine  $U$  de  $X$ , dont on note  $\widehat{U}$  l'image inverse sur  $\widehat{X}$ . Le morphisme naturel de  $\widehat{X}$  dans  $X$  est régulier car  $X$  est quasi-excellent. En appliquant le lemme de changement de base par un morphisme régulier (XIV-2.5.3) au diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U} & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{X} & \longrightarrow & X \end{array}$$

on obtient  $H^q(\widehat{U}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$  pour tout  $q \geq 0$ . Voir également [Fujiwara, 1995, 7.1.1] pour une autre démonstration.

**1.2.6.** Dans les deux sections qui vont suivre, nous allons démontrer l'énoncé 1.2.4 dans le cas particulier où  $X$  est local noëthérien complet à corps résiduel séparablement clos.

## 2. Pureté, combinatoire des branches et descente

### 2.1. Pureté : rappel et une application.

**2.1.1.** Nous rappelons le théorème de pureté absolue démontré par O. Gabber ([Fujiwara, 2002]). Par convention, on considère le schéma vide comme un diviseur strictement à croisements normaux dont l'ensemble des branches est indexé par l'ensemble vide.

**THÉORÈME 2.1.2 (XVI-3.1.1).** Soient  $X$  un schéma régulier,  $Z$  un diviseur strictement à croisements normaux de complémentaire  $j : U = X \setminus Z \hookrightarrow X$  et de branches  $\{Z_i\}_{i \in I}$ , et  $n$  un entier inversible sur  $X$ . Il existe des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R^1 j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{Z_i}(-1) \\ R^q j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \bigwedge^q R^1 j_* (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

**2.1.3. Combinatoire des branches : notations.** Soient  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme entre schémas, et  $U$  un ouvert de  $X$ . Notons  $j : U \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte,  $j' : U' \hookrightarrow X'$  l'immersion ouverte qui s'en déduit par changement de base et  $Z$  et  $Z'$  les fermés complémentaires respectifs. Enfin on se donne un fermé  $F \subseteq Z$  dont on note  $F'$  l'image inverse.

**DÉFINITION 2.1.4.** On dit que  $(Z \hookrightarrow X)$  et  $(Z' \hookrightarrow X')$  ont même combinatoire le long de  $F$  si pour tout point géométrique  $\bar{z}'$  de  $F'$  d'image le point géométrique  $\bar{z}$  de  $F$ , les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) les schémas  $X_{(\bar{z})}$  et  $X'_{(\bar{z}')}$  sont réguliers ;
- (ii) le fermé  $Z_{(\bar{z})}$  est un diviseur à croisements normaux définis par des équations  $f_1, \dots, f_r$  ;
- (iii) les fonctions  $g^* f_1, \dots, g^* f_r$  forment une famille libre de  $m/m^2$ , où  $m$  est l'idéal maximal de  $Z'_{(\bar{z}')}$ .

**2.1.5.** Il résulte de (i) et (iii) ci-dessus que le fermé  $Z'_{(\bar{z}' )}$  est un diviseur à croisements normaux dans  $X'_{(\bar{z}' )}$ , de même codimension que  $Z_{(\bar{z})}$  dans  $X_{(\bar{z})}$ .

**2.1.6.** Lorsque  $X$  est un schéma sur une base  $S$ , et  $F$  est un fermé de ce dernier, on s'autorise à dire « ... le long de  $F$  » pour « ... le long de l'image inverse  $F \times_S X$  ».

**PROPOSITION 2.1.7.** *Supposons que  $(Z \hookrightarrow X)$  et  $(Z' \hookrightarrow X')$  aient même combinatoire le long d'un fermé  $F$  de  $X$ . Alors, pour tout entier  $n$  inversible sur  $X$ , le morphisme d'adjonction*

$$(Rj_{\star} \mathbf{Z}/n)_{|F'} \rightarrow (Rj'_{\star} \mathbf{Z}/n)_{|F'}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Quitte à localiser en des points géométriques  $\bar{z}'$  et  $\bar{z}$ , on peut supposer les schémas strictement locaux et le morphisme  $X' \rightarrow X$  local. Il faut alors montrer que  $R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n) \rightarrow R\Gamma(U', \mathbf{Z}/n)$  est un isomorphisme. D'après le théorème de pureté **2.1.2**, il suffit de montrer que le morphisme induit sur le  $H^1$  est un isomorphisme, ce qui résulte aussitôt de la structure de ces groupes et de ce que la classe associée à une branche  $Z_i = V(f_i)$  de  $Z$  est envoyée par restriction sur la classe de la branche  $g^{-1}(Z_i) = V(g^*f_i)$  (cf. **XVI-2**).  $\square$

## 2.2. Application du théorème de descente fléchée.

**2.2.1.** Soient  $X$  un schéma strictement local noëthérien,  $j : U \hookrightarrow X$  un ouvert,  $i_x : x \hookrightarrow X$  l'immersion fermée, et  $\varepsilon : X_{\bullet} \rightarrow X$  un hyperrecouvrement pour la topologie des altérations (**II-2.3**). La proposition suivante — où les morphismes obtenus par changement de base sont notés de façon évidente — est un corollaire immédiat du théorème **XII-2.2.4** et du fait que la cohomologie de  $U$  est la fibre en  $x$  de l'image directe par  $j$ .

**PROPOSITION 2.2.2.** *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme d'adjonction*

$$R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n) \rightarrow R\varepsilon_{x\star} (i_{x\bullet}^* Rj_{\bullet\star} \mathbf{Z}/n)$$

*est un isomorphisme.*

**2.2.3.** Supposons maintenant donné un morphisme *local*  $X' \rightarrow X$  de schémas strictement locaux noëthériens. Comme précédemment, on note  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $Z$  son complémentaire et  $x$  le point fermé de  $X$ . À tout hyperrecouvrement pour la topologie des altérations  $X_{\bullet} \rightarrow X$  de  $X$  est associé par changement de base un hyperrecouvrement de  $X'$ .

**PROPOSITION 2.2.4.** *Supposons que pour chaque entier  $q \geq 0$  les fermés  $(Z_q \hookrightarrow X_q)$  et  $(Z'_q \hookrightarrow X'_q)$  aient même combinatoire le long de la fibre spéciale  $(X_q)_x$ . Alors le morphisme d'adjonction*

$$R\Gamma(U, \mathbf{Z}/n) \rightarrow R\Gamma(U', \mathbf{Z}/n)$$

*est un isomorphisme. De plus, si l'on fait l'hypothèse précédente pour les seuls entiers  $q \leq N+1$ , où  $N$  est un entier quelconque, les morphismes  $H^q(U, \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^q(U', \mathbf{Z}/n)$  sont des isomorphismes pour chaque  $q \leq N$ .*

*Démonstration.* Le premier point est conséquence immédiate des deux propositions précédentes. En effet, d'après **2.2.2** et l'invariance de la cohomologie par changement de corps séparablement clos, soit

$$\left( R\varepsilon_{x\star} (i_{x\bullet}^* Rj_{\bullet\star} \mathbf{Z}/n) \right)_{|x'} = R\varepsilon'_{x'\star} \left( (i_{x'\bullet}^* Rj_{\bullet\star} \mathbf{Z}/n)_{|x'} \right),$$

il suffit de démontrer que pour chaque  $q$ , l'adjonction  $(Rj_{q*} \mathbf{Z}/n)_{|X'_x} \rightarrow (Rj'_{q*} \mathbf{Z}/n)_{|X'_x}$  est un isomorphisme. Cela résulte de l'hypothèse combinatoire et de 2.1.7. La variante tronquée est un corollaire de la démonstration précédente et du fait que la cohomologie en degré  $q$  ne dépend que des étages  $\leq q + 1$ .  $\square$

REMARQUE 2.2.5. Dans ce critère, on ne fait d'hypothèses qu'en les points des fibres spéciales des hyper-recouvrements ; c'est ce qui en fait toute sa force.

### 3. Uniformisation et approximation des données

#### 3.1. Notations.

3.1.1. Soit  $X, U, Z$  et  $n$  comme à la fin du

¶1.1 : le schéma  $X$  est strictement local complet,  $U$  en est un ouvert *affine*,  $Z = X - U$  (muni de la structure réduite), et  $n$  est un entier inversible sur  $X$ . On veut démontrer 1.2.4 dans ce cas. Fixons un entier  $N$ .

3.1.2. Il résulte du théorème d'uniformisation (VII-1.1), complété par XIII-2.2.2, qu'il existe un hyperrecouvrement pour la topologie des altérations  $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$  tel que chaque  $X_q$  soit régulier et chaque  $Z_q = Z \times_X X_q$  soit un diviseur strictement à croisements normaux. Il est loisible de supposer les schémas  $X_q$  affines.

3.1.3. Soient  $k$  le corps résiduel de  $X$ , soit  $C$  un anneau de Cohen de corps résiduel  $k$  (IV-4.1.7) et  $S = \text{Spec}(C)$ . Il résulte du théorème de structure des anneaux locaux noëthériens ([ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8]) qu'il existe un entier  $m$  et une immersion fermée de  $X$  dans le complété en l'origine (de la fibre spéciale sur  $S$ ) de l'espace affine  $\mathbf{A}_S^m$ . Notons  $\widehat{E}$  ce complété,  $E$  son analogue hensélien (hensélisé de l'espace affine en l'origine) et enfin  $e$  le point fermé de ce dernier.

3.1.4. Le schéma  $E$  étant quasi-excellent, le morphisme de complétion  $\widehat{E} \rightarrow E$  est (local) régulier de sorte que, d'après le théorème de Popescu, on peut écrire :

$$\widehat{E} = \lim_{\alpha} E_{\alpha},$$

où les  $E_{\alpha} \rightarrow E$  sont des morphismes essentiellement lisses entre schémas strictement locaux, la limite étant filtrante. Notons que les schémas  $E_{\alpha}$  sont essentiellement de type fini sur le *trait*  $S$ .

#### 3.2. Passage à la limite.

3.2.1. Quitte à restreindre l'ensemble d'indices, c'est-à-dire à supposer  $\alpha \gg 0$ , les principes généraux de [ÉGA IV<sub>3</sub> §8], joints au fait que les schémas  $X, Z, U$  et les  $X_q$  pour  $q \leq N$  sont de présentation finie sur  $\widehat{E}$ , entraînent l'existence de diagrammes à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} U_{\leq N, \alpha} & \longrightarrow & X_{\leq N, \alpha} & \longleftarrow & Z_{\leq N, \alpha} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_{\alpha} & \longrightarrow & X_{\alpha} & \longleftarrow & Z_{\alpha} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & E_{\alpha} & & \end{array}$$

dont l'analogie sur  $\widehat{E}$  se déduit par changement de base  $\widehat{E} \rightarrow E_{\alpha}$ . De plus, on peut supposer que pour chaque  $\alpha$ ,  $X_{\alpha} \rightarrow E_{\alpha}$  est une immersion fermée — de

sorte que  $X_\alpha$  est strictement local —, et  $U_\alpha \rightarrow X_\alpha$  une immersion ouverte affine de complémentaire  $Z_\alpha$ .

**REMARQUE 3.2.2.** Les schémas  $X_q$  et  $X_{q\alpha}$  ont même fibre spéciale pour tout  $q \leq N$ .

**3.2.3.** Il résulte du théorème de la forme standard (II-3.2.1)<sup>i</sup> et de [ÉGA IV<sub>3</sub> 8.10.5] que l'on peut supposer — quitte à considérer de grands indices — que les  $X_{\leq N, \alpha} \rightarrow X$  sont des hyperrecouvrements (tronqués) pour la topologie des altérations.

**3.2.4.** Vérifions que l'on peut supposer que pour chaque  $\alpha$  et chaque  $q \leq N$ , le « modèle »  $X_{q\alpha}$  de  $X_q$  est régulier le long de sa fibre spéciale. Fixons  $q$  puis oublions le. Le schéma  $X$  est donc maintenant supposé régulier, affine, de type fini sur  $\hat{E}$ . Le problème est local pour la topologie de Zariski ; on peut donc supposer que  $X$  est un fermé  $V(f_1, \dots, f_c)$  de codimension  $c$  dans un espace affine  $Y = \mathbf{A}_{\hat{E}}^m$ . Quitte à supposer les  $\alpha$  suffisamment grands, il existe des fonctions  $f_{i\alpha}$  telles que  $f_i = g^*f_{i\alpha}$  pour chaque  $i$ , où  $g$  est le morphisme évident  $Y \rightarrow Y_\alpha = \mathbf{A}_{E_\alpha}^m$ . Soit  $x$  un point de  $Y$  appartenant à la fibre spéciale de  $X$  et soit  $x_\alpha = g(x)$  son image. Notons  $\mathfrak{m}_x$  (resp.  $\mathfrak{m}_{x_\alpha}$ ) l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Y,x}$  (resp.  $\mathcal{O}_{Y_\alpha, x_\alpha}$ ). Par hypothèse de régularité de  $X$  en  $x$ , les images  $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_c}$  des  $f_i$  dans  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  sont linéairement indépendantes sur  $\kappa(x) = \mathcal{O}_{Y,x}/\mathfrak{m}_x$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} f_i & & \mathfrak{m}_x & \longrightarrow & \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \\ \uparrow & & \uparrow g^* & & \uparrow \\ f_{i\alpha} & & \mathfrak{m}_{x_\alpha} & \longrightarrow & \mathfrak{m}_{x_\alpha}/\mathfrak{m}_{x_\alpha}^2 \end{array}$$

étant commutatif, il résulte de l'égalité  $\kappa(x) = \kappa(x_\alpha)$  que les images  $\overline{f_{i\alpha}}$  des  $f_{i\alpha}$  dans  $\mathfrak{m}_{x_\alpha}/\mathfrak{m}_{x_\alpha}^2$  sont linéairement indépendantes sur  $\kappa(x_\alpha)$ . Il en résulte que le sous-schéma fermé  $X_\alpha = V(f_{1\alpha}, \dots, f_{c\alpha})$  de  $Y_\alpha$  est régulier en  $x_\alpha$ .

**3.2.5.** On montre de même que l'on peut supposer que pour chaque  $\alpha$  et chaque  $q \leq N$ , les immersions  $(Z_q \hookrightarrow X_q)$  et  $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$  ont même combinatoire le long du point fermé  $e \in E$ , c'est-à-dire le long des fibres spéciales.

**3.2.6.** Il résulte de la proposition 2.2.4 que les morphismes d'adjonction

$$H^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^q(U, \mathbf{Z}/n)$$

sont des isomorphismes pour  $q < N$ . Nous allons montrer que si  $q > d = \dim(X)$  et  $\alpha$  est suffisamment grand, on a  $H^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n) = 0$ . Ceci achèvera la démonstration du théorème de Lefschetz affine. Notons que l'ouvert affine  $U_\alpha$  du schéma strictement local  $X_\alpha$  n'est en général pas de dimension  $d$ .

### 3.3. Utilisation d'une section.

**3.3.1.** Soit  $\sigma : E \rightarrow E_\alpha$  une section de  $E_\alpha \rightarrow E$  et  $X_\alpha^\sigma$  (resp.  $U_\alpha^\sigma, Z_\alpha^\sigma$ ) le  $E$ -schéma déduit de  $X_\alpha$  (resp.  $U_\alpha, Z_\alpha$ ) par changement de base. Notons également  $X_{\leq N, \alpha}^\sigma$  l'hyperrecouvrement de  $X_\alpha^\sigma$  pour la topologie des altérations obtenu à partir de  $X_{\leq N, \alpha} \rightarrow X_\alpha$  par changement de base. On rappelle que l'on remplace les schémas obtenus par produit fibré usuel par la réunion des adhérences de leurs composantes irréductibles dominant une composante irréductible de  $X_\alpha^\sigma$ . (En d'autres

<sup>i</sup>La démonstration dans le cas «  $\ell = 1$  », qui est celui utilisé ici, est valable sans supposer  $X$  irréductible.

termes, on applique le foncteur  $T \mapsto T_{\text{md}}$  de **II-1.2.5**.) Enfin  $U_{\leq N, \alpha}^{\sigma}$  (resp.  $Z_{\leq N, \alpha}^{\sigma}$ ) est l'ouvert (resp. le fermé) simplicial évident.

**3.3.2.** Il résulte de **III-5.4** et **III-6.2** (démonstration) que si  $\alpha$  est suffisamment grand et  $\sigma$  est suffisamment proche de l'identité, alors, les immersions fermées  $(Z_{q\alpha}^{\sigma} \hookrightarrow X_{q\alpha}^{\sigma})$  et  $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$  ont *même combinatoire* le long de la fibre spéciale au-dessus de  $\bar{E}$  pour chaque  $q \leq N$ . Il en résulte comme ci-dessus que le morphisme

$$H^q(U_{\alpha}, \mathbf{Z}/\mathfrak{n}) \rightarrow H^q(U_{\alpha}^{\sigma}, \mathbf{Z}/\mathfrak{n})$$

est un isomorphisme. Comme l'ouvert  $U_{\alpha}^{\sigma}$  est affine dans  $X_{\alpha}^{\sigma}$  de dimension  $d$  et essentiellement de type fini sur le trait  $S$ , il résulte par passage à la limite du théorème de Lefschetz (dû à O. Gabber) [**Illusie, 2003, 2.4**], on a

$$H^q(U_{\alpha}^{\sigma}, \mathbf{Z}/\mathfrak{n}) = 0 \text{ si } d < q < N.$$

Finalement,  $H^q(U, \mathbf{Z}/\mathfrak{n}) = 0$  si  $q > d = \dim(X)$ . CQFD.

## Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue

Joël Riou

Dans ces notes, on présente la nouvelle démonstration par Ofer Gabber du théorème de pureté cohomologique absolue, annoncée dans [Gabber, 2005c]. La section 1 rappelle la construction des classes de Chern en cohomologie étale. Celles-ci servent dans la section 2 qui consiste en la construction et l'étude des propriétés des morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète lissifiables. Dans la section 3, ces morphismes de Gysin sont utilisés pour donner une formulation précise du théorème de pureté absolue (théorème 3.1.1). La démonstration du théorème de pureté (différente de celle rédigée dans [Fujiwara, 2002]) s'appuie notamment sur les résultats de géométrie logarithmique établis dans l'exposé VI.

Dans tout cet exposé, on fixe un entier naturel  $n \geq 1$ . Tous les schémas seront supposés être des schémas sur  $\text{Spec}(\mathbf{Z}[\frac{1}{n}])$ . On note  $\Lambda$  le faisceau d'anneaux constant de valeur  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ,  $\Lambda(1)$  le faisceau des racines  $n$ -ièmes de l'unité (pour la topologie étale) et  $\Lambda(r)$  ses puissances tensorielles, auxquelles on peut donner un sens pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ .

### 1. Classes de Chern

Dans cette section, on rappelle la construction des classes de Chern des fibrés vectoriels sur des schémas généraux à valeurs dans la cohomologie étale. On s'appuie sur le calcul de la cohomologie étale des fibrés projectifs de [SGA 5 VII 2] et sur la méthode de [Grothendieck, 1958a]. Les démonstrations sont parfois différentes de celles de [SGA 5 VII 3] : on s'est efforcé de donner une présentation aussi « économique » que possible.

À la différence de l'exposé oral qui utilisait un langage géométrique, dans ces notes, un fibré vectoriel est un Module  $\mathcal{E}$  localement libre de rang fini et le fibré projectif de  $\mathcal{E}$  est le fibré des hyperplans défini dans [ÉGA II 4.1.1] :  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}(\mathbf{S}^*\mathcal{E})$  où  $\mathbf{S}^*\mathcal{E}$  est l'Algèbre symétrique de  $\mathcal{E}$ .

**DÉFINITION 1.1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites sur  $X$ . Le faisceau des sections inversibles de  $\mathcal{L}$  est naturellement muni d'une structure de torseur sous le schéma en groupes  $\mathbf{G}_m$ . La classe d'isomorphisme de  $\mathcal{L}$  définit donc un élément dans  $H_{\text{ét}}^1(X, \mathbf{G}_m)$ . On note  $c_1(L) \in H_{\text{ét}}^2(X, \Lambda(1))$  l'image de cet élément par le morphisme de bord déduit de la suite exacte courte de Kummer :

$$0 \rightarrow \Lambda(1) \rightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_m \rightarrow 0^i.$$

<sup>i</sup>Une grande liberté d'interprétation est laissée à l'imagination du lecteur au sujet des conventions de signes à utiliser dans cette définition de  $c_1$ . La même liberté me semblant exister dans [SGA 4 XVIII 1.1] pour le morphisme trace, il me paraît illusoire de faire davantage de zèle. Cependant, à un endroit de ces notes, ce choix ne sera pas neutre : il faut que les choix de signes soient

Si  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  sont deux fibrés en droites sur  $X$ , on a la relation d'additivité :

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L}') \in H^2(X, \Lambda(1)) \text{ ii.}$$

Notons que les classes de Chern de fibrés en droites résident dans les degrés pairs de la cohomologie étale, elles commutent donc avec toutes les classes de cohomologie. Notons aussi que si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites sur  $X$ , alors  $f^*(c_1(\mathcal{L})) = c_1(f^*\mathcal{L})$ .

**THÉOREME 1.2** (Formule du fibré projectif). *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel de rang constant  $r$  sur  $X$ . On note  $\pi: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  le fibré projectif de  $\mathcal{E}$ . On pose  $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X, \Lambda(1))$  iii. Alors, les puissances  $\xi^i \in H^{2i}(X, \Lambda(i))$  de  $\xi$  définissent un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :*

$$(1, \xi, \dots, \xi^{r-1}): \bigoplus_{i=0}^{r-1} \Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{\sim} R\pi_*\Lambda$$

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on peut supposer que  $X$  est le spectre d'un corps algébriquement clos  $k$ . On se ramène ainsi au calcul de l'algèbre de cohomologie étale des espaces projectifs sur  $k$ , cf. [SGA 5 VII 2].

**THÉOREME 1.3.** *Il existe une unique manière de définir, pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$  et tout fibré vectoriel  $\mathcal{E}$ , des éléments  $c_i(\mathcal{E}) \in H_{\text{ét}}^{2i}(X, \Lambda(i))$  pour tout  $i \in \mathbf{N}$  de sorte que si l'on définit la série formelle  $c_t(\mathcal{E}) = \sum_{i \geq 0} c_i(\mathcal{E})t^i$ , on ait les propriétés suivantes :*

- la série formelle  $c_t(\mathcal{E})$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  sur le  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$  ;
- si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme de  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas et  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel sur  $X$ , alors  $f^*(c_t(\mathcal{E})) = c_t(f^*\mathcal{E})$  ;
- si  $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$  est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ , on a la relation de Cartan-Whitney :

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}')c_t(\mathcal{E}'') ;$$

- si  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ , la classe  $c_1(\mathcal{L})$  est celle de la définition 1.1 et

$$c_t(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})t .$$

On a alors les relations  $c_0(\mathcal{E}) = 1$  et  $c_i(\mathcal{E}) = 0$  pour  $i > \text{rang } \mathcal{E}$  pour tout fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ .

La démonstration utilise plusieurs constructions géométriques :

**PROPOSITION 1.4** (Principe de scindage I). *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel de rang  $r$ . On note  $\pi: \mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  le fibré des drapeaux complets de  $\mathcal{E}$ . Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

mutuellement cohérents de sorte que l'on ait une compatibilité entre le degré des fibrés en droites sur la droite projective, le morphisme trace et la première classe de Chern (cf. démonstration du lemme 2.5.10).

ii Il existe des théories cohomologiques « orientées » pour lesquelles cette propriété de la première classe de Chern n'est pas satisfaite, cf. [Morel & Levine, 2001].

iii Le faisceau  $\mathcal{O}(1)$  est le faisceau fondamental sur  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  : c'est le quotient inversible de  $\pi^*\mathcal{E}$  par l'hyperplan universel.



- le fibré vectoriel  $\pi^*\mathcal{E}$  admet une filtration (canonique)  $0 = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_r = \pi^*\mathcal{E}$  par des fibrés vectoriels de sorte que pour tout entier  $1 \leq i \leq r$ , le quotient  $\mathcal{L}_i = \mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i-1}$  soit un fibré en droites ;
- le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda$  est un monomorphisme scindé dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

La seule propriété non triviale réside dans le fait que  $\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda$  soit un monomorphisme scindé. En remarquant que la projection  $\mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  peut s'écrire comme un composé de  $r$  projections de fibrés projectifs, ceci se déduit de la formule du fibré projectif <sup>iv</sup>.

**PROPOSITION 1.5** (Principe de scindage II). *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit  $(E) : 0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{E}'' \rightarrow 0$  une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur  $X$ . On note  $\mathbf{Sect}(E)$  le  $X$ -schéma défini par le fait que pour tout  $X$ -schéma  $f: Y \rightarrow X$ , l'ensemble des  $X$ -morphisms  $Y \rightarrow \mathbf{Sect}(E)$  s'identifie naturellement à l'ensemble des sections de la surjection de fibrés vectoriels  $f^*(p): f^*\mathcal{E} \rightarrow f^*\mathcal{E}''$  sur  $Y^\vee$ . Le  $Y$ -schéma  $\mathbf{Sect}(E)$  est naturellement muni d'une structure de torseur sous le  $Y$ -schéma en groupes vectoriel d'homomorphismes  $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$ . Notons  $\pi: \mathbf{Sect}(E) \rightarrow X$  la projection. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- l'image inverse par  $\pi: \mathbf{Sect}(E) \rightarrow X$  de la suite exacte de fibrés vectoriels  $E$  est (canoniquement) scindée ;
- le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda$  est un isomorphisme dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

L'existence de  $\mathbf{Sect}(E)$  est évidente, la question étant de nature locale sur  $X$ . Localement pour la topologie de Zariski sur  $X$ , la projection  $\pi$  est la projection depuis un espace affine, l'isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} R\pi_*\Lambda$  résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie étale pour les  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas ([SGA 4 XV 2.2]).

Démontrons le théorème 1.3. Grâce aux propositions 1.4 et 1.5, l'unicité est évidente. Il s'agit donc de construire une théorie des classes de Chern satisfaisant les propriétés demandées. Soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel (que l'on peut supposer de rang constant  $r$ ) sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ . On considère le fibré projectif  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  sur  $X$ . On note  $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$ . D'après la formule du fibré projectif (théorème 1.2), il existe d'unique éléments, notés  $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(X, \Lambda(i))$  pour  $1 \leq i \leq r$  tels que l'on ait la relation

$$\xi^r - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-1} + c_2(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \dots + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) = 0 \in H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r)) .$$

On pose  $c_0(\mathcal{E}) = 1$  et  $c_i(\mathcal{E}) = 0$  pour  $i > r$ . Dans le cas où  $\mathcal{E}$  est un fibré en droites,  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \simeq X$  et  $\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{E}$ , ce qui montre que cette définition étend la précédente pour les fibrés en droites. La seule propriété non évidente est la formule de Cartan-Whitney. Par principe de scindage (propositions 1.4 et 1.5), il suffit d'établir la formule suivante :

**LEMME 1.6.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Soit  $(\mathcal{L}_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille finie de fibrés en droites sur  $X$ , soit  $\mathcal{E} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{L}_i$  leur somme directe. Dans  $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$ , on a la*

<sup>iv</sup>Plus précisément, Grothendieck a montré (cf. [Grothendieck, 1958b], ou [SGA 6 VI 4.6] pour le même argument dans le cas de la K-théorie algébrique) que la théorie des classes de Chern permettrait de calculer l'algèbre de cohomologie des fibrés de drapeaux, fussent-ils incomplets.

<sup>v</sup>Je remercie Dennis Eriksson de m'avoir signalé cette construction.

relation :

$$\prod_{i=1}^r (\xi - c_1(\mathcal{L}_i)) = 0$$

où  $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$ . Autrement dit,

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^r c_t(\mathcal{L}_i).$$

L'argument qui suit est inspiré de [Panin & Smyrnov, 2003]. Pour  $1 \leq i \leq r$ , on note  $H_i$  l'hyperplan projectif de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  défini par l'inclusion  $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{E}$ . Notons  $\pi: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$  la projection. Le morphisme canonique  $\pi^* \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{O}(1)$  induit un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de  $H_i$  dans  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ . On en déduit que l'élément  $\xi - c_1(\mathcal{L}_i)$  de  $H^2(X, \Lambda(1))$  peut être relevé en un élément  $x_i$  du groupe de cohomologie à supports  $H_{H_i}^2(X, \Lambda(1))$ <sup>vi</sup>. Le produit des éléments  $x_i$  vit naturellement dans le groupe de cohomologie à support  $H_{\cap_{1 \leq i \leq r} H_i}^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(i))$  qui est nul puisque l'intersection de ces  $r$  hyperplans est vide ; on en déduit la formule voulue par oubli du support.

**PROPOSITION 1.7.** *Soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ . Pour tout entier naturel  $i$ , on a l'égalité :*

$$c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E}) ;$$

autrement dit, on a une formule de changement de variables :

$$c_t(\mathcal{E}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{E}).$$

Grâce à la relation de Cartan-Whitney et au principe de scindage, on peut se ramener au cas où  $\mathcal{E}$  est un fibré en droites. Cela résulte alors du fait que  $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \Lambda(1))$  soit un homomorphisme de groupes.

## 2. Morphismes de Gysin

Étant donné un morphisme d'intersection complète  $X \xrightarrow{f} S$  entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas vérifiant certaines hypothèses techniques, on va construire un morphisme de Gysin  $\text{Cl}_f: \Lambda \rightarrow f^* \Lambda$  où  $f^* = f^!(-d)[-2d]$  ( $d$  est la dimension relative virtuelle de  $f$ ). Ces morphismes de Gysin seront compatibles à la composition des morphismes d'intersection complète.

L'essentiel de cette section est consacrée à la construction de ces morphismes de Gysin dans le cas des immersions régulières. Le morphisme trace permettra de faire la construction dans le cas des morphismes lisses. Ces deux définitions se recolleront pour donner la définition 2.5.11 dans le cas général et le théorème 2.5.12 établira la compatibilité à la composition de ces morphismes de Gysin.

**2.1. Première classe de Chern d'un pseudo-diviseur.** Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma  $X$ ,  $Z$  un fermé de  $X$  et  $U$  l'ouvert complémentaire. On suppose donnée une section inversible  $s: \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_U$ . Au couple  $(\mathcal{L}, s)$  est canoniquement associée une classe  $c_1(\mathcal{L}, s) \in H_Z^2(X, \Lambda(1))$  induisant  $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \Lambda(1))$  par oubli du support (construire un élément de  $H_Z^1(X, \mathbf{G}_m)$  et utiliser la suite exacte de Kummer).

<sup>vi</sup>Pour le moment, peu importe de fixer un relèvement canonique.

La classe  $c_1(\mathcal{L}, s)$  définit un morphisme  $\Lambda_Z = \Lambda_X/\Lambda_U \rightarrow \Lambda_X(1)$  [2] dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . En « composant » un tel morphisme avec une classe de cohomologie de  $Z$  représentée par un morphisme  $\Lambda_Z \rightarrow \Lambda_Z(q)$  [p], il vient que  $c_1(\mathcal{L}, s)$  induit des morphismes

$$\text{Gys}_{(\mathcal{L}, s)}: \mathbf{H}^p(Z, \Lambda(q)) \rightarrow \mathbf{H}_Z^{p+2}(X, \Lambda(q+1)).$$

**DÉFINITION 2.1.1.** Si  $Z \rightarrow X$  est une immersion régulière de codimension 1 définie par un Idéal (invertible)  $\mathcal{I}$ , on pose  $\text{Gys}_{Z \subset X} = \text{Gys}_{(\mathcal{I}, 1_{X-Z})}$ .

On prendra garde au fait que *via* les identifications usuelles, le faisceau invertible  $\mathcal{I}$  et le diviseur effectif  $Z$  ont des classes opposées dans le groupe de Picard de  $X$ .

**2.2. Classes fondamentales généralisées.** Pour étudier la compatibilité à la composition des classes fondamentales définies dans [Fujiwara, 2002, §1] dans le cas des immersions régulières (cf. [SGA 6 VII 1.4]), Ofer Gabber définit une classe fondamentale généralisée pour une immersion fermée  $Y \rightarrow X$  définie par un Idéal de type fini  $\mathcal{I}$ . Cette construction n'est plus limitée aux immersions régulières et est compatible aux changements de bases arbitraires, mais elle dépend d'une donnée supplémentaire, à savoir celle d'un fibré vectoriel sur  $Y$  se surjectant sur le faisceau conormal  $\mathcal{N}_{X/Y} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ .

**2.2.1. Éclatement modifié.** Soit  $Y \rightarrow X$  une immersion fermée entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas définie par un Idéal de type fini  $\mathcal{I}$ . On note  $U$  l'ouvert complémentaire. Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$  un épimorphisme de Modules sur  $Y$  où  $\mathcal{E}$  est un Module localement libre de rang fini. On définit une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{A}_*$  par produit fibré de façon à avoir un carré cartésien de  $\mathcal{O}_X$ -Modules, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{I}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}^n \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \end{array}$$

où l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}^* \mathcal{E}$  est prise sur le faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ .

**DÉFINITION 2.2.1.1.** On pose  $\text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X) = \text{Proj}(\mathcal{A}_*)$  et on note  $\pi: \text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X) \rightarrow X$  la projection.

**REMARQUE 2.2.1.2.** Si  $Y \rightarrow X$  est une immersion fermée régulière et que  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$  est un isomorphisme,  $\text{Écl}_{Y, \mathcal{E}}(X)$  s'identifie à l'éclaté de  $Y$  dans  $X$ . C'est ce cas particulier que l'on généralise ici en vue d'obtenir une construction compatible aux changements de base.

**PROPOSITION 2.2.1.3.** L'Algèbre  $\mathcal{A}_0$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X$ , les Modules  $\mathcal{A}_n$  sont de type fini, l'Algèbre graduée  $\mathcal{A}_*$  est engendrée par  $\mathcal{A}_1$  et on a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées  $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^* \mathcal{E}$ .

L'assertion concernant  $\mathcal{A}_0$  est tautologique. Soit  $n$  un entier naturel. Comme  $\mathcal{I}^n \rightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$  est un épimorphisme, la projection  $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathbf{S}^n \mathcal{E}$  est aussi un épimorphisme et si on note  $\mathcal{K}_n$  son noyau, on a un isomorphisme  $\mathcal{K}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{n+1}$ . Par dévissage, il en résulte que  $\mathcal{A}_n$  est un Module de type fini.

Puisque  $\mathbf{S}^n \mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ -Module,  $\mathcal{K}_n$  contient  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n$ . Comme  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  est un épimorphisme, le morphisme  $\mathbf{S}^n \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$  est aussi un épimorphisme,

ce qui implique que la projection  $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{I}^n$  est un épimorphisme. Par conséquent, l'inclusion  $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{I} \cdot \mathcal{I}^n = \mathcal{I}^{n+1} \simeq \mathcal{K}_n$  est un isomorphisme :  $\mathcal{K}_n = \mathcal{I} \cdot \mathcal{A}_n$ . Ceci permet d'obtenir l'isomorphisme  $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X / \mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^* \mathcal{E}$ .

Pour montrer que le morphisme évident  $\mathcal{A}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}_n$  de Modules est un épimorphisme, il suffit, d'après le lemme de Nakayama, de le tester après passage aux corps résiduels de  $X$ . Au-dessus de l'ouvert  $U$ , c'est évident ; au-dessus de  $Y$ , cela résulte de l'isomorphisme  $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X / \mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^* \mathcal{E}$ .

**COROLLAIRE 2.2.1.4.** *Le morphisme  $\pi: \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \rightarrow X$  est projectif et on dispose d'isomorphismes canoniques  $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$  et  $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E})$ .*

L'isomorphisme au-dessus de  $U$  est évident. Compte tenu de [ÉGA II 3.5.3], celui décrivant  $\pi^{-1}(Y)$  se déduit de l'isomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées  $\mathcal{A}_* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^* \mathcal{E}$ .

**PROPOSITION 2.2.1.5.** *Soit  $p: X' \rightarrow X$  un morphisme. On pose  $Y' = Y \times_X X'$  et  $\mathcal{E}' = p^* \mathcal{E}$ . On dispose d'un épimorphisme évident  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{N}_{X'/Y'}$ . Le morphisme canonique*

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X') \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X'$$

*est une nil-immersion.*

Notons  $\mathcal{A}'_*$  la  $\mathcal{O}_{X'}$ -Algèbre graduée quasi-cohérente donnant naissance à  $\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X')$ . On dispose d'un morphisme évident  $p^* \mathcal{A}_* \rightarrow \mathcal{A}'_*$  de  $\mathcal{O}_{X'}$ -Algèbres graduées quasi-cohérentes. Pour tout entier, le morphisme  $p^* \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}'_n$  est un morphisme entre  $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules de type fini ; pour montrer qu'il s'agit d'un épimorphisme, d'après le lemme de Nakayama, il suffit de vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme d'une part au-dessus de  $U' = X' - Y'$  (c'est évident) et d'autre part modulo l'idéal  $\mathcal{I}'$  définissant  $Y'$  dans  $X'$  (cela résulte de la description donnée dans la proposition 2.2.1.3). Le morphisme

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X') \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X'$$

s'identifie au  $X'$ -morphisme évident  $\text{Proj}(\mathcal{A}'_*) \rightarrow \text{Proj}(p^* \mathcal{A}_*)$  ([ÉGA II 3.5.3]) ; d'après ce qui précède, il s'agit d'une immersion fermée. Le fait que ce morphisme induise un isomorphisme au-dessus de  $p^{-1}(U)$  et de  $p^{-1}(Y)$  permet d'en déduire aussitôt que le morphisme induit au niveau des schémas réduits associés

$$\text{Écl}_{Y',\mathcal{E}'}(X')_{\text{réd}} \rightarrow (\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \times_X X')_{\text{réd}}$$

est un isomorphisme.

**2.2.2. Définition des classes.** On se donne toujours une immersion fermée  $i: Y \rightarrow X$  définie par un Idéal  $\mathcal{I}$  de type fini. On note  $j: U \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert complémentaire ( $\mathcal{I}$  étant de type fini,  $j$  est un morphisme de type fini). On suppose donné un épimorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$  avec  $\mathcal{E}$  est localement libre de rang fini. On note  $\pi: \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) \rightarrow X$  la projection de l'éclatement modifié,  $j': U \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  l'immersion ouverte évidente et  $i': \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  l'immersion fermée donnée par le corollaire 2.2.1.4. On note  $r$  le rang du fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  que l'on suppose de rang constant pour simplifier et on suppose  $r > 0$ .

On a ainsi le diagramme suivant de schémas, où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{i'} & \text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X) & \xleftarrow{j'} & \mathbf{U} \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \parallel \\
 Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{i'} & \mathbf{U}
 \end{array}$$

PROPOSITION 2.2.2.1. *Le morphisme évident  $\Lambda \rightarrow R\pi'_*\Lambda$  dans  $\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  est un monomorphisme scindé : la formule du fibré projectif identifie son conoyau à*

$$\bigoplus_{k=1}^{r-1} \Lambda(-k)[-2k] .$$

Les morphismes évidents définissent un triangle distingué :

$$\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda \rightarrow i_*\text{Coker}(\Lambda \rightarrow R\pi'_*\Lambda) \xrightarrow{0} \Lambda[1]$$

dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On peut le récrire sous la forme

$$\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{k=1}^{r-1} i_*\Lambda(-k)[-2k] \xrightarrow{0} \Lambda[1] ,$$

le morphisme  $\rho$  admettant une section canonique donnée par les éléments  $c_1(\mathcal{O}(1), 1_{\mathbf{U}})^k$  de  $H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2k}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(k))$ , identifiés à des morphismes  $i_*\Lambda(-k)[-2k] \rightarrow R\pi_*\Lambda$  dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

On note  $L$  une résolution injective du faisceau constant  $\Lambda$  vu comme faisceau de  $\Lambda$ -modules sur le grand site étale des schémas de type fini sur  $X$ . Pour tout morphisme de type fini  $W \xrightarrow{p} X$ , on note  $L_{|W}$  le complexe de faisceau de  $\Lambda$ -modules sur  $W_{\text{ét}}$  induit par  $L$  ; on peut le voir comme un objet de  $\mathbf{D}^+(W_{\text{ét}}, \Lambda)$  isomorphe à  $\Lambda$ .

LEMME 2.2.2.2. *Le carré commutatif évident de complexes de faisceaux sur  $X_{\text{ét}}$  est homotopiquement bicartésien :*

$$\begin{array}{ccc}
 L_{|X} & \longrightarrow & i_*L_{|Y} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_*L_{|\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} & \longrightarrow & \pi_*i'_*L_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}
 \end{array}$$

(ceci signifie par exemple que le complexe simple associé à ce diagramme, identifié à un complexe 3-uple, est acyclique).

Les complexes simples associés aux complexes doubles

$$j_!L_{|\mathbf{U}} \rightarrow L_{|X} \rightarrow i_*L_{|Y}$$

et

$$j'_!L_{|\mathbf{U}} \rightarrow L_{|\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} \rightarrow i'_*L_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}$$

de faisceaux sur  $X$  et  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  respectivement sont acycliques. Choisissons un foncteur de résolution « flasque » additif  $r$  sur la catégorie des faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)_{\text{ét}}$  et notons abusivement  $R\pi_*$  le foncteur (additif) de la catégorie des complexes (bornés inférieurement) de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  vers la catégorie des complexes de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X$  défini

par la formule  $R\pi_*K = \text{Tot}(\pi_*rK)$ , ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes et induit le foncteur  $R\pi_*: \mathbf{D}^+(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  usuel.

On obtient ainsi un diagramme commutatif de complexes de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X$  :

$$\begin{array}{ccccc} j_!L|_U & \longrightarrow & L|_X & \longrightarrow & i_*L|_Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\pi_*j'_!L|_U & \longrightarrow & R\pi_*L|_{\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)} & \longrightarrow & R\pi_*i'_!L|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme constituent des complexes doubles dont les complexes simples associés sont acycliques. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, le morphisme  $j_!L|_U \rightarrow R\pi_*j'_!L|_U$  est un quasi-isomorphisme. On en déduit que le carré de droite est homotopiquement bicartésien, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition 2.2.2.1, la formule du fibré projectif pour  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  implique que l'on a un triangle distingué dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$i_*\Lambda \rightarrow R\pi_*i'_!\Lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_*\Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{0} i_*\Lambda[1] .$$

En considérant les colonnes du carré homotopiquement bicartésien donné par le lemme, on peut conclure à l'existence d'un triangle distingué

$$\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_*\Lambda(-i)[-2i] \rightarrow \Lambda[1] .$$

Ce triangle est scindé par les puissances de l'élément  $c_1(\mathcal{O}(1), 1_U)$  ; le morphisme de droite est donc nul, ce qui achève la démonstration de la proposition.

**COROLLAIRE 2.2.2.3.** *La suite suivante, dont les morphismes sont évidents, est exacte :*

$$0 \rightarrow H_Y^{2r}(X, \Lambda(r)) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r)) \rightarrow \text{Coker}(H^{2r}(Y, \Lambda(r)) \rightarrow H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))) \rightarrow 0$$

L'énoncé de ce corollaire serait bien évidemment juste en tout bidegré  $(p, q)$  au lieu de  $(2r, r)$ , mais nous n'utiliserons que ce cas particulier.

On note Gys:  $H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q)) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{p+2}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(q+1))$  le morphisme de Gysin associé au pseudo-diviseur  $(\mathcal{O}(1), 1_U)$  sur  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  et  $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$ . Le lemme suivant est évident :

**LEMME 2.2.2.4.** *Le morphisme composé*

$$H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q)) \xrightarrow{\text{Gys}} H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{p+2}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(q+1)) \rightarrow H^{p+2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q+1)) ,$$

où la flèche de droite est le morphisme de restriction, est la multiplication par  $\xi$ .

**DÉFINITION 2.2.2.5.** On définit un élément  $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$  de  $H^{2r-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r-1))$  par la formule :

$$\text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = - [\xi^{r-1} - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \dots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E})] .$$

Le lemme suivant résulte aussitôt de la construction des classes de Chern :

LEMME 2.2.2.6. Dans  $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$ , on a l'égalité

$$\xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E}) .$$

DÉFINITION 2.2.2.7. Compte tenu du corollaire 2.2.2.3, les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6 montrent que l'élément  $\text{Gys}(\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}) \in H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r))$  provient par restriction d'un unique élément de  $H_Y^{2r}(X, \Lambda(r))$ , noté  $\text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$ .

2.2.3. Propriétés des classes généralisées.

PROPOSITION 2.2.3.1. La formation des classes généralisées  $\text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$  et  $\text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$  est compatible à tout changement de base  $X' \rightarrow X$ .

Compte tenu de la proposition 2.2.1.5, ceci résulte aussitôt des définitions.

PROPOSITION 2.2.3.2. Soit  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$  un épimorphisme de Modules localement libres sur  $Y$ . Soit  $\mathcal{K}$  le noyau de cet épimorphisme. On suppose que  $\mathcal{E}'$  est de rang constant  $r'$ . On a alors la relation

$$\text{Cl}_{i,\mathcal{E}'} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \text{Cl}_{i,\mathcal{E}}$$

dans  $H_Y^{2r'}(X, \Lambda(r'))$  où on a utilisé les accouplements canoniques

$$H^a(Y, \Lambda(b)) \otimes H_Y^{a'}(X, \Lambda(b')) \rightarrow H_Y^{a+a'}(X, \Lambda(b+b')) .$$

On dispose d'une immersion fermée de  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  dans  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}'}(X)$ , ce qui permet de considérer la composition suivante de flèches de restriction :

$$H_Y^{2r'}(X, \Lambda(r')) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E}')}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}'}(X), \Lambda(r')) \rightarrow H_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X), \Lambda(r')) .$$

Cette composée étant injective, il s'agit de montrer que les images des deux éléments considérés dans  $H_{\mathbf{P}(\mathcal{E}')}^{2r'}(\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}'}(X), \Lambda(r'))$  sont égales, mais comme ces deux éléments sont naturellement définis comme étant des images d'éléments de  $H^{2r'-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r'-1))$  par le morphisme  $\text{Gys}$  associé au fibré en droites  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\text{Écl}_{Y,\mathcal{E}}(X)$  canoniquement trivialisé sur  $X - Y$ , on se ramène à montrer l'égalité

$$\text{Clf}_{i,\mathcal{E}'|\mathbf{P}(\mathcal{E})} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \text{Clf}_{i,\mathcal{E}}$$

dans  $H^{2r'}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r'))$ . Ceci ne fait plus intervenir que le schéma  $Y$  et l'épimorphisme  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$  de fibrés vectoriels sur  $Y$ . Il s'agit d'une identité « universelle » dans cette situation ; on peut appliquer le principe de scindage et faire une récurrence sur la différence  $r' - r$  pour se ramener au cas où  $r' = r + 1$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{K}$  est un fibré en droites. Les relations de Cartan-Whitney entre les classes de Chern de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{K}$  donnent aussitôt l'égalité

$$\text{Clf}_{i,\mathcal{E}'|\mathbf{P}(\mathcal{E})} = [\xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} - (-1)^r c_r(\mathcal{E})] - c_1(\mathcal{K}) \cdot \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} ,$$

ce qui donne bien la relation voulue puisque  $\xi \text{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E})$  (cf. lemme 2.2.2.6).

**2.3. Immersions régulières.** On rappelle que la notion d'immersion régulière est définie dans [SGA 6 VII 1.4].

DÉFINITION 2.3.1. Soit  $i: Y \rightarrow X$  une immersion régulière entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas. On pose  $i^? = i^*(c) [2c]: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  où  $c$  est la codimension de  $i$ . On définit un morphisme  $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$  dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  de la façon suivante. Quitte à décomposer  $Y$  en réunion disjointe d'ouverts-fermés, on peut supposer que la codimension  $c$  de  $i$  est constante. Si  $c = 0$ ,  $i$  est l'inclusion d'un ouvert,  $\text{Cl}_i$  est l'isomorphisme évident. Dans le cas où  $c > 0$ , choisissons un ouvert  $U$  de  $X$

dans lequel  $Y$  est un sous-schéma fermé, notons  $i' : Y \rightarrow U$  cette immersion fermée. Le faisceau conormal  $\mathcal{N}_{X/Y}$  de  $Y$  dans  $X$  est un fibré vectoriel de rang  $c$  sur  $Y$  muni de l'épimorphisme tautologique  $\mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$ ; on peut donc considérer la classe  $Cl_{i'} = Cl_{i', \mathcal{N}_{X/Y}} \in H_Y^{2c}(U, \Lambda(c))$ , que l'on identifie à un morphisme  $Cl_i : \Lambda \rightarrow i'^? \Lambda \simeq i^? \Lambda$  dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ ; il est évident que la construction ne dépend pas de l'ouvert intermédiaire  $U$ .

Le théorème suivant généralise l'énoncé établi dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.2.1] :

**THÉORÈME 2.3.2.** *Si  $Z \xrightarrow{i} Y$  et  $Y \xrightarrow{j} X$  sont deux immersions régulières composables, le diagramme suivant est commutatif dans  $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$  :*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Cl_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow Cl_{j \circ i} & \downarrow i^?(Cl_j) \\ & & i^? j^? \Lambda \end{array}$$

On peut évidemment supposer que les immersions  $i$  et  $j$  sont des immersions fermées et que les codimensions de  $i$  et de  $j$  sont constantes, de valeurs respectives  $m$  et  $n$ . Si  $m = 0$  ou  $n = 0$ , c'est trivial; on suppose donc que  $m > 0$  et  $n > 0$ .

**LEMME 2.3.3.** *On peut supposer que  $n = 1$  (i.e.  $j$  est de codimension 1).*

On éclate  $Y$  dans  $X$  pour obtenir le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} P' & \xrightarrow{i'} & P & \xrightarrow{j'} & \text{Écl}_Y(X) \\ \downarrow p' & & \downarrow p & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

L'idée de la démonstration est d'utiliser une sorte de formule d'excès d'intersection (cf. [Fulton, 1998, theorem 6.3] pour une formulation dans la théorie de Chow) pour les immersions  $j \circ i : Z \rightarrow X$  et  $j : Y \rightarrow X$  relativement au changement de base  $\pi : \text{Écl}_Y(X) \rightarrow X$  qui va faire chuter la codimension de ces immersions fermées régulières.

On a des isomorphismes canoniques  $P = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y})$  et  $P' = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y|Z})$ . On vérifie facilement que  $P \rightarrow \text{Écl}_Y(X)$  est une immersion fermée régulière de codimension 1. Par changement de base lisse,  $P' \rightarrow P$  est une immersion fermée régulière de codimension  $m$ . On suppose que  $i'^?(Cl_{j'}) \circ Cl_{i'} = Cl_{j' \circ i'}$  et on veut montrer que  $i^?(Cl_j) \circ Cl_i = Cl_{j \circ i}$ . Les morphismes à comparer s'identifient à des éléments de  $H_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n))$  (on fera ce type d'identifications jusqu'à la fin de la démonstration). La proposition 2.2.2.1 implique que l'application

$$\pi^* : H_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n)) \rightarrow H_{P'}^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$$

est injective, il suffit donc de comparer les classes après application de  $\pi^*$ .

Considérons  $\pi^*(Cl_{j \circ i}) \in H_{P'}^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$ . La classe  $Cl_{j \circ i}$  est la classe généralisée  $Cl_{j \circ i, \mathcal{N}_{X/Z}}$ , la proposition 2.2.3.1 implique l'égalité

$$\pi^* Cl_{j \circ i} = Cl_{j' \circ i', \pi^* \mathcal{N}_{X/Z}}$$



où est sous-entendu l'épimorphisme de fibrés vectoriels  $p^* \mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P'}$  dont on note  $\mathcal{E}'$  le noyau, qui est un  $\mathcal{O}_{P'}$ -Module localement libre de rang  $n - 1$ . La proposition 2.2.3.2 donne alors l'égalité

$$\pi^* Cl_{j_{oi}} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot Cl_{j'_{oi}'}$$

où l'on a utilisé l'accouplement

$$H^{2(n-1)}(P', \Lambda(n-1)) \times H_p^{2(m+1)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+1)) \rightarrow H_p^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n)).$$

La composition des classes admise provisoirement pour les immersions  $j'$  et  $i'$  donne l'égalité

$$Cl_{j'_{oi}'} = Cl_{i'} \cdot Cl_{j'}$$

via l'accouplement

$$H_p^{2m}(P, \Lambda(m)) \times H_p^2(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(1)) \rightarrow H_p^{2(m+1)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(n+1)).$$

On a ainsi obtenu :

$$\pi^* Cl_{j_{oi}} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot Cl_{i'} \cdot Cl_{j'}$$

Notons  $\mathcal{E}$  le noyau de l'épimorphisme  $p^* \mathcal{N}_{X/Y} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P'}$ . Il vient aussitôt que dans le diagramme évident de Modules sur  $P'$  qui suit, les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i'^* \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i'^* p^* \mathcal{N}_{X/Y} & \longrightarrow & p'^* \mathcal{N}_{X/Z} & \longrightarrow & p'^* \mathcal{N}_{Y/Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i'^* \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\text{Écl}_Y(X)/P'} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{P/P'} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

En particulier, on obtient un isomorphisme canonique  $i'^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ , d'où  $i'^* c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \in H^{2(n-1)}(P', \Lambda(n-1))$ . On en déduit :

$$\pi^* Cl_{j_{oi}} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot Cl_{i'} \cdot Cl_{j'} = Cl_{i'} \cdot c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot Cl_{j'}$$

On utilise implicitement dans ces notations l'associativité des structures multiplicatives permettant par exemple de définir une application

$$H_p^{2m}(P, \Lambda(m)) \times H^{2(n-1)}(P, \Lambda(n-1)) \times H_p^2(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(1)) \rightarrow H^{2(m+n)}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$$

sans qu'il y ait à s'inquiéter de l'ordre dans lequel les multiplications sont faites. Les propositions 2.2.3.2 et 2.2.3.1 impliquent les égalités suivantes :

$$c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot Cl_{j'} = Cl_{j', p^* \mathcal{N}_{X/Y}} = \pi^* Cl_j \in H_p^{2n}(\text{Écl}_Y(X), \Lambda(n)).$$

Le morphisme  $p$  étant lisse, on a aussitôt  $Cl_{i'} = \pi^* Cl_i$ . On a ainsi obtenu l'égalité voulue :

$$\pi^* Cl_{j_{oi}} = \pi^* Cl_i \cdot \pi^* Cl_j,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ramené à établir le théorème 2.3.2 dans le cas où  $j$  est de codimension 1. On pose maintenant  $P = \mathbf{P}(\mathcal{A}_{X/Z})$  et  $P' = \mathbf{P}(\mathcal{A}_{Y/Z})$ . Le diagramme suivant récapitule la situation :

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & \pi^{-1}(Y) & \longrightarrow & \text{Écl}_Z(X) \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \pi \\ P' & \longrightarrow & \text{Écl}_Z(Y) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

On veut établir l'égalité suivante dans  $H_Z^{2m+2}(X, \Lambda(m+1))$  :

$$\text{Cl}_{j \circ i} = \text{Cl}_i \cdot \text{Cl}_j .$$

D'après la proposition 2.2.2.1, il suffit de vérifier cette égalité dans  $H_P^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$  après application de  $\pi^*$ .

Par définition, la classe  $\text{Cl}_{j \circ i} \in H_Z^{2m+2}(X, \Lambda(m+1))$  se « restreint » en un élément

$$\gamma = \text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Cl}_{j \circ i})$$

dans  $H_P^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$  où  $\text{Cl}_{j \circ i} \in H^m(P, \Lambda(m))$ .

Notons  $\mathcal{I}$  l'Idéal de  $Y$  dans  $X$ ,  $\mathcal{I}_P$  celui de  $P$  dans  $\text{Écl}_Z(X)$  et  $\tilde{\mathcal{I}}$  celui de  $\text{Écl}_Z(Y)$  dans  $\text{Écl}_Z(X)$ . On a un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur  $\text{Écl}_Z(X)$  :

$$\pi^* \mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_P \otimes \tilde{\mathcal{I}} .$$

Cet isomorphisme est compatible aux trivialisations données sur  $\pi^{-1}(V)$  où  $V = X - Y$ . On obtient ainsi une égalité dans le groupe des classes d'équivalences de tels pseudo-diviseurs, ce qui permet de décomposer  $c_1(\pi^* \mathcal{I}, 1_{\pi^{-1}(V)}) \in H_{\pi^{-1}(V)}^2(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(1))$  en une somme de deux composantes :

$$\pi^*(c_1(\mathcal{I}, 1_V)) = c_1(\pi^* \mathcal{I}, 1_{\pi^{-1}(V)}) = c_1(\mathcal{I}_P, 1_{\text{Écl}_Z(X)-P}) + c_1(\tilde{\mathcal{I}}, 1_{\text{Écl}_Z(X)-\text{Écl}_Z(Y)}) .$$

On en déduit une décomposition

$$\pi^* \text{Cl}_i \cdot \pi^* \text{Cl}_j = \alpha + \beta$$

dans  $H_P^{2m+2}(\text{Écl}_Z(X), \Lambda(m+1))$  où

$$\begin{aligned} \alpha &= -\text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Cl}_{i|P}) , \\ \beta &= -\text{Gys}_{\text{Écl}_Z(Y) \subset \text{Écl}_Z(X)}(\text{Gys}_{P' \subset \text{Écl}_Z(Y)}(\text{Cl}_i)) . \end{aligned}$$

Le calcul de  $\text{Cl}_k$  où  $k$  est l'inclusion de l'intersection de diviseurs de Cartier s'intersectant transversalement dans le schéma ambiant réalisé dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.1.4] permet d'obtenir l'égalité d'opérateurs suivante :

$$\text{Gys}_{\text{Écl}_Z(Y) \subset \text{Écl}_Z(X)} \circ \text{Gys}_{P' \subset \text{Écl}_Z(Y)} = \text{Gys}_{P \subset \text{Écl}_Z(X)} \circ \text{Gys}_{P' \subset P} .$$

Notre but est d'établir l'égalité  $\gamma = \alpha + \beta$ . Les calculs précédents permettent d'écrire chacun des éléments  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  comme des images par le morphisme

$\text{Gys}_{\mathbb{P} \subset \text{Écl}_Z(X)}$  de classes  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  et  $\tilde{\gamma}$  dans  $H^{2m}(\mathbb{P}, \Lambda(m))$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= -\text{Cl}_{i|\mathbb{P}} , \\ \tilde{\beta} &= -\text{Gys}_{\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}}(\text{Clf}_i) , \\ \tilde{\gamma} &= \text{Clf}_{j_{oi}} .\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à établir l'égalité  $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$  dans  $H^{2m}(\mathbb{P}, \Lambda(m))$ .

D'après les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6, on a  $\text{Cl}_{i|Z} = (-1)^m c_m(\mathcal{N}_{Y/Z})$ . On en déduit l'égalité

$$\tilde{\alpha} = (-1)^{m+1} c_m(\mathcal{N}_{Y/Z}) .$$

Pour calculer  $\tilde{\beta}$ , on observe que l'Idéal de  $\mathbb{P}'$  dans  $\mathbb{P}$  s'identifie au faisceau inversible  $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}(-1)$  où  $\mathcal{K} = \mathcal{N}_{X/Y|Z}$  est le noyau de l'épimorphisme  $\mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{Y/Z}$ . On en déduit

$$\tilde{\beta} = (c_1(\mathcal{K}) - \xi) \cdot [\xi^{m-1} - c_1(\mathcal{N}_{Y/Z})\xi^{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} c_{m-1}(\mathcal{N}_{Y/Z})] .$$

Par ailleurs, la définition de  $\tilde{\gamma}$  donne l'égalité :

$$\tilde{\gamma} = -[\xi^m - c_1(\mathcal{N}_{X/Z})\xi^{m-1} + (-1)^m c_m(\mathcal{N}_{X/Z})] .$$

La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{N}_{X/Z} \rightarrow \mathcal{N}_{Y/Z} \rightarrow 0$$

de fibrés vectoriels sur  $Z$  permet d'obtenir aussitôt la relation voulue  $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

La classe que l'on a définie est évidemment compatible avec celle de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Cycle] 2.2] :

**PROPOSITION 2.3.4.** *Soit  $i: Y \rightarrow X$  une immersion régulière de codimension  $c$  entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas. Le morphisme de faisceaux  $\Lambda \rightarrow \mathcal{H}^{2c}(i^! \Lambda(c))$  induit par le morphisme  $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^! \Lambda$  est donné par la classe  $\text{cl } Y$  de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Cycle] 2.2].*

**2.4. Morphismes lisses.** Soit  $p: X \rightarrow S$  un morphisme lisse compactifiable de  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas de dimension relative  $d$ . D'après [SGA 4 XVIII 2.9], on dispose d'un morphisme trace

$$\text{Tr}_p: R^{2d} p_! \Lambda(d) \rightarrow \Lambda ,$$

que l'on peut réinterpréter sous la forme d'un morphisme

$$\text{Rp}_! \Lambda(d) [2d] \rightarrow \Lambda$$

dans  $\mathbf{D}^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$  (en effet, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et [SGA 4 X 4.3], les faisceaux  $R^i p_! \Lambda$  sont nuls pour  $i > 2d$ ).

**DÉFINITION 2.4.1.** Soit  $p: X \rightarrow S$  un morphisme lisse compactifiable de  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas. Le morphisme  $\text{Cl}_p: \Lambda \rightarrow p^? \Lambda$  <sup>vii</sup> dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  est le morphisme déduit par adjonction du morphisme  $\text{Rp}_! \Lambda(d) [2d] \rightarrow \Lambda$  défini ci-dessus.

D'après [SGA 4 XVIII 3.2.4], ce morphisme  $\text{Cl}_p$  est un isomorphisme : c'est la dualité de Poincaré.

<sup>vii</sup>On rappelle que l'on a posé  $p^? = p^!(-d) [-2d]$  où  $d$  est la dimension relative de  $p$ .

PROPOSITION 2.4.2. Si  $f: Z \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow X$  sont des morphismes lisses compactifiables composables, le diagramme suivant est commutatif dans  $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{j \circ i} & \downarrow i^?(\text{Cl}_j) \\ & & i^? j^? \Lambda \end{array}$$

Ceci est énoncé en [SGA 4 XVIII 3.2.4] et résulte de la compatibilité des morphismes traces à la composition, cf. propriété (Var 3) dans [SGA 4 XVIII 2.9].

REMARQUE 2.4.3. Si cette théorie avait été à notre disposition, il eût peut-être été plus commode d'utiliser ici la construction des foncteurs  $f^!$  pour  $f$  lissifiable mentionnée dans l'introduction de [SGA 4 XVIII 0.4]. Dans le cadre axiomatique des « foncteurs homotopiques stables », ceci est réalisé dans [Ayoub, 2006].

**2.5. Morphismes d'intersection complète lissifiables.**

DÉFINITION 2.5.1. Un morphisme d'intersection complète est un morphisme  $X \xrightarrow{f} S$  admettant localement une factorisation sous la forme  $X \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} S$  où  $p$  est lisse et  $i$  une immersion régulière (cf. [SGA 6 VII 1.4]). On pose  $\dim.$  rel. virt.  $f = \dim p - \text{codim } i$  : c'est la dimension relative virtuelle de  $f$  (cf. [SGA 6 VIII 1.9]).

DÉFINITION 2.5.2. On note  $\mathcal{S}$  la catégorie dont les objets sont les  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas quasi-compacts admettant un faisceau inversible ample et dont les morphismes sont les morphismes de type fini entre de tels schémas. On note  $\mathcal{S}^{ic}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{S}$  ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes d'intersection complète.

Dans  $\mathcal{S}$ , tout morphisme  $X \rightarrow Y$  peut se factoriser sous la forme  $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}_Y^n \xrightarrow{\pi} Y$  où  $i$  est une immersion et  $\pi$  la projection canonique. Tous les morphismes de  $\mathcal{S}$  sont donc compactifiables, on peut leur appliquer le formalisme des foncteurs  $Rf_!$  et  $f^!$ .

Les morphismes de  $\mathcal{S}^{ic}$  admettent des factorisations globales dans  $\mathcal{S}^{ic}$  sous la forme d'une immersion fermée régulière suivie d'un morphisme lisse.

DÉFINITION 2.5.3. Pour tout morphisme  $f: X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{S}^{ic}$ , on peut définir un foncteur

$$f^?: D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

par la formule  $f^? = f^!(-d)[-2d]$  où  $d = \dim.$  rel. virt.  $f$ .

Les foncteurs  $f^?$  sont les foncteurs image inverse pour une structure de catégorie fibrée convenable au-dessus de la catégorie  $\mathcal{S}^{ic}$  : on utilisera implicitement les isomorphismes de transitivité  $f^?g^? \simeq (gf)^?$  associés à la composition de deux morphismes composables dans  $\mathcal{S}^{ic}$ .

DÉFINITION 2.5.4. Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme dans  $\mathcal{S}^{ic}$ . On suppose donnée une factorisation de  $f$  dans  $\mathcal{S}^{ic}$  sous la forme  $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$  où  $i$  est une immersion régulière et  $p$  un morphisme lisse. On définit un morphisme

$$\text{Cl}_{p,i}: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$$

dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  comme étant le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow \text{Cl}_{p,i} & \downarrow i^?(\text{Cl}_p) \\ & & f^? \Lambda \end{array}$$

où  $\text{Cl}_i$  est le morphisme de la définition 2.3.1 et  $\text{Cl}_p$  celui de la définition 2.4.1.

**THÉORÈME 2.5.5.** *Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme dans  $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ . Si  $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$  et  $X \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} S$  sont deux factorisations du type envisagé dans la définition 2.5.4, alors les deux morphismes suivants dans la catégorie  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  sont égaux :*

$$\text{Cl}_{p,i} = \text{Cl}_{p',i'}: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda .$$

La notation suivante s'avère assez commode pour cette démonstration :

**DÉFINITION 2.5.6.** Si  $f: Z \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow X$  sont des morphismes composables dans  $\mathcal{S}^{\text{ic}}$ ,  $a: \Lambda \rightarrow g^? \Lambda$  et  $b: \Lambda \rightarrow f^? \Lambda$  des morphismes dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$  respectivement, on pose  $a \star b = f^?(a) \circ b: \Lambda \rightarrow (g \circ f)^? \Lambda$ .

Cette loi  $\star$  vérifiant une propriété d'associativité évidente, on omettra les parenthèses.

Par définition, on a ainsi :  $\text{Cl}_{p,i} = \text{Cl}_p \star \text{Cl}_i$ . On veut vérifier l'égalité  $\text{Cl}_p \star \text{Cl}_i = \text{Cl}_{p'} \star \text{Cl}_{i'}$ . Quitte à introduire le produit fibré de  $Y$  et de  $Y'$  au-dessus de  $S$ , on peut supposer que «  $Y'$  coiffe  $Y$  », à savoir qu'il existe un morphisme lisse  $q: Y' \rightarrow Y$  tel que  $i = q \circ i'$  et  $p' = p \circ q$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & & \\ & i' \nearrow & \downarrow q & \searrow p' & \\ X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

On a ainsi

$$\text{Cl}_{p',i'} = \text{Cl}_{p'} \star \text{Cl}_{i'} = \text{Cl}_p \star \text{Cl}_q \star \text{Cl}_{i'} ,$$

la dernière égalité résultant de la proposition 2.4.2. On est ramené à montrer l'égalité  $\text{Cl}_i = \text{Cl}_q \star \text{Cl}_{i'}$ . Pour cela, on introduit le produit fibré  $X'$  de  $X$  et  $Y'$  au-dessus de  $Y$  :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & Y' \\ \downarrow q' & \nearrow i' & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

$s$  (sur  $X' \rightarrow X$ )

Le morphisme  $i'$  donne naissance à la section  $s$  de la projection  $q': X' \rightarrow X$ . Le morphisme  $q$  étant lisse, l'immersion  $j: X' \rightarrow Y'$  est régulière. Admettons provisoirement les égalités suivantes :

$$\text{Cl}_{q'} \star \text{Cl}_s = \text{Id}_\Lambda , \quad \text{Cl}_q \star \text{Cl}_j = \text{Cl}_i \star \text{Cl}_{q'} .$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \text{Cl}_i &= \text{Cl}_i \star \text{Cl}_{q'} \star \text{Cl}_s \\ &= \text{Cl}_q \star \text{Cl}_j \star \text{Cl}_s . \end{aligned}$$

On utilise alors la composition des morphismes de Gysin associés aux immersions régulières (cf. théorème 2.3.2). Celle-ci donne l'égalité  $\text{Cl}_j \star \text{Cl}_s = \text{Cl}_{i'}$  qui

permet de conclure que  $Cl_i = Cl_q \star Cl_{i'}$ . Les deux lemmes qui suivent permettent d'obtenir les deux égalités admises ci-dessus :

LEMME 2.5.7. *Soit un diagramme cartésien dans  $\mathcal{S}$  :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & Y' \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

*On suppose que  $q$  est lisse et que  $i$  est une immersion régulière (donc  $j$  aussi). Alors on a l'égalité*

$$Cl_q \star Cl_j = Cl_i \star Cl_{q'}$$

On peut supposer que  $i$  est une immersion fermée. On identifie  $Cl_i$  (resp.  $Cl_j$ ) à une classe dans  $H_X^{2d}(Y, \Lambda(d))$  (resp.  $H_{X'}^{2c}(Y', \Lambda(c))$ ) où  $c$  est la codimension de l'immersion régulière  $i$ . D'après la proposition 2.2.3.1, on a  $q^*(Cl_i) = Cl_j$ . Bien que la vérification soit abracadabrante, la compatibilité du morphisme trace aux changements de base (propriété (Var 2) de [SGA 4 XVIII 2.9]) permet de conclure.

LEMME 2.5.8. *Soit  $p: X \rightarrow S$  un morphisme lisse dans  $\mathcal{S}$  admettant une section  $s: S \rightarrow X$  (qui est une immersion régulière). Alors,  $Cl_p \star Cl_s = Id_\Lambda$  dans  $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Les endomorphismes de  $\Lambda$  dans  $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$  sont donnés par des sections du faisceau  $\Lambda$  dans  $S$ , il suffit de vérifier que les nombres obtenus en passant aux points génériques de  $S$  sont égaux à 1. Comme on peut supposer que  $S$  est réduit et que la construction est compatible avec le passage aux points génériques, on peut supposer que  $S$  est le spectre d'un corps  $k$ . Notons  $x$  l'image de  $\text{Spec}(k)$  dans  $X$ . Quitte à remplacer  $X$  par un voisinage ouvert, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale  $\pi: X \rightarrow \mathbf{A}_k^d$  identifiant  $x$  à l'image inverse de l'origine dans  $\mathbf{A}_k^d$ . En utilisant l'isomorphisme évident  $H_{(0, \dots, 0)}^{2d}(\mathbf{A}_k^d, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$ , on se ramène au lemme suivant :

LEMME 2.5.9. *Pour tout entier naturel  $d$  et tout schéma  $S \in \mathcal{S}$ , si on note  $p: \mathbf{A}_S^d \rightarrow S$  la projection et  $s: S \rightarrow \mathbf{A}_S^d$  l'inclusion de l'origine, on a l'égalité*

$$Cl_p \star Cl_s = Id_\Lambda$$

dans  $D^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

L'énoncé est évident pour  $d = 0$ . Une récurrence évidente s'appuyant sur le théorème 2.3.2 et la proposition 2.4.2 permet de se ramener au cas où  $d = 1$ , et comme précédemment, on peut supposer que  $S = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps que l'on peut supposer séparablement clos. On se ramène finalement au lemme suivant :

LEMME 2.5.10. *Pour tout corps séparablement clos  $k$ , si on note  $p: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow \text{Spec}(k)$  la projection et  $s: \text{Spec}(k) \rightarrow \mathbf{P}_k^1$  l'inclusion de 0, on a l'égalité*

$$Cl_p \star Cl_s = Id_\Lambda$$

dans  $D^+(\text{Spec}(k)_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

L'idéal de l'immersion fermée  $s$  s'identifie au faisceau inversible  $\mathcal{O}(-1)$ . Par définition, l'image  $Cl_{s|_{\mathbf{P}_k^1}}$  de  $Cl_s$  dans  $H^2(\mathbf{P}_k^1, \Lambda(1))$  est  $c_1(\mathcal{O}(-1)) \cdot Cl_{\mathbf{P}_k^1}$ . Mais  $Cl_{\mathbf{P}_k^1} =$

−1. Ainsi,  $Cl_{s|\mathbf{P}_k^1} = c_1(\mathcal{O}(1))$ . Le degré du fibré en droites  $\mathcal{O}(1)$  étant 1, on peut conclure en utilisant la commutativité du diagramme suivant (cf. [SGA 4 XVIII 1.1.6]) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\mathbf{P}_k^1) & \xrightarrow{c_1} & H^2(\mathbf{P}_k^1, \Lambda(1)) \\ & \searrow \text{deg} & \downarrow \sim \text{Tr}_p \\ & & \Lambda \end{array}$$

**DÉFINITION 2.5.11.** Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme dans  $\mathcal{S}^{ic}$ . On note  $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^*\Lambda$  le morphisme  $Cl_{p,i}$  dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  défini à partir d’une factorisation de  $f$  dans  $\mathcal{S}^{ic}$  sous la forme  $f = p \circ i$  avec  $i$  une immersion régulière et  $p$  un morphisme lisse. D’après le théorème 2.5.5, cette définition est indépendante de la factorisation.

**THÉORÈME 2.5.12.** Si  $X \xrightarrow{f} Y$  et  $Y \xrightarrow{g} Z$  sont des morphismes composables dans  $\mathcal{S}^{ic}$ , le diagramme suivant est commutatif dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Cl_f} & f^*\Lambda \\ & \searrow Cl_{g \circ f} & \downarrow f^*(Cl_g) \\ & & (g \circ f)^*\Lambda \end{array}$$

Paraphrasant [SGA 6 VIII 2.6], on choisit une factorisation  $Y \xrightarrow{j} V' \xrightarrow{p'} Z$  dans  $\mathcal{S}^{ic}$  avec  $j$  une immersion régulière et  $p'$  lisse, et une immersion régulière  $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}_Y^n$ , de façon à obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbf{P}_Y^n & \xrightarrow{j'} & \mathbf{P}_{V'}^n \\ & \searrow f & \downarrow p & & \downarrow p'' \\ & & Y & \xrightarrow{j} & V' \\ & & & \searrow g & \downarrow p' \\ & & & & Z \end{array}$$

En utilisant le théorème 2.3.2 et la proposition 2.4.2, on obtient

$$Cl_{g \circ f} = (Cl_{p'} \star Cl_{p''}) \star (Cl_{j'} \star Cl_i) .$$

Le lemme 2.5.7 donne l’égalité :

$$Cl_{p''} \star Cl_{j'} = Cl_j \star Cl_p ,$$

ce qui permet d’obtenir :

$$Cl_{g \circ f} = (Cl_{p'} \star Cl_j) \star (Cl_p \star Cl_i) ,$$

où l’on reconnaît l’égalité  $Cl_{g \circ f} = Cl_g \star Cl_f$ .

**PROPOSITION 2.5.13.** Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme dans  $\mathcal{S}^{ic}$ . On suppose que  $f$  est plat de dimension relative  $d$ . Alors le morphisme  $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^*\Lambda$  correspond par adjonction au morphisme  $Rf_!\Lambda(d)[2d] \rightarrow \Lambda$  donné par le morphisme trace  $\text{Tr}_f: R^{2d}f_!\Lambda(d) \rightarrow \Lambda$ .

Compte tenu de la proposition 2.3.4, cela résulte de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Cycle] 2.3.8 (i)].

REMARQUE 2.5.14. Si  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme propre dans  $\mathcal{S}^{\text{ic}}$  de dimension relative virtuelle  $d$ , le morphisme  $\text{Cl}_f$  permet de définir, pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ , un morphisme  $f_*: \mathbf{H}^p(X, f^*K) \rightarrow \mathbf{H}^{p-2d}(Y, K(-d))$ , compatible à la composition. On peut aussi en définir une version à supports  $f_*: \mathbf{H}_Z^p(X, f^*K) \rightarrow \mathbf{H}_{Z'}^{p-2d}(Y, K(-d))$  dès que  $Z$  et  $Z'$  sont des fermés de  $X$  et  $Y$  respectivement tels que  $f(Z) \subset Z'$ .

### 3. Théorème de pureté

3.1. Énoncés. L'objectif de cette section est de donner une démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma régulier. Soit  $Y$  un sous-schéma (fermé) de  $X$  qui est aussi régulier. On note  $i: Y \rightarrow X$  l'immersion, et  $c$  sa codimension. Alors, le morphisme de Gysin  $\text{Cl}_i: \Lambda \rightarrow i^! \Lambda = i^! \Lambda(c)$  [2c] est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

COROLLAIRE 3.1.2. Soit  $f: X \rightarrow S$  un morphisme de type fini entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas réguliers. On suppose que  $X$  et  $S$  admettent un faisceau ample. Alors, le morphisme de Gysin  $\text{Cl}_f: \Lambda(d)[2d] \rightarrow f^! \Lambda$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , où  $d$  désigne la dimension relative virtuelle de  $f$ .

COROLLAIRE 3.1.3. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma régulier. Soit  $D$  un diviseur à croisements normaux dans  $X$ . On note  $j: X - D \rightarrow X$  l'inclusion de son complémentaire. Alors,  $\mathbf{R}j_* \Lambda$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Plus précisément, si  $D = D_1 + \dots + D_n$  est un diviseur à croisements normaux strict, alors  $\mathbf{R}^1 j_* \Lambda$  s'identifie à  $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i}(-1)$  et  $\mathbf{R}^* j_* \Lambda$  est l'algèbre extérieure sur  $\mathbf{R}^1 j_* \Lambda$ .

Ce corollaire mérite une démonstration. Pour la première assertion, on peut travailler localement pour la topologie étale sur  $X$  ; il suffit donc d'établir la deuxième assertion. On suppose que  $D = D_1 + \dots + D_n$  est un diviseur à croisements normaux strict. On note  $j_i: X - D_i \rightarrow X$  l'inclusion du complémentaire de  $D_i$  pour tout  $i$ . Nous allons montrer que le morphisme de Künneth

$$\mathbf{R}j_{1*} \Lambda \otimes^L \dots \otimes^L \mathbf{R}j_{n*} \Lambda \rightarrow \mathbf{R}j_* \Lambda$$

est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , ce qui impliquera le résultat vu que les faisceaux  $\mathbf{R}^q j_{i*} \Lambda$  sont connus par pureté ( $\Lambda$  pour  $q = 0$ ,  $\Lambda_{D_i}(-1)$  pour  $q = 1$  et 0 sinon) et qu'ils sont plats.

On procède par récurrence sur  $n$ . Les cas  $n = 0$  et  $n = 1$  sont évidents. On suppose  $n \geq 2$ , on pose  $D' = D_2 + \dots + D_n$  et on fait l'hypothèse que le résultat est connu pour  $D'$ . Il s'agit donc de montrer que si on note  $j': X - D' \rightarrow X$  l'inclusion du complémentaire de  $D'$ , alors le morphisme de Künneth

$$\mathbf{R}j_{1*} \Lambda \otimes^L \mathbf{R}j'_* \Lambda \rightarrow \mathbf{R}j_* \Lambda$$

est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme canonique

$$\mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda) \otimes^L \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(\Lambda_{X-D'}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(\Lambda_{X-D_1} \otimes \Lambda_{X-D'}, \Lambda)$$

est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . À  $K$  (resp.  $L$ ) fixé dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , la famille des  $L$  (resp.  $K$ ) tels que le morphisme

$$\mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(K, \Lambda) \otimes^L \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(L, \Lambda) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{om}(K \otimes^L L, \Lambda)$$

soit un isomorphisme, propriété que nous appellerons (Kü), est une sous-catégorie triangulée de  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .



Pour  $K = \Lambda$  ou  $L = \Lambda$ , la condition (Kü) est évidemment vérifiée, la montrer pour  $(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda_{X-D'})$  revient donc, par dévissage, à la montrer pour  $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{X-D'})$  ou encore pour  $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$ . Il résulte aussitôt du théorème de pureté et des compatibilités obtenues que si  $Y$  et  $Z$  sont deux sous-schémas fermés réguliers de  $X$  s'intersectant transversalement (*i.e.*  $Y \cap Z$  est régulier de codimension la somme des codimensions de  $Y$  et de  $Z$ ), alors  $(\Lambda_Y, \Lambda_Z)$  vérifie (Kü). En particulier,  $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_i})$  vérifie (Kü) pour  $i \geq 2$  et plus généralement, pour tout sous-ensemble non vide  $I$  de  $\{2, \dots, n\}$ ,  $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_I})$  vérifie (Kü) où  $D_I$  est l'intersection des  $D_i$  pour  $i \in I$ . En utilisant la suite exacte standard

$$0 \rightarrow \Lambda_{D'} \rightarrow \bigoplus_{2 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{2 \leq i < j \leq n} \Lambda_{D_{ij}} \rightarrow \dots,$$

on en déduit par dévissage la condition (Kü) pour  $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$ , ce qu'il fallait démontrer.

**DÉFINITION 3.1.4.** Un couple régulier est un couple  $(X, Y)$  où  $X$  est un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$  qui est régulier. On dit que  $(X, Y)$  est pur si la conclusion du théorème 3.1.1 est vraie pour l'inclusion de  $Y$  dans  $X$ . Si  $\bar{y} \rightarrow Y$  est un point géométrique de  $Y$ , on dira que  $(X, Y)$  est pur en  $\bar{y}$  si  $(Cl_i)_{\bar{y}}$  est un isomorphisme dans  $D^+(\bar{y}_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Le théorème 3.1.1 peut ainsi se reformuler en disant que tout couple régulier est pur. Dans la sous-section 3.2 sera introduite la notion de pureté ponctuelle qui consiste à étudier les couples réguliers de la forme  $(X, x)$  où  $X$  est un schéma local régulier de point fermé  $x$ . Pour démontrer le théorème de pureté, il suffira de savoir que les couples réguliers de cette forme sont purs. Dans la sous-section 3.3, on se ramènera au cas où l'anneau de coefficients  $\Lambda$  est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  avec  $\ell$  un nombre premier inversible sur les schémas réguliers considérés. Dans la sous-section 3.4, on établira quelques propriétés utiles concernant la pureté des couples réguliers donnés par des diviseurs. Comme dans la démonstration de [Fujiwara, 2002], la démonstration de la pureté ponctuelle pour des schémas réguliers arbitraires se ramènera à celle des schémas réguliers qui sont de type fini sur un trait  $S$  (d'inégale caractéristique). Dans la sous-section 3.5, on obtiendra des conditions suffisantes pour montrer que des schémas réguliers de type fini sur  $S$  sont ponctuellement purs. La sous-section 3.6 donnera les énoncés de géométrie logarithmique permettant d'établir que si  $(X, M)$  est un log-schéma log-lisse sur un trait (muni de sa log-structure canonique) et que le schéma  $X$  est régulier, alors  $X$  est ponctuellement pur. La démonstration du théorème 3.1.1 sera donnée dans la sous-section 3.7. Elle utilisera les résultats des sous-sections précédentes ainsi que trois théorèmes de résolution des singularités que l'on peut résumer ainsi :

- utilisation d'altérations pour obtenir un schéma à réduction semi-stable à partir d'un schéma (normal) sur  $S$  (cf. [Vidal, 2004b, proposition 4.4.1]);
- résolution des singularités d'une action modérée d'un groupe fini sur un log-schéma log-régulier de façon à obtenir une action très modérée (cf. exposé VI);
- résolution des log-singularités des log-schémas log-réguliers (cf. exposé VI).

### 3.2. Pureté ponctuelle.

**DÉFINITION 3.2.1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local régulier. On dit que  $X$  est ponctuellement pur en son point fermé  $\mathfrak{x}$  si le morphisme  $Cl_{\mathfrak{i}}: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$  est un isomorphisme dans  $D^+(x_{\acute{e}t}, \Lambda)$  où  $i: \mathfrak{x} \rightarrow X$  est l'inclusion du point fermé de  $X$ .

Un schéma local régulier est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si son hensélisé (resp. son hensélisé strict) l'est.

**DÉFINITION 3.2.2.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma. Si  $\mathfrak{x} \in X$ , on dit que  $X$  est ponctuellement pur au point  $\mathfrak{x}$  si le localisé de  $X$  en  $\mathfrak{x}$  est ponctuellement pur en son point fermé. On dit que  $X$  est ponctuellement pur s'il l'est en tous ses points.

La proposition suivante est [Fujiwara, 2002, proposition 2.2.4]. La démonstration de cet article semble compliquée puisqu'elle passe par des résultats plus fins que ceux dont nous avons besoin. On en redonne donc une démonstration plus courte.

**PROPOSITION 3.2.3.** Soit  $i: Y \rightarrow X$  une immersion fermée entre schémas réguliers. Le nombre de conditions satisfaites parmi les trois suivantes ne peut pas être deux :

- (a) Le couple régulier  $(X, Y)$  est pur ;
- (b) Le schéma  $Y$  est ponctuellement pur ;
- (c) Le schéma  $X$  est ponctuellement pur aux points situés dans l'image de  $Y$ .

Soit  $y \in Y$ , notons  $V(y)$  le localisé de  $Y$  en  $y$  et  $V(x)$  celui de l'image  $x$  de  $y$  dans  $X$ . On a un diagramme de schémas :

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{i_y} & V(y) \\ & \searrow i_x & \downarrow i' \\ & & V(x) \end{array}$$

La composition des morphismes de Gysin donne le diagramme commutatif suivant dans  $D^+(y_{\acute{e}t}, \Lambda)$  :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Cl_{i_y}} & i_y^? \Lambda \\ & \searrow Cl_{i_x} & \downarrow i_y^? Cl_{i'} \\ & & i_x^? \Lambda \end{array}$$

Sur ce diagramme, on voit aussitôt que (a) et (b) impliquent (c) et que (a) et (c) impliquent (b). Montrons que (b) et (c) impliquent (a). Il s'agit de montrer que pour tout point  $y$  de  $Y$ , le morphisme  $i_y^? Cl_{i'}$  est un isomorphisme. On peut procéder par récurrence sur la dimension de  $V(y)$ . On peut ainsi supposer que le support d'un cône  $C$  du morphisme  $Cl_{i'}$  dans  $D^+(V(y)_{\acute{e}t}, \Lambda)$  est contenu dans  $\{y\}$ . Mézalar, le morphisme canonique  $i_y^! C \rightarrow i_y^* C$  est un isomorphisme ; le diagramme ci-dessus montre que  $i_y^! C = 0$ , ce qui permet de conclure que  $C = 0$  et finalement d'obtenir (a).

Rappelons quelques propriétés importantes concernant la pureté ponctuelle :

**PROPOSITION 3.2.4** ([Fujiwara, 2002, proposition 2.2.2]). Soit  $X$  un schéma local strictement hensélien régulier. Le complété  $\hat{X}$  est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si  $X$  l'est.

PROPOSITION 3.2.5 ([Fujiwara, 2002, corollary 2.2.3]). *Soit  $k$  un corps premier. Si  $X$  est schéma régulier qui est un  $k$ -schéma, alors  $X$  est ponctuellement pur.*

### 3.3. Changement de coefficients.

PROPOSITION 3.3.1. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $n = \prod_{j=1}^k \ell_j^{v_j}$  la factorisation de  $n$  en produit de puissances de nombres premiers distincts. Un couple régulier  $(X, Y)$  est pur relativement à l'anneau de coefficients  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients  $\mathbf{Z}/\ell_j^{v_j}\mathbf{Z}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ .*

Cela résulte aussitôt du lemme chinois et du fait que si  $m$  est un entier naturel divisant  $n$ , alors pour toute immersion fermée régulière  $i: Y \rightarrow X$ , le diagramme évident commute dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^*\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} & \xrightarrow{\text{Cl}_i} & i^*\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

PROPOSITION 3.3.2. *Soit  $\ell$  un nombre premier. Pour tout entier  $v \geq 1$ , un couple régulier  $(X, Y)$  est pur relativement à l'anneau de coefficients  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients  $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$ .*

En utilisant la résolution de Godement des faisceaux  $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}(c)$  (où  $c$  est la codimension de l'immersion  $i: Y \rightarrow X$ ) pour tout  $v$ , on peut représenter les morphismes de Gysin  $\text{Cl}_i: \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z} \rightarrow i^*\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$  dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z})$  par des cocycles. Un tel cocycle pour  $v_0$  fixé induit pour tout entier  $v \leq v_0$  un cocycle représentant le morphisme de Gysin à coefficients dans  $\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$ . Les propriétés élémentaires de la résolution de Godement font que, si on le souhaite, on peut en fait trouver une famille compatible de cocycles pour tout  $v \in \mathbf{N}$ .

Compte tenu de ces observations, une fois ces cocycles convenablement choisis, on dispose d'un cône privilégié  $C(v)$  du morphisme  $\text{Cl}_i: \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z} \rightarrow i^*\mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$  dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z})$  pour tout  $v \in \mathbf{N}$  et de triangles

$$C(\mu) \longrightarrow C(\mu + v) \longrightarrow C(v) \longrightarrow C(\mu)[1]$$

dans  $D^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mu+v}\mathbf{Z})$  pour tous  $(\mu, v) \in \mathbf{N}^2$ .

Par conséquent, si  $C(1) = 0$ , il vient que pour tout  $v \geq 1$ ,  $C(v) = 0$ . Inversement, si  $C(1)$  est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de  $C(v)$  pour tout  $v \geq 1$ .

### 3.4. Diviseurs réguliers.

DÉFINITION 3.4.1. Si  $X$  est un schéma et  $\bar{x} \rightarrow X$  un point géométrique, on note  $V(\bar{x})$  l'hensélisé strict de  $X$  en  $\bar{x}$  et  $i_{\bar{x}}: V(\bar{x}) \rightarrow X$  le morphisme canonique.

PROPOSITION 3.4.2. *Soit  $X$  un schéma régulier. Soit  $D$  un diviseur régulier de  $X$ . Le couple régulier  $(X, D)$  est pur si et seulement si pour tout point géométrique  $\bar{x} \rightarrow D$ , on a  $H_{\text{ét}}^q(V(\bar{x}) - i_{\bar{x}}^{-1}(D), \Lambda) = 0$  pour tout  $q \geq 2$ .*

Cela résulte du calcul de  $H_{\text{ét}}^q(V(\bar{x}) - i_{\bar{x}}^{-1}(D), \Lambda)$  pour  $q \in \{0, 1\}$  (cf. [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Cycle] 2.1.4]).

**PROPOSITION 3.4.3.** *On suppose que l'anneau de coefficients est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier. Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme fini et plat de degré constant premier à  $\ell$  entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schémas réguliers. Soit  $D$  un diviseur régulier de  $X$ . On suppose que  $D' = f^{-1}(D)_{\text{réd}}$  est un diviseur régulier de  $Y$ . Si le couple régulier  $(Y, D')$  est pur, alors  $(X, D)$  aussi.*

Grâce à la proposition 3.4.2, on peut choisir un point géométrique de  $D$  et remplacer  $X$  par son hensélisé strict en ce point. On suppose donc que  $X$  et  $D$  sont locaux strictement henséliens et on se concentre sur la pureté du couple  $(X, D)$  en le point fermé de  $D$ . Le schéma  $Y$  est alors réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens ; au moins un de ceux-ci est de degré premier à  $\ell$  sur  $X$ . On peut donc supposer que  $Y$  aussi est local strictement hensélien. Il suffit alors de montrer que  $H^q(X - D, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  s'injecte dans  $H^q(Y - D', \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ , ce qui résulte du lemme suivant :

**LEMME 3.4.4.** *On suppose que l'anneau de coefficients  $\Lambda$  est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier. Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme de présentation finie, fini et plat de rang  $d$  premier à  $\ell$  entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schémas. Alors, le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow f_*\Lambda$  est un monomorphisme scindé dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

D'après [SGA 4 XVII 6.2.3], on a un morphisme  $\text{Tr}_f: f_*\Lambda \rightarrow \Lambda$  tel que la composée

$$\Lambda \rightarrow f_*\Lambda \rightarrow \Lambda$$

soit la multiplication par  $d$ , ce qui donne le scindage voulu puisque  $d$  est inversible dans  $\Lambda$ .

**PROPOSITION 3.4.5.** *On suppose que l'anneau de coefficients  $\Lambda$  est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma régulier. Soit  $f$  une fonction sur  $X$  dont le lieu des zéros  $D = V(f)$  soit un diviseur régulier de  $X$ . On pose  $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f))$ . On note  $\pi: X' \rightarrow X$  la projection,  $D' = \pi^{-1}(D)_{\text{réd}}$  (noter que  $D' \rightarrow D$  est un isomorphisme). Alors,  $X'$  est un schéma régulier, et le couple régulier  $(X', D')$  est pur si et seulement si le couple régulier  $(X, D)$  l'est.*

Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $D$  (on identifiera aussi  $\bar{x}$  à un point géométrique de  $D'$ ). On va en fait montrer que  $(X, D)$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si  $(X', D')$  l'est. On peut supposer que  $X$  est le spectre premier d'un anneau local strictement hensélien  $A$  d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et que  $\bar{x}$  est au-dessus du point fermé de  $X$ . On a évidemment  $f \in \mathfrak{m}$  ; le fait que  $D = V(f)$  soit régulier revient à dire que  $f \notin \mathfrak{m}^2$ .

Notons  $A' = A[T]/(T^\ell - f)$ . En considérant le déterminant de l'endomorphisme de  $A'$  comme  $A$ -module donné par la multiplication par un élément  $b \in A'$ , on observe que  $b$  est inversible dans  $A'$  si et seulement si son image dans l'algèbre locale  $(A/\mathfrak{m})[T]/(T^\ell)$  est inversible. Il en résulte que  $A'$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}' = (T) + \mathfrak{m}A'$ . Par ailleurs, on a un isomorphisme  $A/(f) \xrightarrow{\sim} A'/(T)$  (i.e.  $D' \rightarrow D$  est un isomorphisme). On construit facilement un isomorphisme  $A_{(f)}[T]/(T^d - f) \xrightarrow{\sim} A'_{(T)}$ , ce qui montre que le localisé de  $A'$  en  $(T)$  est un anneau de valuation discrète. La codimension de l'idéal premier  $(T)$  dans  $A'$  est donc 1. Compte tenu du fait que  $A'/(T)$  soit régulier, il en résulte que  $X'$  est régulier.

On peut considérer, pour tout entier  $v \geq 0$ , le  $X$ -schéma affine  $X^v = \text{Spec}(\mathcal{O}_X[T]/(T^{\ell^v} - f))$ . En élevant  $T$  à la puissance  $\ell$ , on obtient une tour de morphismes

$$\dots \rightarrow X^{v+1} \rightarrow X^v \rightarrow \dots \rightarrow X^1 \rightarrow X^0,$$

le dernier morphisme  $X^1 \rightarrow X^0$  s'identifiant à  $\pi: X' \rightarrow X$ . Au-dessus de  $X - D$ , cette tour de morphismes définit une tour de revêtements étales galoisiens de  $X - D$  de groupe de Galois  $\mathbf{Z}_\ell(1) = \varprojlim_v \mu_{\ell^v}$  où pour tout entier  $n$  inversible dans  $A$ , on note simplement  $\mu_n = \mu_n(A)$ .

Cette tour de revêtements définit un morphisme (surjectif) de groupes profinis  $\pi_1^{\text{ét}}(X-D)^{\text{ab}} \rightarrow \mathbf{Z}_\ell(1)$ . Par conséquent, on a un morphisme de topos  $\rho_f: (X-D)_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BZ}_\ell(1)$  où  $\mathbf{BZ}_\ell(1)$  désigne le topos des  $\mathbf{Z}_\ell(1)$ -ensembles discrets.

LEMME 3.4.6. *Le couple régulier  $(X, D)$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si le morphisme*

$$\text{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \rightarrow \text{R}\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

*induit par le morphisme de topos  $\rho_f$  est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.*

Ce lemme découle des deux lemmes suivants :

LEMME 3.4.7. *Pour tout entier  $q \geq 2$ ,  $H^q(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) = 0$  et on a des isomorphismes canoniques*

$$H^0(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mu_\ell, \quad H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \text{Hom}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}.$$

Il s'agit de montrer que  $\mathbf{Z}_\ell(1)$  est de  $\ell$ -dimension cohomologique 1. Pour cela, voir par exemple [Serre, 1994, §3.4, chapitre I].

LEMME 3.4.8. *Le morphisme composé*

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \simeq H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \xrightarrow{\rho_f^*} H^1((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \xrightarrow{\sim} H_D^2(X, \mu_\ell)$$

*est donné (au signe près) par la classe de Gysin  $\text{Cl}_{D \subset X}$ .*

Un relèvement dans  $H^1(X - D, \mu_\ell)$  de  $\text{Cl}_{D \subset X}$  est donné par l'image de  $f$  par le morphisme de bord  $H^0((X - D)_{\text{ét}}, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^1((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$  associé à la suite exacte de Kummer

$$0 \rightarrow \mu_\ell \rightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{p} \mathbf{G}_m \rightarrow 0,$$

autrement dit par le  $\mu_\ell$ -torseur  $p^{-1}(f) \subset \mathbf{G}_m$ . Géométriquement, ce toseur s'identifie tautologiquement au revêtement galoisien  $X' - D' \rightarrow X - D$  de groupe de Galois  $\mu_\ell$ . Bien sûr, la classe de ce  $\mu_\ell$ -torseur est donnée par le morphisme évident  $\pi_1^{\text{ét}}(X - D)^{\text{ab}} \rightarrow \mathbf{Z}_\ell(1) \rightarrow \mu_\ell$  donnant l'image par  $\rho_f^*$  du générateur canonique de  $H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell)$ .

On peut appliquer le lemme 3.4.6 à  $X'$  : il vient que le couple régulier  $(X', D')$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si le morphisme

$$\text{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \rightarrow \text{R}\Gamma((X' - D')_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos  $\rho_T: (X' - D')_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BZ}_\ell(1)$  est un isomorphisme.

On dispose d'un carré commutatif de topos :

$$\begin{array}{ccc} (X' - D')_{\text{ét}} & \xrightarrow{\rho_T} & \mathbf{BZ}_\ell(1) \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ (X - D)_{\text{ét}} & \xrightarrow{\rho_f} & \mathbf{BZ}_\ell(1) \end{array}$$

où  $g$  est induit par  $\pi: X' \rightarrow X$  et  $g'$  par la multiplication par  $\ell$  sur  $\mathbf{Z}_\ell(1)$ . Le faisceau  $g_*\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  s'identifie canoniquement à  $\rho_f^*g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ . Il en découle aisément que le couple régulier  $(X', D')$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si le morphisme canonique

$$R\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) \rightarrow R\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \rho_f^*g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$$

est un isomorphisme.

La cohomologie relative du morphisme de topos  $\rho_f: (X - D)_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BZ}_\ell(1)$  définit un foncteur triangulé

$$F: D^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow D^+(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

tel que pour tout  $K \in D^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ ,  $F(K)$  soit isomorphe à un cône du morphisme canonique  $R\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), K) \rightarrow R\Gamma((X - D)_{\text{ét}}, \rho_f^*K)$ .

Le lemme suivant découle de ce qui précède :

**LEMME 3.4.9.** *Le couple régulier  $(X, D)$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si  $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$  tandis que  $(X', D')$  est pur en  $\bar{x}$  si et seulement si  $F(g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) = 0$ .*

Comme  $\mathbf{Z}_\ell(1)$  est un pro- $\ell$ -groupe, le faisceau  $g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  est une extension successive de  $\ell$  copies de  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ . Le foncteur  $F$  étant triangulé, on en déduit aussitôt que si  $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  est nul, alors  $F(g'_*\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  aussi et que si  $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de  $F(g'_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$ . Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4.5.

**3.5. Schémas sur un trait.** Soit  $S$  un trait. On note  $s$  son point fermé,  $\eta$  son point générique et  $\pi$  une uniformisante.

**PROPOSITION 3.5.1.** *Le trait  $S$  est ponctuellement pur.*

Il s'agit de montrer que  $S$  est ponctuellement pur en son point fermé. On peut supposer que  $S$  est strictement hensélien ; cela résulte alors facilement du fait que le corps des fractions de  $S$  soit de  $\ell$ -dimension cohomologique 1 pour tout nombre premier inversible sur  $S$  (cf. [SGA 4 x 2.2]).

**PROPOSITION 3.5.2.** *Pour tout entier naturel  $n$ , l'espace affine  $\mathbf{A}_S^n$  est ponctuellement pur.*

D'après la proposition 3.2.5, les schémas  $\mathbf{A}_s^n$  et  $\mathbf{A}_\eta^n$  sont ponctuellement purs. Ainsi,  $\mathbf{A}_s^n$  est ponctuellement pur en les points de la fibre générique. Pour établir la pureté ponctuelle de  $\mathbf{A}_s^n$  en les points de la fibre spéciale, on utilise la proposition 3.2.3 : il suffit de montrer que le couple régulier  $(\mathbf{A}_s^n, \mathbf{A}_s^n)$  est pur. Le cas  $n = 0$  résulte de la proposition 3.5.1 et le cas général en découle en vertu du théorème de changement de base lisse.

**COROLLAIRE 3.5.3.** *Un  $S$ -schéma lisse est ponctuellement pur.*

**DÉFINITION 3.5.4.** Soit  $p: X \rightarrow S$  un morphisme de type fini, avec  $X$  régulier et admettant un faisceau ample. On pose  $K_X = p^*\Lambda_S$  et on dispose d'un morphisme de Gysin  $\text{Cl}_{X/S}: \Lambda_X \rightarrow K_X$  dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  (cf. définition 2.5.11).

**PROPOSITION 3.5.5.** *Soit  $p: X \rightarrow S$  un morphisme de type fini, avec  $X$  régulier et admettant un faisceau ample. Le schéma  $X$  est ponctuellement pur si et seulement si le morphisme  $\text{Cl}_{X/S}: \Lambda_X \rightarrow K_X$  est un isomorphisme dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

On choisit une factorisation  $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{q} S$  de  $p$  (dans la catégorie  $\mathcal{S}^{ic}$ ) avec  $Y$  lisse sur  $S$  et  $i$  une immersion fermée (régulière). D'après le théorème 2.5.12 (ou plutôt par définition de  $Cl_{X/S}$ ), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{Cl_i} & i^? \Lambda \\ & \searrow Cl_{X/S} & \downarrow \sim i^? Cl_q \\ & & i^? q^? \Lambda \end{array}$$

Le morphisme  $q$  étant lisse, le morphisme de Gysin  $Cl_q$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $Cl_{X/S}$  est un isomorphisme si et seulement si  $Cl_i: \Lambda \rightarrow i^? \Lambda$  en est un. D'après la proposition 3.2.3 et compte tenu du fait que  $Y$  soit ponctuellement pur (cf. corollaire 3.5.3), ceci équivaut encore à dire que  $X$  est ponctuellement pur.

**COROLLAIRE 3.5.6.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma de type fini qui est régulier. Soit  $Y$  un  $X$ -schéma lisse. Si  $X$  est ponctuellement pur, alors  $Y$  aussi.*

**PROPOSITION 3.5.7.** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre et dominant de  $S$ -schémas où  $X$  et  $Y$  sont supposés de type fini sur  $S$ , intègres, réguliers et admettant des faisceaux amples. On suppose de plus que  $f$  est génériquement étale de degré  $d$  inversible dans  $\Lambda$ . Alors, la pureté ponctuelle de  $X$  implique celle de  $Y$ .*

Le morphisme  $f$  est localement d'intersection complète lissifiable de dimension relative virtuelle zéro, d'où  $f^? = f^!$ . Le morphisme de Gysin relatif à  $f$  est un morphisme  $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$ .

**LEMME 3.5.8.** *On peut généraliser le morphisme  $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$  en des morphismes  $f^* M \rightarrow f^! M$ , fonctoriellement en  $M \in D^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Le morphisme  $Cl_f: \Lambda \rightarrow f^! \Lambda$  correspond par adjonction à un morphisme  $Rf_! \Lambda \rightarrow \Lambda$ , que l'on peut tensoriser avec  $M$  pour obtenir (via la formule de projection) un morphisme  $Rf_! f^* M \rightarrow M$  qui correspond lui-même par adjonction au morphisme  $f^* M \rightarrow f^! M$  du type recherché.

En appliquant la fonctorialité de la construction du lemme au morphisme  $Cl_{Y/S}: \Lambda_Y \rightarrow K_Y$ , on obtient un diagramme commutatif dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

$$\begin{array}{ccc} f^* \Lambda_Y & \longrightarrow & f^! \Lambda_Y \\ f^*(Cl_{Y/S}) \downarrow & & \downarrow f^!(Cl_{Y/S}) \\ f^* K_Y & \longrightarrow & f^! K_Y \end{array}$$

Via l'isomorphisme canonique  $f^* \Lambda_Y \simeq \Lambda_X$ , le morphisme du haut s'identifie au morphisme  $Cl_f: \Lambda_X \rightarrow f^! \Lambda_Y$ ; celui de droite est  $f^!(Cl_{Y/S})$ . D'après le théorème 2.5.12, il vient que le morphisme composé  $\Lambda_X \simeq f^* \Lambda_Y \rightarrow f^! K_Y \simeq K_X$  est le morphisme de Gysin  $Cl_{X/S}$ . On déduit de ceci un diagramme commutatif de la forme suivante dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$\begin{array}{ccccc} f^* \Lambda_Y & \xrightarrow{\sim} & \Lambda_X & \longrightarrow & f^! \Lambda_Y \\ f^*(Cl_{Y/S}) \downarrow & & \downarrow Cl_{X/S} & & \downarrow f^!(Cl_{Y/S}) \\ f^* K_Y & \longrightarrow & K_X & \xrightarrow{\sim} & f^! K_Y \end{array}$$

Comme  $f$  est propre, on obtient par adjonction un nouveau diagramme commutatif dans  $\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_Y & \longrightarrow & \mathbf{R}f_*\Lambda_X & \longrightarrow & \Lambda_Y \\ \text{Cl}_{Y/S} \downarrow & & \downarrow \mathbf{R}f_*(\text{Cl}_{X/S}) & & \downarrow \text{Cl}_{Y/S} \\ K_Y & \longrightarrow & \mathbf{R}f_*K_X & \longrightarrow & K_Y \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus met en évidence une relation entre les morphismes  $\text{Cl}_{Y/S}$  et  $\mathbf{R}f_*(\text{Cl}_{X/S})$ . Comme va le montrer le lemme suivant, le premier morphisme est un facteur direct du second, ce qui montre que la pureté ponctuelle de  $X$  implique celle de  $Y$ , achevant la démonstration de la proposition 3.5.7.

**LEMME 3.5.9.** *Sur le diagramme précédent, les morphismes composés  $\Lambda_Y \rightarrow \Lambda_Y$  et  $K_Y \rightarrow K_Y$  sont les multiplications par le degré  $d$  (en particulier, ce sont des isomorphismes).*

Comme  $Y$  est connexe (non vide), on a un isomorphisme évident  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_{\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)}(\Lambda_Y)$ . D'après le théorème de bidualité locale (cf. [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 4.3]), on a aussi un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{End}_{\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)}(K_Y)$ . Il suffit donc d'obtenir la conclusion au-dessus d'un ouvert non vide de  $Y$ . Quitte à remplacer  $Y$  par un ouvert non vide convenable, on peut supposer que  $f$  est un revêtement étale. On est ainsi ramené au lemme suivant :

**LEMME 3.5.10.** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas fini étale de degré constant  $d$ . Pour tout objet  $M \in \mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme composé*

$$M \rightarrow f_*f^*M \rightarrow M$$

*déduit des adjonctions canoniques  $(f^*, f_*)$  et  $(f_*, f^*)$  est la multiplication par  $d$ .*

Grâce aux formules de projection, on peut supposer que  $M = \Lambda_Y$ . Il suffit alors d'établir le résultat après un changement de base étale (non vide) trivialisant le revêtement  $X \rightarrow Y$  (par exemple une clôture galoisienne de ce revêtement). Bref, on peut supposer que  $X$  est une réunion disjointe de  $d$  copies de  $Y$ , auquel cas le résultat est trivial.

**DÉFINITION 3.5.11.** Soit  $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbf{N}^n$ . On définit un  $S$ -schéma :

$$V(S, \pi, e_1, \dots, e_n) = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n] / (\prod_{i=1}^n T_i^{e_i} - \pi)) .$$

Pour tout  $i$ , on note  $H_i$  le sous-schéma fermé de  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  défini par l'équation  $T_i = 0$ .

**PROPOSITION 3.5.12.** *Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers naturels non tous nuls. Alors, le schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est régulier et ponctuellement pur.*

On peut supposer que l'anneau des coefficients est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier inversible sur  $S$ .

**LEMME 3.5.13.**

- (i) *Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers non tous nuls dont au moins un est inversible dans  $\eta$ , le  $S$ -schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est intègre, régulier et de fibre générique lisse ;*



- (ii) Soit  $d \geq 1$ , si  $S'$  est le trait obtenu en extrayant une racine  $d$ -ième  $\pi'$  de l'uniformisante  $\pi$ <sup>viii</sup>, pour tout  $n$ -uplet  $(e_1, \dots, e_n)$ , on a un isomorphisme de schémas

$$V(S', \pi', e_1, \dots, e_n) = V(S, \pi, de_1, \dots, de_n) ;$$

- (iii) Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers non tous nuls, le schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est régulier et intègre ;
- (iv) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers non tous nuls, le schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est ponctuellement pur si et seulement si pour tout  $i$  tel que  $e_i > 0$ , le couple régulier  $(V(S, \pi, e_1, \dots, e_n), H_i)$  est pur<sup>ix</sup> ;
- (v) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers non nuls, soit  $e$  le p.p.c.m. des  $e_i$  ; on suppose que  $\ell$  ne divise pas  $e$  ; si  $V(S, \pi, e, \dots, e)$  est ponctuellement pur, alors  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  aussi ;
- (vi) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers non tous nuls,  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est ponctuellement pur si et seulement si  $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n)$  est ponctuellement pur.

Les assertions (i) et (ii) sont laissées en exercice au lecteur. L'assertion (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Pour montrer l'assertion (iv), il suffit d'observer que les diviseurs  $H_i$  pour  $e_i > 0$  sont ponctuellement purs (ce sont des espaces affines sur le corps résiduel de  $S$ ) et forment un recouvrement de la fibre spéciale de  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ . La fibre générique du schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  étant ponctuellement pure (puisque lisse sur une extension de  $\eta$ ), on peut conclure en utilisant la proposition 3.2.3.

Concernant l'assertion (v), l'élévation des  $T_i$  à la puissance  $\frac{e}{e_i}$  définit un morphisme fini et plat  $V(S, \pi, e, \dots, e) \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  de degré  $\frac{e^n}{e_1 \dots e_n}$  (premier à  $\ell$ ) ; compte tenu du critère (iv), la proposition 3.4.3 permet de conclure.

Pour établir (vi), remarquons que l'élévation de  $T_1$  à la puissance  $\ell$  définit un morphisme fini et plat  $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n) \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  de degré  $\ell$  et étale en dehors du lieu d'annulation de  $T_1$ . Il suffit donc de montrer que  $(V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n), H_1)$  est pur si et seulement si  $(V(S, \pi, e_1, \dots, e_n), H_1)$  l'est, ce qui résulte de la proposition 3.4.5.

Établissons la proposition 3.5.12. D'après l'assertion (iii), les schémas considérés sont réguliers. Pour établir leur pureté ponctuelle, d'après le corollaire 3.5.6, on peut supposer qu'aucun des exposants  $e_i$  n'est nul. Dans le cas où les tous les entiers  $e_i$  valent 1, le résultat est établi dans [Illusie, 2004, theorem 1.4] (voir aussi [Rapoport & Zink, 1982, Satz 2.21]). Grâce à l'utilisation d'un trait auxiliaire, l'assertion (ii) permet d'en déduire que pour tout entier  $d \geq 1$ ,  $V(S, \pi, d, \dots, d)$  est ponctuellement pur. En utilisant l'assertion (v), on obtient que  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  est ponctuellement pur si  $\ell$  ne divise aucun des entiers  $e_i$ . L'assertion (vi) permet de passer au cas général.

<sup>viii</sup>Rappelons brièvement pourquoi  $S'$  est bien un trait. Si  $A$  est un anneau de valuation discrète,  $\pi$  une uniformisante et  $d \geq 1$ , notons  $A' = A[X]/(X^d - \pi)$ . Il est évident que  $A'$  est local noethérien et que son idéal maximal est engendré par  $X$ . On vérifie aussitôt que la suite évidente  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{X} A' \rightarrow A'/(X) \rightarrow 0$  de  $A'$ -modules est exacte, ce qui donne une résolution projective du corps résiduel de  $A'$ . D'après [Serre, 1965, §D.1, chapitre IV],  $A'$  est régulier de dimension 0 ou 1 et comme  $A'$  n'est pas un corps, c'est un anneau de valuation discrète.

<sup>ix</sup>Si  $e_i = 0$ , c'est vrai aussi : c'est un cas particulier du théorème de pureté relatif, cf. [SGA 4 XVI 3.7].

### 3.6. Géométrie logarithmique.

**DÉFINITION 3.6.1.** Soit  $S$  un trait, de point générique  $\eta$ . La log-structure canonique sur  $S$  est la log-structure image directe de la log-structure triviale sur  $\eta$ . Toute uniformisante de  $S$  définit un morphisme de monoïdes  $\mathbf{N} \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$  donnant naissance à une carte  $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$  du log-schéma  $S$ .

L'objectif de cette sous-section d'établir le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.6.2.** Soit  $S$  un trait muni de sa log-structure canonique. Soit  $(X, M) \rightarrow S$  un morphisme log-lisse de log-schémas fs. Si le schéma  $X$  est régulier, alors il est ponctuellement pur.

La proposition suivante précise [Kato, 1988, theorem 3.5] dans le cas des log-schémas fs :

**PROPOSITION 3.6.3.** Soit  $(X, M) \rightarrow (Y, N)$  un morphisme log-lisse entre log-schémas fs. On suppose donnée une carte  $Y \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])$  de  $(Y, N)$  où  $Q$  est un monoïde fs sans torsion<sup>\*</sup>. Pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , il existe un voisinage étale  $U$  de  $\bar{x}$ , un morphisme injectif de monoïde  $Q \rightarrow P$  avec  $P$  fs sans torsion et une carte  $U \rightarrow \mathbf{Z}[P]$  tels que la partie de torsion de  $\text{Coker}(Q^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}})$  soit d'ordre inversible sur  $U$  et que le morphisme de schémas  $U \rightarrow Y \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  soit étale.

Dans la démonstration du critère de log-lissité de [Kato, 1988, theorem 3.5], des éléments  $t_1, \dots, t_r$  de  $M_{\bar{x}}$  sont choisis de sorte que la famille  $(d \log t_1, \dots, d \log t_r)$  forme une base du faisceau des log-différentielles  $\omega_{X/Y, \bar{x}}^1$ . On considère ensuite le morphisme de monoïdes évident  $\mathbf{N}^r \oplus Q \rightarrow M_{\bar{x}}$  donné sur la composante  $\mathbf{N}^r$  par les  $t_1, \dots, t_r$ . Il est tel que le conoyau de  $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}}$  soit fini d'exposant  $n$  inversible dans l'anneau  $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}$  (en particulier,  $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$  est  $n$ -divisible). Il existe un morphisme injectif  $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow G$  de conoyau tué par une puissance de  $n$  et un prolongement  $h: G \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}}$  de  $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}}$  tel que  $G \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$  soit surjectif. Comme  $M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$  est un groupe abélien de type fini et sans torsion, le lemme suivant montre que l'on peut s'arranger pour que  $G$  soit un groupe abélien libre. Dans la démonstration de [Kato, 1988, theorem 3.5], on pose ensuite  $P = h^{-1}(M_{\bar{x}})$  et il est montré que sur un voisinage étale  $U$  de  $\bar{x}$ ,  $P$  engendre la log-structure de  $(X, M)$  et que le morphisme de schémas  $U \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  est étale en  $\bar{x}$ . Le monoïde  $P$  ainsi construit est fs et sans torsion.

**LEMME 3.6.4.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $A$  un groupe abélien libre de type fini. Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme de groupes abéliens. Soit  $U \subset B$  un sous-groupe  $n$ -divisible. On suppose que  $B/U$  est sans torsion et que  $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$  est fini et tué par  $n$ . Alors, il existe un groupe abélien  $A'$  libre de type fini, un morphisme injectif  $A \rightarrow A'$  de groupes abéliens tel que  $A'/A$  soit tué par une puissance de  $n$  et une extension  $A' \rightarrow B$  du morphisme  $A \rightarrow B$  telle que le morphisme composé  $A' \rightarrow B/U$  soit surjectif.

Grâce à une récurrence sur l'ordre de  $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$ , on peut supposer que  $\text{Coker}(A \rightarrow B/U)$  est cyclique d'ordre  $d \geq 2$ , engendré par la classe d'un élément  $b \in B$ . Il existe donc  $a \in A$  et  $u \in U$  tels que  $db = \varphi(a) + u$ . Comme  $u$  est  $n$ -divisible, il existe  $\tilde{u} \in U$  tel que  $u = d\tilde{u}$ . Quitte à remplacer  $b$  par  $b - \tilde{u}$ , on peut supposer que  $u = 0$ . On forme le carré cocartésien suivant dans la catégorie des groupes abéliens :

<sup>\*</sup>Si  $\bar{y}$  est un point géométrique de  $Y$ , il existe un voisinage étale de  $\bar{y}$  admettant une telle carte avec  $Q = M_{\bar{y}} / \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^\times$  qui est fs saillant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{a}\mathbf{Z} & \longrightarrow & A' \end{array}$$

En raison de la relation  $db = \varphi(a)$ , on peut définir un unique morphisme de groupes abéliens  $\varphi' : A' \rightarrow B$  induisant  $\varphi : A \rightarrow B$  et envoyant  $\frac{1}{a}$  sur  $b$ . On obtient ainsi une surjection  $A' \rightarrow B/U$  induisant un isomorphisme  $A'/A \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(A \rightarrow B/U)$ . Il reste à vérifier que  $A'$  est sans torsion. Soit  $a'$  un élément de torsion de  $A'$ . L'image de  $a'$  dans  $B/U$  via  $\varphi'$  est de torsion, mais  $B/U$  étant sans torsion, on a  $\varphi(a') \in U$ . Comme  $\varphi'$  induit un isomorphisme  $A'/A \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(A \rightarrow B/U)$ , on en déduit que  $a' \in A$ , mais  $A$  est sans torsion, donc  $a' = 0$ .

**PROPOSITION 3.6.5.** *Soit  $(X, M) \rightarrow S$  un log-schéma fs log-lisse sur un trait  $S$  (muni de sa log-structure canonique). On suppose que le schéma  $X$  est régulier. Alors, localement pour la topologie étale,  $X$  admet un morphisme étale vers un schéma  $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est un  $n$ -uplet d'entiers non tous nuls (cf. définition 3.5.11).*

Soit  $\pi$  une uniformisante de  $S$  ; elle donne naissance à une carte  $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$ . D'après la proposition 3.6.3, on peut supposer qu'il existe un monoïde  $P$  fs sans torsion, un morphisme injectif  $\mathbf{N} \rightarrow P$ , une carte  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  telle que le morphisme de schémas  $X \rightarrow S \times_{\text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])} \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  soit étale. Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$ . On note  $P'$  le sous-monoïde de  $P$  formé des éléments dont l'image dans  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  soit inversible au point  $\bar{x}$ .

On peut supposer que  $P'$  est un groupe. En effet, si  $A$  est un sous-ensemble fini de  $P'$  qui engendre le groupe abélien (libre de type fini)  $P'^{\text{gp}}$ , on peut remplacer  $X$  par le voisinage ouvert de  $\bar{x}$  sur lequel les images des éléments de  $A$  (et donc de  $P'$ ) sont inversibles dans le faisceau structural et par suite, remplacer  $P$  par  $P[-P']$  qui est encore fs et sans torsion.

Le fait que  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  soit une carte implique alors que  $P'$  est le noyau de  $P^{\text{gp}} \rightarrow M_{\bar{x}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$ . En particulier, on obtient un isomorphisme

$$P/P' \xrightarrow{\sim} M_{\bar{x}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times .$$

Comme  $X$  est log-régulier, on reconnaît que  $X$  est régulier au fait que  $M_{\bar{x}} / \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^\times$  soit un monoïde libre. Par conséquent, il existe un entier  $r$  et un isomorphisme de monoïdes  $\mathbf{N}^r \xrightarrow{\sim} P/P'$ . On peut relever ce morphisme en un morphisme  $\mathbf{N}^r \rightarrow P$ , ce qui permet de construire un isomorphisme  $\mathbf{N}^r \oplus P' \xrightarrow{\sim} P$ .

Il en résulte que le morphisme de carte  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z}[P])$  a pour but un schéma isomorphe à  $\text{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}^r \oplus P'])$  qui est le produit d'un espace affine et d'un tore déployé (dont  $P'$  est le groupe des caractères). Dans la carte du morphisme  $(X, M) \rightarrow S$  qui est donnée, l'image de  $1$  par le morphisme de monoïdes  $\mathbf{N} \rightarrow P$  peut s'écrire  $(e_1, \dots, e_r, p')$  dans  $\mathbf{N}^r \oplus P'$  via les identifications ci-dessus. On peut choisir une base  $a_1, \dots, a_s$  de  $P'$  comme groupe abélien telle que  $p' = \sum_{i=1}^s f_i a_i$  avec  $f_i \in \mathbf{N}$ . On a ainsi construit un morphisme étale  $X \rightarrow V(S, \pi, e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$  (avec les  $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s$  non tous nuls).

Compte tenu de la proposition 3.5.12, le théorème 3.6.2 résulte aussitôt de la proposition 3.6.5.

<sup>xi</sup>En fait, on peut montrer que  $P'$  est un monoïde de type fini (c'est une face de  $P$ ).

**3.7. Démonstration du théorème de pureté.** Démontrons le théorème 3.1.1. D’après les propositions 3.3.1 et 3.3.2, on peut supposer que l’anneau des coefficients  $\Lambda$  est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier. D’après la proposition 3.2.3, il s’agit de montrer que tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma régulier est ponctuellement pur. D’après [Fujiwara, 2002, corollary 6.1.5], on peut supposer que  $X$  est un schéma régulier intègre, quasi-projectif et plat sur un trait (strictement hensélien)  $S$ , que l’on peut supposer d’inégale caractéristique d’après la proposition 3.2.5. On peut utiliser les notations de la sous-section 3.5. Quitte à étendre le trait  $S$ , on peut supposer que l’anneau sous-jacent à  $S$  est intégralement fermé dans le corps des fonctions rationnelles sur  $X$ . La fibre générique  $X_\eta$  de  $X$  est donc géométriquement intègre.

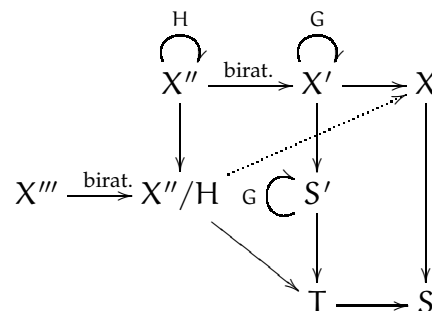
En appliquant [Vidal, 2004b, proposition 4.4.1] à la normalisation de l’adhérence de  $X$  dans un plongement projectif, on obtient qu’il existe un groupe fini  $G$  et un diagramme  $G$ -équivant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

tels que :

- $G$  agisse trivialement sur  $X$  et  $S$  ;
- $S' \rightarrow S$  soit une extension finie de traits ;
- $X' \rightarrow X$  soit projectif,  $X'$  soit régulier, connexe et à réduction semi-stable sur  $S'$  ;
- $G$  agisse fidèlement sur  $X'$  et  $X' \rightarrow X$  soit génériquement un revêtement étale galoisien de groupe  $G$ .

On munit  $X'$  de la log-structure dont l’ouvert de trivialité est la fibre générique de  $X' \rightarrow S'$ . Soit  $H$  un  $\ell$ -Sylow de  $G$ . On note  $T = S'/H$ . L’extension de traits (strictement henséliens)  $S' \rightarrow T$  est d’ordre une puissance de  $\ell$ , donc modérément ramifiée. Par conséquent, pour les log-structures canoniques,  $S' \rightarrow T$  est log-étale. Comme on sait que  $X'$  est log-lisse sur  $S'$ , il l’est donc aussi sur  $T$ . Comme  $H$  agit trivialement sur  $T$  et que son action sur  $X'$  est modérée, on peut appliquer le théorème de résolution équivariante qui donne un morphisme projectif et birationnel  $H$ -équivalent  $X'' \rightarrow X'$  de log-schémas tel que  $X''$  soit log-lisse sur  $T$  et que  $H$  agisse très modérément sur  $X''$ . Le log-schéma quotient  $X''/H$  est donc log-lisse sur  $T$  (en particulier,  $X''/H$  est log-régulier). D’après le théorème de résolution des log-singularités, il existe un log-éclatement (en particulier, log-étale, projectif et birationnel)  $X''' \rightarrow X''/H$  tel que  $X'''$  soit régulier. La situation est résumée sur le diagramme suivant :



Le log-schéma  $X'''$  est régulier et log-lisse sur  $T$  ; d'après le théorème 3.6.2,  $X'''$  est ponctuellement pur. Le morphisme évident  $X''' \rightarrow X$  est projectif et génériquement un revêtement étale de degré premier à  $\ell$ , d'après la proposition 3.5.7, on peut conclure que  $X$  est ponctuellement pur, ce qui achève la démonstration du théorème de pureté.



## EXPOSÉ XVII

### Dualité

Joël Riou

Ce texte vise à fournir une rédaction des résultats annoncés par Ofer Gabber dans [Gabber, 2005c] concernant les complexes dualisants dans le contexte étale sur les schémas noethériens excellents.

On fixe un entier naturel  $n \geq 2$ , on note  $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  : ce sera notre anneau de coefficients. Si  $X$  est un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien, on note  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  la sous-catégorie de  $\mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  formée des complexes ayant des faisceaux de cohomologie constructibles et  $\mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  formée des complexes de tor-dimension finie.

**DÉFINITION 0.8.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien. Un complexe dualisant sur  $X$  est un objet  $K \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  tel que le foncteur de dualité  $D_K = \mathbf{R}\mathbf{Hom}(-, K)$  préserve  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et que pour tout  $L \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme de bidualité  $L \rightarrow D_K D_K L$  soit un isomorphisme.

Cette définition diffère de celle de [SGA 5 I 1.7] dans la mesure où on ne demande pas à un complexe dualisant d'être de dimension quasi-injective finie.

Le théorème suivant récapitule l'essentiel des résultats de Gabber que nous allons établir dans ces notes :

**THÉORÈME 0.9 (Gabber).** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension (cf. définition 2.1.1). Alors,  $X$  admet un complexe dualisant  $K$ , unique à produit tensoriel avec un objet inversible près (cf. proposition 9.2). Ce complexe dualisant  $K$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  ; il est de dimension quasi-injective finie (autrement dit est un complexe dualisant au sens de [SGA 5 I 1.7]) si et seulement si  $X$  est de dimension de Krull finie.*

Par ailleurs, on a les résultats suivants :

- si  $X$  est régulier, le faisceau constant  $\Lambda$  est un complexe dualisant ;
- si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme plat et à fibres géométriquement régulières avec  $Y$  noethérien excellent, alors  $f^!K$  est un complexe dualisant ;
- si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme de type fini compactifiable, alors  $f^!K$  est un complexe dualisant.

La démonstration s'appuie sur la notion de complexe dualisant potentiel (définition 2.1.2) sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta$  : il s'agit de la donnée d'un complexe  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  muni d'isomorphismes (appelés épinglages)  $\mathbf{R}\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$  pour tout point  $x \in X$ , qui soient compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates de points géométriques de  $X$  (cf. section 1). Gabber montre dans [Gabber, 2004, lemma 8.1] que si un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent admet un complexe dualisant, alors il admet aussi une fonction de dimension globale ; cette hypothèse du théorème 0.9 est donc bien nécessaire.

Dans la section 2, nous verrons notamment que sur un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien régulier, le faisceau constant  $\Lambda$  est un complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension – codim (cf. proposition 2.4.4.1). Pour ce faire, nous utiliserons de manière essentielle le théorème de pureté cohomologique absolue démontré par Gabber, ainsi que les propriétés des morphismes de Gysin établies dans XVI-2.

Dans la section 3, nous construirons un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_{\bar{x}}^{2d}(X, \Lambda(d))$  où  $X$  est un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension  $d$  et de point fermé  $x$ , vérifierons que cet isomorphisme est compatible aux spécialisations immédiates et nous servirons de ce résultat pour construire des morphismes de transition  $H_{\bar{y}}^i(X, K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{i+2c}(X, K(c))$  pour une spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de codimension  $c$  arbitraire entre points géométriques d'un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent  $X$ , pour tout  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On utilisera notamment la résolution des singularités pour les schémas noethériens excellents de dimension 2.

Dans la section 5, nous montrerons l'existence et l'unicité à isomorphisme unique près d'un complexe dualisant potentiel sur un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension. Dans le cas d'un schéma normal, nous nous appuyerons sur les résultats de la section 3 et sur les résultats généraux de Gabber sur l'existence de  $t$ -structures définies par des fonctions de perversité. Nous montrerons aussi que les complexes dualisants potentiels vérifient de bonnes propriétés de stabilité par rapport aux morphismes plats et à fibres géométriquement régulières et aux morphismes de type fini.

Dans la section 6, nous montrerons qu'un complexe dualisant potentiel est un complexe dualisant. Une fois les propriétés de finitude établies, nous procéderons par récurrence sur la dimension, en utilisant d'une part une généralisation d'un argument de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 4.3] et d'autre part le théorème d'algébrisation partielle V-3.1.3.

Dans la section 7, nous montrons qu'à partir d'un complexe dualisant à coefficients  $\Lambda$ , on peut construire des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients plus généraux. Ces résultats sont essentiellement indépendants des sections précédentes. Cependant, ce n'est qu'en combinant les résultats des sections précédentes sur les complexes dualisants potentiels avec le résultat d'unicité des complexes dualisants de la proposition 7.5.1.1 que l'on peut déduire le théorème 0.9. En vertu de ce théorème 0.9, les constructions de cette section donnent en particulier des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients généraux sur les schémas noethériens excellents munis de fonctions de dimension. Il semble très probable qu'il soit possible d'étendre les résultats d'Ofer Gabber à des énoncés de dualité avec des coefficients  $\ell$ -adiques. Toutefois, le rédacteur a renoncé à les rédiger.

Enfin, quelques résultats nécessaires à ce qui précède ont été rejetés en appendice. On y décrit notamment une construction du produit tensoriel dérivé sur la catégorie dérivée toute entière des faisceaux de Modules sur un topos annelé (commutatif).

## 1. Le morphisme de transition en codimension 1

### 1.1. Notations.

**DÉFINITION 1.1.1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma, soit  $x \in X$ , soit  $X \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On pose  $R\Gamma_x(K) = i_x^! K_{|X(x)} \in D^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$  où  $i_x$  est l'inclusion du point fermé du localisé



$X_{(x)}$ <sup>i</sup>. Si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $X$  au-dessus de  $x$ <sup>ii</sup>, on note  $R\Gamma_{\bar{x}}(K) = R\Gamma_x(K)_{\bar{x}} \in D^+(\Lambda)$ ; cet objet s'identifie à la cohomologie à supports dans le point fermé de la restriction de  $K$  à l'hensélisé strict  $X_{(\bar{x})}$ . Les objets de cohomologie de  $R\Gamma_{\bar{x}}(K)$  seront notés  $H_{\bar{x}}^i(K)$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ .

**DÉFINITION 1.1.2** ([SGA 4 VIII 7.2]). Si  $\bar{y}$  et  $\bar{x}$  sont deux points géométriques d'un schéma  $X$ , une spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  est un  $X$ -morphisme  $X_{(\bar{y})} \rightarrow X_{(\bar{x})}$  entre les localisés stricts correspondants, ce qui revient à la donnée d'un  $X$ -morphisme  $\bar{y} \rightarrow X_{(\bar{x})}$ . On définit la codimension d'une spécialisation comme étant la dimension de l'adhérence du point de  $X_{(\bar{x})}$  en-dessous de  $\bar{y}$ . On dit qu'une spécialisation est immédiate si elle est de codimension 1.

On se propose ici de définir un morphisme de transition  $\mathrm{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X: R\Gamma_{\bar{y}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2]$  dans  $D^+(\Lambda)$  pour toute spécialisation immédiate  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma excellent  $X$ , quel que soit  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

**1.2. Cas d'un trait strictement hensélien.** Soit  $X$  un trait strictement hensélien de point générique  $\eta$  et de point fermé  $s$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . On va définir le morphisme de transition

$$R\Gamma_{\bar{\eta}}(K) \rightarrow R\Gamma_s(K)(1)[2]$$

pour tout  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

On note  $p$  l'exposant caractéristique du corps résiduel de  $X$ , que l'on suppose inversible dans  $\Lambda$ . On dispose d'une suite exacte canonique de groupes profinis :

$$1 \rightarrow S \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \rightarrow G \rightarrow 1,$$

où  $G$  est le groupe d'inertie modérée, canoniquement isomorphe à  $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$  et où  $S$ , le groupe de ramification sauvage, est un pro- $p$ -groupe (cf. [Gabber & Ramero, 2003, proposition 6.2.12]). Remarquons que l'ordre de  $G$  est multiple de  $(\#\Lambda)^\infty$  : ce fait sera utile au lecteur scrupuleux qui voudrait vérifier en exercice les détails passés sous silence dans cette sous-section.

**1.2.1. Algèbre du groupe  $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$ .**

**DÉFINITION 1.2.1.1.** L'algèbre de groupe  $\Lambda[[G]]$  est l'anneau des endomorphismes du foncteur d'oubli de la catégorie des  $\Lambda$ -modules discrets munis d'une action continue de  $G$  vers celle des  $\Lambda$ -modules. Cette algèbre est naturellement topologisée : elle est munie de la topologie la moins fine qui soit telle que pour tout  $\Lambda$ -module discret  $M$  muni d'une action continue de  $G$  et tout élément  $m \in M$ , l'application  $\Lambda[[G]] \rightarrow M$  qui à  $a \in \Lambda[[G]]$  associe le résultat  $a.m$  de son action sur  $m$  soit continue.

On a un isomorphisme canonique d'anneaux topologiques

$$\Lambda[[G]] \xrightarrow{\sim} \lim \Lambda[G/H],$$

où  $H$  parcourt l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts distingués de  $G$  et où  $\Lambda[G/H]$  est l'algèbre de groupe usuelle (discrète) du groupe fini  $G/H$ . On peut

<sup>i</sup>On obtiendrait une définition équivalente en remplaçant le schéma local  $X_{(x)}$  par son hensélisé.

<sup>ii</sup>Dans la suite, pour ne pas alourdir inutilement le texte, si on fixe un point  $x$  d'un schéma  $X$ ,  $\bar{x}$  désignera un point géométrique au-dessus de  $x$  et inversement, si on fixe un point géométrique  $\bar{x} \rightarrow X$ , on notera  $x$  le point de l'espace topologique sous-jacent à  $X$  au-dessus duquel  $\bar{x}$  se trouve.

identifier les  $\Lambda$ -modules discrets munis d'une action continue de  $G$  aux  $\Lambda[[G]]$ -modules discrets.

L'action naturelle de  $\Lambda[[G]]$  sur  $\Lambda$  muni de l'action triviale de  $G$  définit un morphisme continu d'augmentation  $\varepsilon: \Lambda[[G]] \rightarrow \Lambda$ . On note  $I_G$  le noyau de  $\varepsilon$  : c'est l'idéal d'augmentation.

**PROPOSITION 1.2.1.2.** *Le  $\Lambda[[G]]$ -module  $I_G$  est libre de rang 1, engendré par  $1 - \sigma$  si  $\sigma$  est un générateur topologique de  $G$ .*

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

**1.2.2. Description de la cohomologie à supports.** Il est clair que la catégorie des faisceaux (d'ensembles) sur  $X_{\text{ét}}$  est naturellement équivalente à la catégorie des flèches de  $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ -ensembles (discrets)  $\mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\eta}}$  telles que l'action de  $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$  sur  $\mathcal{M}_s$  soit triviale.

Pour tout faisceau de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{M}$  sur  $X_{\text{ét}}$ , on note  $F(\mathcal{M})$  le complexe évident de  $\Lambda$ -modules :

$$\mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S)$$

où  $\mathcal{M}_s$  est placé en degré 0. Le foncteur qui à  $\mathcal{M}$  associe  $F(\mathcal{M})$  étant additif, en utilisant la construction du complexe simple associé à un complexe double, on peut naturellement définir un complexe de  $\Lambda$ -modules  $F(K)$  pour tout complexe  $K$  de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X_{\text{ét}}$ . En observant en outre que le foncteur qui à  $\mathcal{M}$  associe  $F(\mathcal{M})$  est exact, on voit que le foncteur  $F$  défini au niveau des complexes préserve les quasi-isomorphismes. On a ainsi obtenu un foncteur  $F: D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow D^+(\Lambda)$ .

**PROPOSITION 1.2.2.1.** *Pour tout  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme évident*

$$R\Gamma_s(X, K) \rightarrow F(K)$$

*est un isomorphisme dans  $D^+(\Lambda)$ .*

On se ramène au cas où  $K$  se réduit à un faisceau injectif  $\mathcal{M}$  placé en degré 0. Il est évident que le noyau de  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S)$  s'identifie à  $\Gamma(\eta, \mathcal{M})$ . On a donc bien un isomorphisme  $H_s^0(X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H^0(F(\mathcal{M}))$ . Il reste à montrer que  $H^1(F(\mathcal{M}))$  est nul. Cela revient à dire qu'après application du foncteur  $\text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(-, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S)$ , l'inclusion de l'idéal  $I_G$  dans  $\Lambda[[G]]$  induit une surjection. Pour cela, il suffit de montrer que le  $\Lambda[[G]]$ -module discret  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$  est injectif : par restriction à un ouvert,  $\mathcal{M}_{\eta}$  est un faisceau injectif de  $\Lambda$ -modules sur  $\eta_{\text{ét}}$  et  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$  est obtenu à partir de  $\mathcal{M}_{\eta}$  par application du foncteur image directe associé au morphisme de topos évident  $\eta_{\text{ét}} \rightarrow \mathbf{BG}$  (cf. [SGA 4 IV 4.5.2]).

**1.2.3. Définition du morphisme de transition.** Soit  $\sigma$  un générateur topologique de  $G$ . Soit  $M$  un  $\Lambda[[G]]$ -module discret. On observe que l'on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens  $M(-1) \simeq \text{Hom}(G, M)$ . On définit un morphisme de groupes abéliens  $M(-1) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)$  via les isomorphismes suivants :

$$M(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(G, M) \xrightarrow[\sim]{\text{ev}_{\sigma}} M \xleftarrow[\sim]{\text{ev}_{1-\sigma}} \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M) .$$

Si  $\mathcal{M}$  est un faisceau de  $\Lambda$ -modules sur  $X_{\text{ét}}$ , en composant l'application ci-dessus dans le cas de  $M = \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$  et le projecteur canonique  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S$  ( $S$  étant un pro- $p$ -groupe et  $p$  inversible dans  $\Lambda$ ), on définit un morphisme  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}^S)$  et donc un morphisme de complexes  $s_{\sigma}: \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \rightarrow F(\mathcal{M})[2]$ , fonctoriel en  $\mathcal{M}$ .

**DÉFINITION 1.2.3.1.** On note  $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X : R\Gamma_{\bar{\eta}}(K) \rightarrow R\Gamma_s(K)(1)[2]$  le morphisme dans  $D^+(\Lambda)$  défini par  $s_\sigma$  fonctoriellement pour tout objet  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . D'après le lemme suivant, ce morphisme  $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X$  est indépendant du générateur  $\sigma$  de  $G$  : c'est le morphisme de transition associé à la spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow s$  de points géométriques de  $X$ .

**LEMME 1.2.3.2.** Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux générateurs topologiques de  $G$ , il existe une unique homotopie fonctorielle en  $\mathcal{M}$  entre  $s_\sigma$  et  $s_{\sigma'}$ .

On voit aussitôt qu'on peut se limiter aux  $\mathcal{M}$  tels que  $\mathcal{M}_s = 0$  et que  $S$  agisse trivialement sur  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}$ . On peut identifier cette catégorie de faisceaux à celle des  $\Lambda[[G]]$ -modules discrets.

Soit  $M$  un  $\Lambda[[G]]$ -module. Notons  $\mathcal{M}$  le faisceau sur  $X_{\text{ét}}$  correspondant. On note  $F_\sigma(M)$  le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{1-\sigma} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en les degrés 1 et 2. On note  $\Psi_\sigma : F(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} F_\sigma(M)$  l'isomorphisme de complexes défini de façon évidente à partir de  $\sigma$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\bar{\eta}} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \sim \downarrow \text{ev}_{1-\sigma} \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Notons  $\varphi_\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \xrightarrow{\sim} M$  l'isomorphisme défini par l'évaluation en  $\sigma$  via l'isomorphisme canonique  $\mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \simeq \text{Hom}(G, \mathcal{M}_{\bar{\eta}})$ . Notons  $t_\sigma : M \rightarrow F_\sigma(M)[2]$  le morphisme de complexe représenté par les flèches verticales ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

On dispose ainsi d'un carré commutatif de complexes, fonctoriel en  $M$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) & \xrightarrow{s_\sigma} & F(\mathcal{M})[2] \\ \sim \downarrow \varphi_\sigma & & \sim \downarrow \Psi_\sigma \\ M & \xrightarrow{t_\sigma} & F_\sigma(M)[2] \end{array}$$

Posons  $f_{\sigma, \sigma'} = \Psi_\sigma \circ s_{\sigma'} \circ \varphi_\sigma^{-1}$ . Les flèches verticales étant des isomorphismes de complexes, montrer que les morphismes  $s_\sigma, s_{\sigma'} : \mathcal{M}_{\bar{\eta}}(-1) \rightarrow F(\mathcal{M})[2]$  sont (fonctoriellement) homotopes revient à vérifier que les deux morphismes  $t_\sigma, f_{\sigma, \sigma'} : M \rightarrow F_\sigma(M)[2]$  le sont.

On peut ainsi représenter la situation de façon plus concrète :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{1-\sigma} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \text{Id} \\ \downarrow \\ g \end{array} \right) \end{array}$$

où  $g$  est la transformation naturelle induite par  $f_{\sigma, \sigma'}$ .

Comme  $\Lambda[[G]]$  désigne précisément l'anneau des transformations naturelles  $M \rightarrow M$ , on peut identifier  $\text{Id}$  et  $g$  à des éléments 1 et  $g$  de  $\Lambda[[G]]$  respectivement.

Montrer l'existence et l'unicité de l'homotopie fonctorielle entre  $s_\sigma$  et  $s_{\sigma'}$  se ramène donc à montrer l'existence et l'unicité de  $h \in \Lambda[[G]]$  tel que  $(1 - \sigma) \cdot h = 1 - g$ . D'après la proposition 1.2.1.2, cela revient à montrer que  $\varepsilon(g) = 1$ . Si on note  $u$  l'unité de  $\Lambda[[G]]$  telle que  $(1 - \sigma') = u \cdot (1 - \sigma)$  et qu'on note  $\alpha$  l'élément de  $\widehat{\mathbf{Z}}'^{\times}$  tel que  $\sigma' = \sigma^\alpha$ , alors on a la relation  $u \cdot g = \alpha$ . On est donc ramené à montrer que  $\varepsilon(u) = \varepsilon(\alpha)$ . Pour cela, on utilise la formule suivante :

$$\frac{1 - \sigma^\beta}{1 - \sigma} = \sum_{i=0}^{\beta-1} \sigma^i .$$

Cette formule est évidemment juste pour  $\beta \in \mathbf{N}$  ; on peut lui donner un sens pour tout  $\beta \in \widehat{\mathbf{Z}}$  en prolongeant chacun des membres par continuité. En appliquant cette formule avec  $\beta = \alpha$ , on obtient le résultat voulu :

$$\varepsilon(u) = \varepsilon \left( \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sigma^i \right) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} 1 = \varepsilon(\alpha) ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

**1.3. Cas d'un schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1. Soit  $\eta$  le point générique de  $X$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . Soit  $s$  le point fermé de  $X$ . Soit  $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$  la normalisation de  $X$ . Le schéma  $\tilde{X}$  est un trait strictement hensélien (de point fermé  $\tilde{s}$ ) et  $f$  est un homéomorphisme universel (en particulier,  $\tilde{s}/s$  est une extension purement inséparable), donc le foncteur image inverse  $f^*$  induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux sur  $X_{\text{ét}}$  et sur  $\tilde{X}_{\text{ét}}$ .

DÉFINITION 1.3.1. *Via* les identifications ci-dessus, le morphisme de transition  $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow s}^X$  est induit par  $\frac{1}{[s:s]} \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \tilde{s}}^{\tilde{X}}$  (cf. définition 1.2.3.1).

**1.4. Cas général.**

DÉFINITION 1.4.1. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma excellent. Soit  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation immédiate de points géométriques de  $X$ . Pour définir le morphisme de transition  $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X : R\Gamma_{\bar{y}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2]$  pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , quitte à remplacer  $K$  par son image inverse *via* le morphisme canonique  $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$ , on peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien (excellent) de point fermé  $\bar{x}$ . On note alors  $Z$  l'adhérence du point de  $X$  en-dessous de  $\bar{y}$  et  $i : Z \rightarrow X$  son immersion dans  $X$ . Ce  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma  $Z$  est local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1, le morphisme de transition  $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^Z$  a été introduit dans la définition 1.3.1. Pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on définit le morphisme de transition  $\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X$  de façon à faire commuter le diagramme suivant où les flèches verticales sont les isomorphismes évidents :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{y}}(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X} & R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2] \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ R\Gamma_{\bar{y}}(i^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^Z} & R\Gamma_{\bar{x}}(i^!K)(1)[2] \end{array}$$

REMARQUE 1.4.2. Pour toute spécialisation  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  de codimension 0 entre points géométriques de  $X$  (essentiellement, un élément du groupoïde de Galois absolu du corps résiduel d'un des points de  $X$ ), on a un isomorphisme évident  $R\Gamma_{\bar{x}'}(K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\bar{x}}(K)$ , que l'on note  $\text{sp}_{\bar{x}' \rightarrow \bar{x}}^X$ . Il est évident que si  $\bar{z} \rightarrow \bar{y}$  et  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  sont des spécialisations composables telles que la codimension  $c$  de  $\bar{z} \rightarrow \bar{x}$  soit 0 ou 1, on a une égalité de morphismes

$$\text{sp}_{\bar{z} \rightarrow \bar{x}}^X = \text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X \circ \text{sp}_{\bar{z} \rightarrow \bar{y}}^X: R\Gamma_{\bar{z}}(K) \rightarrow R\Gamma_{\bar{x}}(K)(c)[2c].$$

Ainsi, les morphismes de transition associés aux spécialisations se composent bien dans l'étendue où ces constructions ont été faites jusqu'à présent. Nous définirons plus tard des morphismes de transition en codimension arbitraire et ce de façon compatible à la composition, mais seulement au niveau des groupes de cohomologie (cf. théorème 3.1.2).

## 2. Complexes dualisants putatifs et potentiels

### 2.1. Définition des complexes dualisants putatifs et potentiels.

DÉFINITION 2.1.1. Une fonction de dimension sur un schéma localement noethérien  $X$  est une fonction  $\delta: X \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que pour toute spécialisation immédiate  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$ , on ait  $\delta(\bar{y}) = \delta(\bar{x}) + 1$ .

Localement pour la topologie de Zariski, un schéma excellent admet une fonction de dimension, cf XIV-2.2.1.

DÉFINITION 2.1.2. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Un complexe dualisant putatif consiste en la donnée de  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et pour tout  $x \in X$  d'un isomorphisme (appelé épinglage en  $x$ )  $R\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$  dans  $D^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Un complexe dualisant putatif est un complexe dualisant potentiel si pour toute spécialisation immédiate  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{y}}(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X} & R\Gamma_{\bar{x}}(K)(1)[2] \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \\ & & \Lambda(\delta(\bar{y}))[2\delta(\bar{y})] \end{array}$$

Autrement dit, les épinglages sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates.

Les notions de complexes dualisants putatifs et potentiels (à coefficients  $\Lambda$ ) ne sont définis que pour les  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension. Certains des énoncés à venir contiendront donc implicitement ces hypothèses sur les schémas. La fonction de dimension ne sera pas plus systématiquement mentionnée dans les énoncés.

REMARQUE 2.1.3. Si  $X$  est connexe et que  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  est muni de deux structures de complexe dualisant potentiel, pour vérifier que les épinglages sont les mêmes en tous les points de  $X$ , il suffit de le faire en un seul point.

L'objectif de cette section est de montrer que sur un schéma régulier excellent muni de la fonction de dimension  $-\text{codim}$ , le faisceau constant  $\Lambda$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel.

**2.2. Functorialité par rapport aux morphismes étales.** Des propriétés de stabilité importantes des complexes dualisants potentiels par rapport à certaines classes de morphismes seront obtenues dans la section 4. Pour le moment, mentionnons simplement la compatibilité suivante pour les morphismes étales :

**PROPOSITION 2.2.1.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme étale entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. On suppose que  $X$  est muni d'une fonction de dimension  $\delta_X$ . On définit une fonction de dimension  $\delta_Y$  sur  $Y$  en posant  $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y))$  pour tout  $y \in Y$ . Soit  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ . Alors,  $f^*K$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif et c'est un complexe dualisant potentiel si  $K$  en est un.*

Si  $y$  est un point de  $Y$ , que  $x = f(y)$  et que l'on note  $g: y \rightarrow x$  le morphisme induit par  $f$ , on a un isomorphisme canonique  $g^*R\Gamma_x(K) \simeq R\Gamma_y(f^*K)$ . Ceci permet de définir les épingleages sur  $f^*K$ . On vérifie aussitôt que si  $K$  est un complexe dualisant potentiel, alors  $f^*K$  aussi.

La construction de cette proposition passe évidemment à la limite : le résultat vaut aussi pour des localisations  $X_{(x)} \rightarrow X$ ,  $X_{(x)}^h \rightarrow X$  ou  $X_{(\bar{x})} \rightarrow X$ . Nous utiliserons librement ces observations simples dans la suite.

### 2.3. Compléments sur les spécialisations.

**DÉFINITION 2.3.1.** Soit  $X' \rightarrow X$  un morphisme de schémas. Soit  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  et  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  des spécialisations de points géométriques de  $X'$  et  $X$  respectivement. Si l'on se donne des  $X$ -morphisms  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$  et  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  tels que le diagramme évident ci-dessous commute, alors on dit que  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  est au-dessus de  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ .

$$\begin{array}{ccc} \bar{y}' & \longrightarrow & X'_{(\bar{x}')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{y} & \longrightarrow & X_{(\bar{x})} \end{array}$$

**PROPOSITION 2.3.2.** *Soit  $X' \rightarrow X$  un morphisme de schémas. Soit  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  une spécialisation de points géométriques de  $X'$ . Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$  en-dessous de  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ .*

C'est évident.

**PROPOSITION 2.3.3.** *Soit  $X' \rightarrow X$  un morphisme fini et  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation de points géométriques de  $X$ . Soit  $\bar{y}' \rightarrow X'$  un point géométrique de  $X'$  au-dessus de  $\bar{y}$  (i.e. on s'est donné un  $X$ -morphisme  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$ ). Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation de points géométriques de  $X'$  au-dessus de  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de la forme  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$ .*

On peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien de point fermé  $\bar{x}$ . Le schéma  $X'$  étant fini sur  $X$ , c'est une réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens. Quitte à remplacer  $X'$  par la composante connexe contenant  $\bar{y}'$ , on peut supposer que  $X'$  est lui-aussi local strictement hensélien. Il n'y a alors manifestement plus d'alternative :  $\bar{x}'$  est le point fermé de  $X'$ .

### 2.4. Construction d'un complexe dualisant potentiel dans le cas régulier.

### 2.4.1. Un complexe dualisant putatif.

**PROPOSITION 2.4.1.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien régulier excellent muni de la fonction de dimension  $-\text{codim}$ . Alors  $\Lambda$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif.*

Soit  $x \in X$ . Pour définir l'épinglage en  $x$ , on peut supposer que  $X$  est local de point fermé  $x$ . On note  $i: x \rightarrow X$  l'inclusion de ce point fermé. Le morphisme de Gysin  $\text{Cl}_i: \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)] \rightarrow i^! \Lambda$  est un isomorphisme d'après le théorème de pureté cohomologique absolue (cf. XVI-3.1.1). L'épinglage en  $x$  est l'isomorphisme inverse.

### 2.4.2. Cas d'un trait.

**PROPOSITION 2.4.2.1.** *Soit  $X$  un trait excellent, muni de la fonction de dimension  $\delta = -\text{codim}$ . On suppose que  $X$  est un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma.*

- (a) *Le complexe dualisant putatif  $\Lambda$  de la proposition 2.4.1.1 est un complexe dualisant potentiel.*
- (b) *Si  $K$  est un complexe dualisant putatif, il existe un unique morphisme  $\Lambda \rightarrow K$  compatible aux épinglages au point générique.*
- (c) *Si  $K$  est un complexe dualisant potentiel, le morphisme  $\Lambda \rightarrow K$  défini ci-dessus est un isomorphisme (compatible aux épinglages).*

La compatibilité (a) est facile (au moins au signe près). Établissons (b). Soit  $K$  un complexe dualisant putatif. Notons  $i: s \rightarrow X$  l'inclusion du point fermé  $s$  de  $X$  et  $j: \eta \rightarrow X$  l'inclusion de son point générique  $\eta$ . On a un triangle distingué canonique, que l'on peut récrire en présence d'épinglages :

$$\begin{array}{ccccccc} i_* i^! K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Rj_* j^* K & \longrightarrow & i_* i^! K[1] \\ \downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ i_* \Lambda(-1)[-2] & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Rj_* \Lambda & \longrightarrow & i_* \Lambda(-1)[-1] \end{array}$$

En appliquant le foncteur  $i$ -ième faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^i$ , on obtient l'annulation de  $\mathcal{H}^i K$  pour  $i < 0$  et un isomorphisme canonique  $\mathcal{H}^0 K \simeq \Lambda$ . En vertu des propriétés élémentaires de la  $t$ -structure canonique sur  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on obtient un unique morphisme  $\Lambda \simeq \mathcal{H}^0 K \rightarrow K$  compatible à l'épinglage au point générique.

Pour obtenir (c), supposons que  $K$  soit un complexe dualisant potentiel. On considère le diagramme commutatif induit par le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow K$  de (b) et la functorialité du morphisme de spécialisation associé à un choix de spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}$  au-dessus des points  $\eta$  et  $s$  :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{\bar{\eta}}(\Lambda) & \longrightarrow & R\Gamma_{\bar{\eta}}(K) \\ \downarrow \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}}^X & & \downarrow \text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{s}}^X \\ R\Gamma_{\bar{s}}(\Lambda)(1)[2] & \longrightarrow & R\Gamma_{\bar{s}}(K)(1)[2] \end{array}$$

Comme  $\Lambda$  et  $K$  sont des complexes dualisants potentiels, les flèches verticales sont des isomorphismes. Par construction, le morphisme du haut est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme du bas aussi. Par conséquent le morphisme  $\Lambda \rightarrow K$  induit un isomorphisme après application de  $j^*$  et de  $i^!$  : c'est un isomorphisme.

### 2.4.3. Functorialité par rapport aux morphismes quasi-finis.

**PROPOSITION 2.4.3.1.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme quasi-fini. Soit  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$  pour une certaine fonction de dimension  $\delta_X$  sur  $X$ . Alors  $f^!K$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension  $\delta_Y$  sur  $Y$  définie par  $\delta_Y(\mathbf{y}) = \delta_X(f(\mathbf{y}))$  pour tout  $\mathbf{y} \in Y$ .*

Soit  $\mathbf{y} \in Y$ . Notons  $x = f(\mathbf{y})$  et  $\pi: \mathbf{y} \rightarrow x$  le morphisme fini induit par  $f$ . On a un isomorphisme canonique dans  $\mathbf{D}^+(\mathbf{y}_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$R\Gamma_{\mathbf{y}}(f^!K) \simeq \pi^!R\Gamma_x(K).$$

L'épinglage en  $x$  donne un isomorphisme  $R\Gamma_x(K) \simeq \Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$ . Pour obtenir l'isomorphisme voulu  $R\Gamma_{\mathbf{y}}(f^!K) \simeq \Lambda(\delta_Y(\mathbf{y}))[2\delta_Y(\mathbf{y})]$ , il suffit de définir un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \pi^!\Lambda$  : on utilise le morphisme de Gysin  $\text{Cl}_{\pi}$ .

**REMARQUE 2.4.3.2.** Soit  $g: Z \rightarrow Y$  un autre morphisme quasi-fini. Via l'isomorphisme de transitivité  $g^!f^! \simeq (f \circ g)^!$ , la structure de complexe dualisant putatif sur  $g^!(f^!K)$  obtenue en appliquant cette construction à  $f$  puis à  $g$  est la même que celle obtenue en appliquant directement la construction à  $f \circ g$  : cela résulte aussitôt des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

**PROPOSITION 2.4.3.3.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme fini et surjectif et  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ . Alors  $K$  est un complexe dualisant potentiel si et seulement si le complexe dualisant putatif  $f^!K$  de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel.*

En vertu des propositions 2.3.2 et 2.3.3, on peut supposer que  $X$  et  $Y$  sont des schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1 et que les fonctions de dimension prennent les valeurs 0 et  $-1$ . Compte tenu de la remarque 2.4.3.2, il vient alors qu'il suffit de traiter deux cas :

- (1)  $Y$  est le normalisé de  $X$  ;
- (2)  $X$  et  $Y$  sont des traits.

On obtient la conclusion dans le cas (1) en utilisant le fait que le morphisme de transition pour  $X$  et  $K$  est défini à partir de celui pour  $Y$  et  $f^*K$  (cf. définition 1.3.1) et que si  $M/L$  est une extension finie purement inséparable de corps, le morphisme de Gysin  $\text{Cl}_{\pi}: \Lambda \rightarrow \pi^!\Lambda$  associé au morphisme  $\pi: \text{Spec}(M) \rightarrow \text{Spec}(L)$  s'identifie à la multiplication par le degré de  $M/L$  via les isomorphismes tautologiques  $\pi^!\Lambda \simeq \pi^*\Lambda \simeq \Lambda$ .

La démonstration dans le cas (2) va utiliser le lemme général suivant :

**LEMME 2.4.3.4.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme quasi-fini entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents réguliers de dimension relative virtuelle  $-c$ . On munit  $X$  de la fonction de dimension  $\delta_X = -\text{codim}$  et  $Y$  de la fonction de dimension  $\delta_Y$  définie par composition avec  $f$  comme dans la proposition 2.4.3.1. Compte tenu de la relation  $\delta_Y(\mathbf{y}) = -\text{codim}_Y(\mathbf{y}) - c$  pour tout  $\mathbf{y} \in Y$ , la proposition 2.4.1.1 munit  $\Lambda(-c)[-2c]$  d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension  $\delta_Y$  sur  $Y$ . La proposition 2.4.1.1 donne une structure de complexe dualisant putatif sur  $\Lambda$  sur  $X$ , dont on déduit, par la proposition 2.4.3.1, une structure de complexe dualisant putatif sur  $f^!\Lambda$  sur  $Y$  pour la fonction de dimension  $\delta_Y$ . Alors, l'isomorphisme de pureté  $\text{Cl}_f: \Lambda(-c)[-2c] \xrightarrow{\sim} f^!\Lambda$  est compatible aux épinglages de ces deux complexes dualisants putatifs.*



Étudions les épinglages en un point  $y \in Y$ . Notons  $x = f(y)$ . On peut supposer que  $X$  et  $Y$  sont locaux (strictement henséliens) de points fermés respectifs  $x$  et  $y$ . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{j} & Y \\ g \downarrow & \searrow h & \downarrow f \\ x & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Les schémas apparaissant sur ce diagramme sont affines et réguliers et les morphismes entre eux sont de type fini. Ces morphismes sont donc localement d'intersection complète (lissifiables), on peut leur appliquer la théorie des morphismes de Gysin. Le résultat du lemme découle alors aussitôt de leur compatibilité à la composition, puisqu'elle donne un diagramme commutatif dans  $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$ , où l'on a noté  $c'$  la codimension de  $y$  dans  $Y$  :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\text{Cl}_g} & g^! \Lambda \\ \downarrow \text{Cl}_j & & \downarrow g^!(\text{Cl}_i) \\ j^! \Lambda(c')[2c'] & \xrightarrow{j^!(\text{Cl}_f)} & h^! \Lambda(c + c')[2c + 2c'] \end{array}$$

Revenons à la démonstration de la proposition 2.4.3.3. Supposons que  $K$  soit un complexe dualisant potentiel. D'après la proposition 2.4.2.1 appliquée à  $X$ ,  $K$  est canoniquement isomorphe à  $\Lambda$  (avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1). On suppose donc  $K = \Lambda$ . On a un isomorphisme de pureté  $\text{Cl}_f: \Lambda \xrightarrow{\sim} f^! \Lambda$ . D'après le lemme 2.4.3.4, cet isomorphisme est compatible avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1 pour  $\Lambda$  et ceux de la proposition 2.4.3.1 pour  $f^! \Lambda$ . D'après la proposition 2.4.2.1 appliquée à  $Y$ , il vient que  $f^! \Lambda$  est bien un complexe dualisant potentiel.

Inversement, supposons que  $f^! K$  soit un complexe dualisant potentiel. La proposition 2.4.2.1 pour  $X$  donne un morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow K$  compatible aux épinglages au point générique de  $X$ . Le morphisme  $f^! \Lambda \rightarrow f^! K$  qui s'en déduit est un morphisme entre deux complexes dualisants potentiels compatible aux épinglages au point générique de  $Y$ . D'après la proposition 2.4.2.1,  $f^! \Lambda \rightarrow f^! K$  est un isomorphisme. Le foncteur  $f^!$  étant conservatif, il en résulte que le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow K$  est un isomorphisme. On peut donc supposer que  $K = \Lambda$  (de façon compatible aux épinglages au point générique). L'épinglage de  $K$  au point fermé  $x$  ne peut qu'être de la forme  $\lambda \cdot \text{Cl}_{x \subset X}^{-1}: R\Gamma_x(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \Lambda(-1)[-2]$  pour  $\lambda \in \Lambda^\times$ . Compte tenu de ce qui précède, il vient aussitôt que le complexe dualisant putatif  $f^! K$  sur  $Y$  s'identifie à  $\Lambda$ , épinglé trivialement au point générique et par  $\lambda \cdot \text{Cl}_{y \subset Y}^{-1}$  au point fermé  $y$  de  $Y$ . Compte tenu de la proposition 2.4.2.1, ce complexe dualisant putatif sur  $Y$  ne peut évidemment être un complexe dualisant potentiel que si  $\lambda = 1$ . Ainsi,  $K$  est bien un complexe dualisant potentiel sur  $X$ , puisqu'il s'identifie à  $\Lambda$  de façon compatible aux épinglages.

**2.4.4. Un complexe dualisant potentiel.**

**PROPOSITION 2.4.4.1.** *Soit  $X$  un schéma régulier excellent, muni de la fonction de dimension – codim. Le complexe dualisant putatif  $\Lambda$  de la proposition 2.4.1.1 est un complexe dualisant potentiel.*

Soit  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation immédiate de points géométriques de  $X$ . On veut montrer que les épingleages sur  $\Lambda$  sont compatibles au morphisme de transition  $\mathrm{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X$ . Pour cela, on peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien de point fermé  $\bar{x}$ . Soit  $C$  l'adhérence de l'image de  $\bar{y}$  dans  $X$ . Notons  $i: C \rightarrow X$  l'immersion fermée de  $C$  dans  $X$ . Soit  $n: \tilde{C} \rightarrow C$  le normalisé de  $C$ . Montrer la compatibilité des épingleages avec le morphisme de transition associé à  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  revient à montrer que le complexe dualisant putatif  $i^! \Lambda$  de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel, ce qui, d'après la proposition 2.4.3.3, revient encore à dire que  $n^! i^! \Lambda$  en est un. D'après le lemme 2.4.3.4, le complexe dualisant putatif  $n^! i^! \Lambda$  s'identifie au complexe dualisant putatif  $\Lambda(-c)[-2c]$  obtenu par torsion et décalage à partir de  $\Lambda$  sur le trait  $\tilde{C}$ . En vertu de la proposition 2.4.2.1, il s'agit bien d'un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

### 3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal

#### 3.1. Énoncés des théorèmes principaux.

**THÉORÈME 3.1.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma local normal strictement hensélien excellent de dimension  $d$  et de point fermé  $x$ . Alors,  $H_x^q(X, \Lambda(d)) = 0$  pour  $q > 2d$  et on a un isomorphisme  $[x]: \Lambda \xrightarrow{\sim} H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  compatible aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates.*

**THÉORÈME 3.1.2.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Pour toute spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$  de codimension  $c$ , on peut définir, pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $i \in \mathbf{Z}$ , un morphisme de transition  $\mathrm{sp}_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}}^X: H_{\bar{y}}^i(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{i+2c}(K(c))$ , compatible à la composition des spécialisations et induit par les définitions de la section 1 pour  $c \leq 1$ . Par ailleurs, ces morphismes de transition généralisés vérifient une compatibilité avec les morphismes finis, énoncée dans la proposition 3.5.4.*

**REMARQUE 3.1.3.** Localement pour la topologie étale, un schéma quasi-excellent est excellent. Il est donc évident que dans l'énoncé du théorème 3.1.2, on peut remplacer l'hypothèse « excellent » par « quasi-excellent ».

**3.2. Dimension cohomologique.** On énonce ici deux résultats de dimension cohomologique qui se déduisent du théorème de Lefschetz affine de Gabber, cf. XV-1.2.2.

**PROPOSITION 3.2.1.** *Soit  $\ell$  un nombre premier. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma local strictement hensélien excellent de point fermé  $x$ . On note  $U = X - x$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau de  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ -modules sur  $U$ . Soit  $d \in \mathbf{N}$ . On suppose que si  $u \in U$  est tel que  $\mathcal{M}_{\bar{u}} \neq 0$ , alors la dimension de l'adhérence de  $u$  dans  $X$  est  $\leq d$ . Alors  $H^q(U, \mathcal{M}) = 0$  pour  $q \geq 2d$ .*

*En particulier, si  $d = \dim X$ , on a  $\mathrm{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$  et  $\mathrm{cd}_{\ell} \Gamma_x \leq 2d$ .*

Par passage à la limite inductive filtrante sur les sous-faisceaux constructibles de  $\mathcal{M}$ , on peut supposer que  $\mathcal{M}$  est constructible. Quitte à remplacer  $X$  par l'adhérence dans  $X$  du support de  $\mathcal{M}$ , on peut supposer que  $d = \dim X$ . On est alors ramené à montrer que  $\mathrm{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$ . Comme le schéma (séparé)  $U$  peut être recouvert par  $d$  ouverts affines (cf. [Serre, 1965, §B.3, Chapitre III]), et qu'un ouvert affine de  $X$  est de dimension cohomologique au plus  $d$ , en utilisant convenablement les suites exactes de Mayer-Vietoris, on obtient bien que  $\mathrm{cd}_{\ell} U \leq 2d - 1$ .

**PROPOSITION 3.2.2.** *Soit  $\ell$  un nombre premier. Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]$ -schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension  $d$ , de point générique  $\eta$ . Alors  $\text{cd}_\ell \eta \leq d$ .*

Le point générique  $\eta$  s'identifie à limite projective du système projectif formé par les ouverts affines non vides de  $X$ . Comme chacun de ces ouverts affines est de  $\ell$ -dimension cohomologique au plus  $d$ , il en va de même pour  $\eta$ .

### 3.3. Morphismes finis.

**PROPOSITION 3.3.1.** *Soit  $f: X' \rightarrow X$  un morphisme fini entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Soit  $\overline{y}' \rightarrow \overline{x}'$  une spécialisation immédiate de points géométriques de  $X'$  au-dessus d'une spécialisation immédiate  $\overline{y} \rightarrow \overline{x}$  de points géométriques de  $X$  (cf. définition 2.3.1). Pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $i \in \mathbf{Z}$ , le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} H_{\overline{y}'}^i(f^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\overline{y}' \rightarrow \overline{x}'}^{X'}} & H_{\overline{x}'}^{i+2}(f^!K(1)) \\ \uparrow \sim \text{Cl}_{\overline{y}' \rightarrow \overline{y}} & & \sim \uparrow \text{Cl}_{\overline{x}' \rightarrow \overline{x}} \\ H_{\overline{y}}^i(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\overline{y} \rightarrow \overline{x}}^X} & H_{\overline{x}}^{i+2}(K(1)) \end{array}$$

On peut supposer que  $f$  est un morphisme dominant entre schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1. Comme dans la démonstration de la proposition 2.4.3.3, il y a deux cas à traiter :

- (1)  $X'$  est le normalisé de  $X$  ;
- (2)  $X$  et  $X'$  sont des traits.

Le cas (1) étant trivial, on se concentre sur le cas où  $X$  et  $X'$  sont des traits. Pour vérifier la compatibilité, on peut évidemment supposer que  $i = 0$ . Pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , comme les flèches verticales sont des isomorphismes, on peut noter  $\delta_K: H_{\overline{y}}^0(K) \rightarrow H_{\overline{x}}^2(K(1))$  la différence des flèches obtenues en suivant les deux chemins possibles. Il s'agit de montrer que pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on a  $\delta_K = 0$ .

Les résultats de la section 2 montrent que  $\delta_\Lambda = 0$ . La suite de la démonstration va consister à se ramener à ce cas-là.

Comme  $\overline{y}$  est au-dessus du point générique de  $X$ ,  $H_{\overline{y}}^0$  s'identifie à la fibre en  $\overline{y}$  du faisceau de cohomologie de  $K$  en degré 0. Si on note  $\tau_{\leq 0}K \rightarrow K$  le morphisme canonique déduit de la  $t$ -structure canonique sur  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ <sup>iii</sup>, on obtient un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\overline{y}}^0(\tau_{\leq 0}K) & \xrightarrow{\delta_{\tau_{\leq 0}K}} & H_{\overline{x}}^2(\tau_{\leq 0}K(1)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ H_{\overline{y}}^0(K) & \xrightarrow{\delta_K} & H_{\overline{x}}^2(K(1)) \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme que si  $\delta_{\tau_{\leq 0}K} = 0$ , alors  $\delta_K = 0$ .

Notons  $\mathcal{H}^0K$  le faisceau de cohomologie de  $K$  en degré zéro. Pour des raisons de dimension cohomologique, le morphisme canonique  $\mathcal{H}^0K \rightarrow \tau_{\leq 0}K$  induit un isomorphisme après application du foncteur  $H_{\overline{x}}^2(-)$  (et aussi du foncteur  $H_{\overline{y}}^0$ ).

<sup>iii</sup>L'auteur pense qu'il eût été plus cohérent de noter cette troncature  $\tau_{\leq 0}$  pour respecter la convention qui veut que les degrés cohomologiques soient indiqués en exposant, mais la tradition ayant consacré l'usage inverse, il s'y plie avec répugnance.

Par conséquent, en considérant un carré commutatif du type précédent, on obtient cette fois-ci que  $\delta_{\mathcal{H}^0 \mathcal{K}} = 0$  équivaut à  $\delta_{\tau_{\leq 0} \mathcal{K}} = 0$ .

Il résulte de ces remarques que pour montrer que  $\delta_{\mathcal{K}} = 0$  pour tout  $\mathcal{K} \in \mathcal{D}^+(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on peut supposer que  $\mathcal{K}$  est concentré en degré 0.

On suppose maintenant que  $\mathcal{K} = \mathcal{M}$  où  $\mathcal{M}$  est un faisceau de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . Notons  $j: y \rightarrow X$  l'inclusion du point générique de  $X$ . En utilisant la description du foncteur  $H_{\mathcal{X}}^2$  de la proposition 1.2.2.1, on obtient que le morphisme canonique  $j_! j^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  induit un isomorphisme après application de  $H_{\mathcal{Y}}^0$  et  $H_{\mathcal{X}}^2(-(1))$  :  $\delta_{\mathcal{K}} = 0$  équivaut à  $\delta_{j_! j^* \mathcal{K}} = 0$ . La propriété, pour un faisceau  $\mathcal{K}$  sur  $X$ , d'être tel que  $\delta_{\mathcal{K}} = 0$  ne dépend donc que de sa restriction au point générique  $y$ .

Pour tout faisceau de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{L}$  sur  $y$ , on note  $\delta_{\mathcal{L}} = \delta_{j_! \mathcal{L}}$ . Il s'agit de montrer que  $\delta_{\mathcal{L}} = 0$  pour tout faisceau de  $\Lambda$ -modules sur  $y$ . Notons  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{constant}}$  le plus grand quotient constant de  $\mathcal{L}$  : formellement, le foncteur  $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}_{\text{constant}}$  est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux constants de  $\Lambda$ -modules dans la catégorie des faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $y$ . En utilisant la proposition 1.2.2.1, on montre facilement que le morphisme canonique  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{constant}}$  induit un isomorphisme après application de  $H_{\mathcal{X}}^2(j_!(1))$  (et une surjection après application de  $H_{\mathcal{Y}}^0$ ). D'où  $\delta_{\mathcal{L}} = 0$  si et seulement si  $\delta_{\mathcal{L}_{\text{constant}}} = 0$ . Il en résulte que l'on peut supposer que  $\mathcal{L}$  est un faisceau constant de  $\Lambda$ -modules. Par ailleurs, on peut évidemment supposer que  $\mathcal{L}$  est constructible. Si  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  est un épimorphisme de faisceaux constants constructibles de  $\Lambda$ -modules, il vient aussitôt que  $\delta_{\mathcal{L}} = 0$  implique  $\delta_{\mathcal{L}'} = 0$ . Il en résulte que l'on peut supposer que  $\mathcal{L} = \Lambda^r$  pour un certain  $r \in \mathbf{N}$ , puis, par additivité, que  $r = 1$ . Bref, on s'est bien ramené au cas du faisceau constant  $\Lambda$ , ce qui achève la démonstration de cette proposition.

**3.4. Le cas de la dimension 2.** Compte tenu des résultats établis jusqu'à présent, les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 peuvent être considérés comme ayant été établis en dimension 0 et 1. Cette sous-section se concentre sur le cas de la dimension 2 qui est l'étape cruciale pour passer au cas général.

On fixe un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma local strictement hensélien excellent normal  $X$  de dimension 2. On note  $x$  le point fermé de  $X$  et on pose  $U = X - x$ . En s'aidant d'une résolution des singularités  $X' \rightarrow X$ , nous allons définir au paragraphe 3.4.1 une classe dans  $H_{\mathcal{X}}^4(X, \Lambda(2))$ , puis nous démontrerons au paragraphe 3.4.2 qu'elle est indépendante de la résolution. Enfin, nous établirons au paragraphe 3.4.3 une compatibilité entre cette classe, les classes définies pour les localisés stricts en  $X$  en les points de codimension 1 et les morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates correspondantes.

**3.4.1. Construction d'une classe.** D'après le résultat principal de [Lipman, 1978], il existe un morphisme birationnel  $p: X' \rightarrow X$  avec  $X'$  régulier. Le morphisme  $p$  induit alors automatiquement un isomorphisme  $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ . On peut supposer de plus que  $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$  est un diviseur à croisements normaux stricts (dont on note  $D_1, \dots, D_n$  les composantes irréductibles).

En effet, on peut dans un premier temps supposer que les composantes irréductibles  $D_1, \dots, D_n$  sont de dimension 1 : si ce n'est pas le cas, on peut éclater le point fermé correspondant (ceci ne se peut produire que si  $X$  est déjà régulier et que  $p$  est un isomorphisme). Dans un deuxième temps, on peut s'arranger pour que les composantes irréductibles de  $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$  soient régulières en itérant le processus consistant à éclater les points singuliers (cf. [Šafarevič, 1966, page 38]).

Dans un dernier temps, on peut contraindre les croisements à devenir normaux en éclatant les points fermés récalcitrants ; comme des invariants numériques décroissent strictement dans cette opération (cf. [Šafarevič, 1966, page 21]), ce processus termine.

- PROPOSITION 3.4.1.1.** (a) *Le morphisme de bord  $H^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_x^q(X, \Lambda(2))$  est un isomorphisme pour  $q \geq 2$  et ces groupes sont nuls pour  $q \geq 5$  ;*  
 (b) *Le morphisme évident  $H^q(X', \Lambda(2)) \rightarrow H^q(p^{-1}(x), \Lambda(2))$  est un isomorphisme pour tout  $q \in \mathbf{Z}$  et ces groupes sont nuls pour  $q \geq 3$  ;*  
 (c) *Le morphisme de bord  $H^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x)}^q(X', \Lambda(2))$  est un isomorphisme pour  $q \geq 4$  ;*  
 (d) *Le morphisme évident  $H_x^q(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x)}^q(X', \Lambda(2))$  est un isomorphisme pour  $q \geq 4$  et ces groupes sont nuls pour  $q \geq 5$ .*

(a) s'obtient en utilisant la suite exacte canonique :

$$H^{q-1}(X, \Lambda(2)) \rightarrow H^{q-1}(U, \Lambda(2)) \rightarrow H_x^q(X, \Lambda(2)) \rightarrow H^q(X, \Lambda(2)) .$$

En effet,  $X$  étant local strictement hensélien, on a  $H^i(X, \Lambda(2))$  pour  $i > 0$ . On conclut en utilisant le fait que  $\text{cd}_\ell U \leq 3$  (cf. proposition 3.2.1).

(b) résulte du théorème de changement de base pour un morphisme propre et du fait que  $p^{-1}(x)$  soit une courbe propre et donc de dimension cohomologique 2.

(c) se déduit aussitôt de (b).

(d) résulte de (a), (c) et de la commutativité du diagramme évident suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(U, \Lambda(2)) & \longrightarrow & H_x^q(X, \Lambda(2)) \\ \parallel & & \downarrow \\ H^{q-1}(U, \Lambda(2)) & \longrightarrow & H_{p^{-1}(x)}^q(X', \Lambda(2)) \end{array}$$

**PROPOSITION 3.4.1.2.** *On a une suite exacte*

$$\bigoplus_{i < j} H_{D_i \cap D_j}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow \bigoplus_i H_{D_i}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x)}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow 0 ,$$

où les flèches sont induites par des morphismes d'agrandissement du support, et leurs différences.

Pour tout fermé  $F$  de  $X'$ , on note  $\Lambda_F$  le faisceau  $i_{F*} \Lambda$  où  $i_F$  est l'immersion de  $F$  dans  $X'$ . On a une suite exacte courte évidente de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X'$  :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i < j} \Lambda_{D_i \cap D_j} \rightarrow \bigoplus_i \Lambda_{D_i} \rightarrow \Lambda_{p^{-1}(x)} \rightarrow 0 .$$

En appliquant  $R\mathbf{Hom}(-, \Lambda(2))$  au triangle distingué de  $D^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$  associé à cette suite exacte courte, on peut obtenir la suite exacte voulue, pourvu que l'on sache montrer que  $H_{D_i \cap D_j}^5(X', \Lambda(2))$  est nul pour  $i < j$ . D'après le théorème de pureté absolue, ce groupe s'identifie à  $H^1(D_i \cap D_j, \Lambda)$  qui est bien nul puisque  $D_i \cap D_j$  est une union disjointe finie de spectres de corps séparablement clos.

**PROPOSITION 3.4.1.3.** *La suite exacte de la proposition 3.4.1.2 se récrit sous la forme :*

$$\bigoplus_{i < j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda^n \xrightarrow{\varepsilon} H_{p^{-1}(x)}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow 0 .$$

Si on note  $(\chi_y)_{i < j, y \in D_i \cap D_j}$  la base canonique du groupe de gauche et  $\chi_{D_1}, \dots, \chi_{D_n}$  celle de  $\Lambda^n$ , la différentielle  $\delta$  vérifie la formule

$$\delta(\chi_y) = [y : x] \cdot (\chi_{D_i} - \chi_{D_j}) .$$

En outre,  $\varepsilon(\chi_{D_i}) \in H_{p-1(x)}^4(X', \Lambda(2))$  est obtenu par agrandissement du support à partir de la classe  $\frac{1}{[y:x]} Cl_{y \rightarrow X} \in H_y^4(X', \Lambda(2))$  pour tout point fermé  $y$  d'un  $D_i$ .

Le théorème de pureté cohomologique absolue donne des isomorphismes

$$Cl_{D_i \cap D_j \rightarrow X} : H^0(D_i \cap D_j, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_{D_i \cap D_j}^4(X', \Lambda(2)) ,$$

ce qui permet de décrire le groupe de gauche dans la suite exacte de la proposition 3.4.1.2. Le même théorème donne aussi des isomorphismes

$$Cl_{D_i \rightarrow X} : H^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} H_{D_i}^4(X', \Lambda(2)) .$$

En outre, on dispose du morphisme trace (relativement à  $x$ )  $\text{Tr} : H^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} \Lambda$ . Celui-ci est caractérisé par le fait que pour tout point fermé  $y$  de  $D_i$ , l'image de  $Cl_{y \rightarrow D_i} \in H_y^2(D_i, \Lambda(1))$  par le morphisme composé

$$H_y^2(D_i, \Lambda(1)) \rightarrow H^2(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\text{Tr}} \Lambda$$

soit  $[y : x]$ . La description des morphismes  $\delta$  et  $\varepsilon$  donnée dans l'énoncé s'obtient alors aussitôt à partir des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

**PROPOSITION 3.4.1.4.** *La suite suivante est exacte :*

$$\bigoplus_{i < j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \bigoplus_i \Lambda \xrightarrow{\Sigma} \Lambda \rightarrow 0 ,$$

où  $\Sigma$  est défini par  $\Sigma(\chi_{D_i}) = 1$  pour tout  $i$ .

Tout d'abord, à partir de la formule donnée pour  $\delta$  dans la proposition 3.4.1.3, il est clair que  $\Sigma \circ \delta = 0$ .  $\Sigma$  induit donc un morphisme  $\text{Coker} \delta \rightarrow \Lambda$ . Comme les degrés  $[y : x]$  qui interviennent sont inversibles dans  $\Lambda$ , on voit que si  $i$  et  $j$  sont tels que  $D_i \cap D_j$  soit non vide, alors  $\chi_{D_i}$  et  $\chi_{D_j}$  ont la même classe dans  $\text{Coker} \delta$ . La fibre  $p^{-1}(x)$  étant connexe (Main Theorem), on en déduit que tous les éléments  $\chi_{D_i}$  ont la même classe dans  $\text{Coker} \delta$ . L'inclusion entre l'image de  $\delta$  et le noyau de  $\Sigma$  est donc une égalité.

**COROLLAIRE 3.4.1.5.** *Les suites exactes des propositions 3.4.1.3 et 3.4.1.4 donnent naissance à un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_{p-1(x)}^4(X'; \Lambda(2))$ .*

**COROLLAIRE 3.4.1.6.** *Via l'isomorphisme canonique  $H_x^4(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{p-1(x)}^4(X', \Lambda(2))$  de la proposition 3.4.1.1 (d), l'isomorphisme du corollaire précédent donne un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} H_x^4(X, \Lambda(2))$ .*

**DÉFINITION 3.4.1.7.** On note  $[x]_{X'} \in H_x^4(X, \Lambda(2))$  le générateur défini par l'isomorphisme du corollaire précédent.

**3.4.2. Indépendance en la résolution.** Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si  $q: X'' \rightarrow X$  est une autre résolution du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1, alors  $[x]_{X'} = [x]_{X''}$ . Quitte à introduire une désingularisation de la composante irréductible dominant  $X$  du produit fibré de  $X''$  de  $X'$  au-dessus de  $X$ , on peut supposer qu'une des deux désingularisations  $X'$  et  $X''$  considérées coiffe l'autre. On suppose donc par exemple qu'il existe un (unique)  $X$ -morphisme  $\pi: X'' \rightarrow X'$ . Le morphisme  $\pi$  est projectif et birationnel entre deux schémas réguliers de dimension 2, il induit donc un isomorphisme au-dessus d'un ouvert  $U'$  de  $X'$  tel que le fermé  $X' - U'$  soit de dimension 0. Il existe donc certainement un point fermé  $y'$  de  $p^{-1}(x)$  tel que le morphisme induit soit un isomorphisme  $\pi^{-1}(y') \rightarrow y'$ . On note  $y''$  l'unique point fermé de  $\pi^{-1}(y')$ . La compatibilité des classes de Gysin au changement de base implique que la classe  $Cl_{y' \rightarrow X'}$  est envoyée sur  $Cl_{y'' \rightarrow X''}$  par le morphisme de restriction  $\pi^*: H_{y'}^4(X', \Lambda(2)) \rightarrow H_{y''}^4(X'', \Lambda(2))$ . Cette compatibilité vaut encore après élargissement du support à  $p^{-1}(x)$  et à  $q^{-1}(x)$ . En considérant la composition suivante :

$$H_x^4(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{p^{-1}(x)}^4(X', \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H_{q^{-1}(x)}^4(X'', \Lambda(2)),$$

on obtient aussitôt que  $[y' : x] \cdot [x]_{X'} = [y'' : x] \cdot [x]_{X''}$ , ce qui permet de conclure que  $[x]_{X'} = [x]_{X''}$ .

**REMARQUE 3.4.2.1.** On peut montrer que si  $p: X' \rightarrow X$  est un morphisme projectif birationnel avec  $X'$  régulier, alors, même sans supposer que  $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$  soit un diviseur à croisements normaux strict, l'application  $H_x^4(X, \Lambda(2)) \rightarrow H_{p^{-1}(x)}^4(X', \Lambda(2))$  est un isomorphisme et la classe  $[x]$  s'envoie bien sur l'élément induit par  $\frac{1}{[x':x]} Cl_{x' \rightarrow X'}$  pour tout point fermé  $x'$  de  $p^{-1}(x)$ .

**3.4.3. Compatibilité aux morphismes de transition.** Soit  $\bar{y} \rightarrow X$  un point géométrique au-dessus d'un point  $y$  de codimension 1. Autrement dit, on a une spécialisation immédiate  $\bar{y} \rightarrow x$  de points géométriques de  $X$ . Nous allons montrer que si  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}$  est une spécialisation immédiate, alors on a l'égalité

$$[x] = sp_{\bar{y} \rightarrow x}^X(sp_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}}^X(1))$$

dans  $H_x^4(X, \Lambda(2))$ , ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.1.1 jusqu'en dimension 2.

On note  $C$  l'adhérence de  $y$  dans  $X$ . Il existe une désingularisation  $X' \rightarrow X$  du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1 telle que l'adhérence  $C'$  de  $y$  dans  $X'$  soit un trait. Plus précisément, le morphisme évident  $C' \rightarrow C$  identifie  $C'$  au normalisé de  $C$ . Le morphisme  $C' \rightarrow C$  étant un homéomorphisme universel, on peut noter  $x'$  le point fermé de  $C'$  (celui de  $C$  est bien entendu  $x$ ) et  $U' = X' - x'$ . On dispose d'immersions fermées évidentes  $i: C \rightarrow X$ ,  $i': C' \rightarrow X'$ ,  $k: y \rightarrow U$  et  $k': y \rightarrow U'$ .

**LEMME 3.4.3.1.** Avec les notations ci-dessus, le diagramme évident qui suit est commutatif (les flèches marquées comme étant des isomorphismes devant être considérées

comme bidirectionnelles) :

$$\begin{array}{ccc}
 & H_x^4(X, \Lambda(2)) = H_x^4(C, i^! \Lambda(2)) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 H_{p^{-1}(x)}^4(X', \Lambda(2)) & & H^3(y, k^! \Lambda(2)) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & H_{x'}^4(X', \Lambda(2)) = H_{x'}^4(C', i'^! \Lambda(2)) &
 \end{array}$$

Ceci équivaut à la commutativité du diagramme évident :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^3(u, \Lambda(2)) & \xrightarrow{\sim} & H_x^4(X, \Lambda(2)) & = & H_x^4(C, i^! \Lambda(2)) & \longleftarrow & H^3(y, k^! \Lambda(2)) \\
 \uparrow \sim & & & & & & \parallel \\
 H^3(u', \Lambda(2)) & \xrightarrow{\sim} & H_{x'}^4(X', \Lambda(2)) & = & H_{x'}^4(C', i'^! \Lambda(2)) & \longleftarrow & H^3(y, k^! \Lambda(2))
 \end{array}$$

On peut identifier le carré externe de ce diagramme-ci au suivant, où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli du support :

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(u, \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_y^3(u, \Lambda(2)) \\
 \uparrow \sim & & \parallel \\
 H^3(u', \Lambda(2)) & \longleftarrow & H_{y'}^3(u', \Lambda(2))
 \end{array}$$

Ce diagramme-là est bien évidemment commutatif, ce qui achève la démonstration du lemme 3.4.3.1.

On peut prolonger sur la droite le diagramme commutatif du lemme :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_x^4(C, i^! \Lambda(2)) & \xleftarrow{\text{sp}_{y \rightarrow x}^C} & H_y^2(C, i^! \Lambda(1)) & & \\
 \uparrow \sim & & \swarrow \sim & & \\
 H^3(y, k^! \Lambda(2)) & & [x' : x] & & (\mathcal{H}^2 k^! \Lambda(1))_{\bar{y}} \xleftarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X} \Lambda \\
 \downarrow \sim & & \swarrow \sim & & \sim \\
 H_{x'}^4(C', i'^! \Lambda(2)) & \xleftarrow{\text{sp}_{y' \rightarrow x'}^{C'}} & H_{y'}^2(C', i'^! \Lambda(1)) & & 1
 \end{array}$$

Du groupe  $(\mathcal{H}^2 k^! \Lambda(1))_{\bar{y}}$  partent deux isomorphismes canoniques vers des groupes de cohomologie à supports de  $C$  et de  $C'$  ; ici, on les a multipliés respectivement par  $[x' : x]$  et  $1$  de façon à rendre le diagramme commutatif (cf. définition 1.3.1).

On peut partir de l'élément  $1$  dans le groupe  $\Lambda$  tout à droite et considérer son image dans le groupe  $H_x^4(X, \Lambda(2))$  figurant sur le diagramme du lemme. En suivant le chemin du bas, on obtient  $[x' : x] \cdot [x]_{x'}$ . En suivant le chemin du haut, on obtient  $[x' : x] \cdot \text{sp}_{y \rightarrow x}^X(\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X(1))$ . On peut ainsi conclure que l'on a bien l'égalité

$$[x]_{x'} = \text{sp}_{y \rightarrow x}^X(\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}}^X(1))$$

dans  $H_x^4(X, \Lambda(2))$ .



**3.5. Morphismes de transition en codimension arbitraire.** Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.1.2 en nous appuyant sur le théorème 3.1.1 établi pour le moment jusqu'en dimension 2. Ce résultat nous permettra ensuite d'établir le théorème 3.1.1 en toute généralité.

**DÉFINITION 3.5.1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent. Soit  $\bar{y} = \bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n = \bar{x}$  une suite de spécialisations de points géométriques de  $X$  telle que pour tout  $0 \leq i < n$ , la spécialisation  $\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_{i+1}$  soit de codimension 0 ou 1. On note  $c$  la codimension de la spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$ . Pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on note  $\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n}^X : H_{\bar{y}}^p(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{p+2c}(K(c))$  le morphisme de transition obtenu par la composition  $\text{sp}_{\bar{x}_{n-1} \rightarrow \bar{x}_n}^X \circ \dots \circ \text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_1}^X$ .

**DÉFINITION 3.5.2.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent. Soit  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation de points géométriques de  $X$  de codimension  $c$ . Soit  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On dit que la propriété  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^c$  est satisfaite si le morphisme  $\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n}^X : H_{\bar{y}}^0(K) \rightarrow H_{\bar{x}}^{2c}(K(c))$  ne dépend pas du choix de la factorisation de  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  en  $\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n$ .

**DÉFINITION 3.5.3.** On dira que la propriété  $(C)^{\leq c}$  est satisfaite si toutes les propriétés  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$  envisagés dans la définition 3.5.2 le sont pour  $c' \leq c$ . On dira que la propriété  $(C)_{\text{loc.}}^{\leq c}$  est vérifiée si les propriétés  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^{c'}$  sont vérifiées dans la situation, dite locale, où le schéma  $X$  est supposé local strictement hensélien intègre de dimension  $\leq c$  de point fermé  $x$  et où  $\bar{\eta}$  est au-dessus du point générique de  $X$ . Enfin, on dira que la propriété  $(C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq c}$  est satisfaite si on suppose de plus que  $X$  est normal et que  $K = \Lambda$ .

Il s'agit donc d'établir la propriété  $(C)^{\leq c}$  pour tout  $c \geq 0$ . D'après la remarque 1.4.2, on peut considérer que la propriété  $(C)^{\leq 1}$  est connue. En outre, notons que le théorème 3.1.2 affirme en particulier  $(C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq c}$  pour tout  $c \geq 0$ . Les résultats de la sous-section 3.4 montrent que  $(C)_{\text{loc., normal}, \Lambda}^{\leq 2}$  est satisfaite.

**PROPOSITION 3.5.4.** Soit  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme fini entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents. Soit  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  une spécialisation de points géométriques de  $X'$  de codimension  $c$  au-dessus d'une spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$  (cf. définition 2.3.1). Pour toute factorisation  $\bar{x}'_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}'_n$  de  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  en une suite de spécialisations de codimension 0 ou 1, si on note  $\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n$  la factorisation de  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  en-dessous de la précédente, pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $i \in \mathbf{Z}$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{y}'}^i(f^!K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{x}'_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}'_n}^X} & H_{\bar{x}'}^{i+2c}(f^!K(c)) \\ \text{Cl}_{\bar{y}' \rightarrow \bar{y}} \uparrow \sim & & \sim \uparrow \text{Cl}_{\bar{x}' \rightarrow \bar{x}} \\ H_{\bar{y}}^i(K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{x}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_n}^X} & H_{\bar{x}}^{i+2c}(K(c)) \end{array}$$

En outre, on a l'équivalence  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^c \iff (C)_{\bar{y}' \rightarrow \bar{x}', f^!K}^c$ .

La commutativité du diagramme se déduit aussitôt de la proposition 3.3.1. L'équivalence annoncée résulte de la commutativité du diagramme et du fait qu'il est essentiellement équivalent de se donner une factorisation de la spécialisation  $\bar{y}' \rightarrow \bar{x}'$  ou de s'en donner une de  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  (cf. propositions 2.3.2 et 2.3.3).

**LEMME 3.5.5.** Pour tout entier  $c \geq 0$ , on a l'équivalence  $(C)^{\leq c} \iff (C)_{\text{loc.}}^{\leq c}$ .

Supposons  $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$  et montrons  $(C)^{\leq c}$ . Il suffit évidemment de montrer  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$  pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , avec  $X$  un schéma local strictement hensélien de point fermé  $\bar{x}$  et une spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de codimension  $c' \leq c$ . Il s'agit de vérifier que l'on peut supposer que  $X$  est intègre et que  $\bar{y}$  est au-dessus du point générique. Pour cela, on introduit l'immersion fermée  $i: Z \rightarrow X$  où  $Z = \overline{\{y\}}$ . La proposition 3.5.4 montre que  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, i^!K}^{c'}$  implique  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, K}^{c'}$ . Pour conclure, il suffit d'observer que  $(C)_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, i^!K}^{c'}$  est un cas particulier de  $(C)_{\text{loc}}^{\leq c}$ .

**LEMME 3.5.6.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension  $c$ , de point fermé  $x$  et de point générique  $\eta$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . Soit  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

- (a)  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \tau_{\leq 0}K}^c \implies (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^c$  ;
- (b)  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \tau_{\leq 0}K}^c \iff (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{H}^0K}^c$  ;
- (c) Soit  $j: U \rightarrow X$  l'inclusion d'un ouvert dense et  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X$  tels que  $j^*\mathcal{M} \simeq j^*\mathcal{N}$ , alors  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^c \iff (C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{N}}^c$ .

L'implication (a) résulte du fait que le morphisme canonique  $\tau_{\leq 0}K \rightarrow K$  induit un isomorphisme  $H_{\bar{\eta}}^0(\tau_{\leq 0}K) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\eta}}^0(K)$ .

On considère ensuite le morphisme canonique  $\tau_{\leq 0}K \rightarrow \mathcal{H}^0K$ . Il induit évidemment un isomorphisme après application de  $H_{\bar{\eta}}^0$ , mais aussi après celle de  $H_x^{2c}$ , pour des raisons de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1). L'équivalence (b) en résulte aussitôt.

Pour montrer (c), on peut supposer que  $\mathcal{N} = j_*j^*\mathcal{M}$ . On a alors un monomorphisme canonique  $j_*j^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , dont le conoyau est  $i_*i^*\mathcal{M}$ , où  $i: Z \rightarrow X$  désigne une immersion fermée complémentaire. La proposition 3.2.1 montre alors que  $H^q(X - x, (i_*i^*\mathcal{M})_{|X-x}) = 0$  pour  $q \geq 2c - 2$ . Ainsi, le morphisme  $j_*j^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  induit un isomorphisme non seulement après application de  $H_{\bar{\eta}}^0$ , mais aussi celle de  $H_x^{2c}$ , ce qui permet de conclure.

**LEMME 3.5.7.** *Pour tout entier  $c \geq 0$ , on a l'implication  $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c} \implies (C)_{\text{loc}}^{\leq c}$ .*

Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension  $c' \leq c$ , de point fermé  $x$  et de point générique  $\eta$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . D'après le lemme 3.5.6, pour montrer  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, K}^{c'}$  pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , il suffit de montrer  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^{c'}$  pour tout faisceau de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{M}$  sur  $X$ . On peut évidemment supposer que  $\mathcal{M}$  est constructible. Mais alors, il existe un ouvert dense de  $X$  au-dessus duquel  $\mathcal{M}$  soit localement constant. Il existe évidemment un morphisme fini surjectif  $f: \tilde{X} \rightarrow X$ , avec  $\tilde{X}$  normal intègre, et un ouvert dense  $U$  de  $\tilde{X}$  tel que  $f$  induise un revêtement fini étale  $\tilde{U} = f^{-1}(U) \rightarrow U$  et que  $(f^*\mathcal{M})_{|\tilde{U}}$  soit isomorphe à un faisceau constant de valeur un certain  $\Lambda$ -module  $N$ . Choisissons une spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$  au-dessus de  $\bar{\eta} \rightarrow x$ . La propriété  $(C)_{\text{loc}, \text{normal}, \Lambda}^{\leq c}$  contient  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, \Lambda}^{c'}$  comme cas particulier. Cette dernière propriété implique à son tour la propriété  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, N}^{c'}$ . On observe que l'on a un isomorphisme canonique  $(f^*\mathcal{M})_{|\tilde{U}} \simeq N$ . L'assertion (c) du lemme 3.5.6 permet d'obtenir la propriété  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, \mathcal{H}^0(f^*\mathcal{M})}^{c'}$ , et les assertions (a) et (b) d'en déduire  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}, f^*\mathcal{M}}^{c'}$ . Enfin, la proposition 3.5.4 permet de vérifier  $(C)_{\bar{\eta} \rightarrow x, \mathcal{M}}^{c'}$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 3.5.8. *Pour tout entier  $c \geq 3$ , on a l'implication  $(C)^{\leq c-1} \implies (C)_{\text{loc.,normal},\Lambda}^{\leq c}$ .*

Soit  $X = \text{Spec}(A)$  un schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension  $c$ , de point fermé  $x$  et de point générique  $\eta$ . On choisit un point géométrique  $\bar{\eta}$  au-dessus de  $\eta$ . On note  $s: \bar{\eta} \rightarrow x$  la spécialiation canonique. Nous allons montrer la propriété  $(C)_{s,\Lambda}^c$ .

Soit  $\bar{z} \rightarrow X$  un point géométrique tel que  $z \neq x$  et  $z \neq \eta$ . On a une spécialisation canonique  $t: \bar{z} \rightarrow x$ . On peut choisir une spécialisation  $u: \bar{\eta} \rightarrow \bar{z}$ . On obtient peut-être pas ainsi une factorisation de la spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow x$  fixée plus haut, mais il existe certainement  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$  faisant commuter le diagramme suivant de spécialisations de points géométriques de  $X$ :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta} & \xrightarrow{s} & x \\ \sim \downarrow \sigma & & \uparrow t \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{u} & \bar{z} \end{array}$$

Les spécialisations  $\sigma$ ,  $u$  et  $t$  sont de codimension  $\leq c - 1$ , les morphismes de transitions associés sont donc bien définis. On peut considérer l'image de  $1 \in H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda)$  par le composé de ces morphismes de transition :

$$\gamma_{\sigma,u,t} = (\text{sp}_t^X \circ \text{sp}_u^X \circ \text{sp}_\sigma^X)(1) \in H_x^{2c}(X, \Lambda(c)).$$

Bien entendu, on a  $\text{sp}_\sigma^X(1) = 1$ . On note donc simplement  $\gamma_{u,t}$  l'élément  $\gamma_{\sigma,u,t} = (\text{sp}_t^X \circ \text{sp}_u^X)(1)$ . J'affirme que cette classe  $\gamma_{u,t}$  ne dépend que du point  $z$  de  $X$  en-dessous duquel  $\bar{z}$  se trouve. En effet, soit  $\bar{z}'$  un autre point géométrique au-dessus de  $z$ , et  $t': \bar{z}' \rightarrow x$  la spécialisation canoniquement associée. On choisit une spécialisation  $u': \bar{\eta} \rightarrow \bar{z}'$ . On peut choisir un  $z$ -isomorphisme  $\sigma': \bar{z} \xrightarrow{\sim} \bar{z}'$ . Le schéma  $X$  étant géométriquement unibranche, on peut montrer facilement qu'il existe un  $\eta$ -isomorphisme  $\sigma'': \bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}$  induisant un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de  $X$ :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\eta} & \xrightarrow{u} & \bar{z} & \xrightarrow{t} & x \\ \sim \downarrow \sigma'' & & \sim \downarrow \sigma' & & \parallel \\ \bar{\eta} & \xrightarrow{u'} & \bar{z}' & \xrightarrow{t'} & x \end{array}$$

En utilisant cette fois-ci que  $\sigma''$  agit trivialement sur  $1 \in H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda)$ , on montre que  $\gamma_{u,t} = \gamma_{u',t'}$ . On peut donc noter simplement  $\gamma_z$  cette classe.

Il s'agit de montrer que la classe  $\gamma_z$  est indépendante de  $z \in X - \{\eta, x\}$ . Par construction, si  $z' \in X - \{\eta, x\}$  est tel qu'il existe une spécialisation (Zariski)  $z \rightarrow z'$ , on a  $\gamma_z = \gamma_{z'}$ .

Comme  $A$  est local normal excellent de dimension  $\geq 3$ , d'après [SGA 2 XIII 2.1], si  $f \in A - \{0\}$ , le schéma  $\text{Spec}(A/(f) - \{x\})$  est connexe. Il en résulte aussitôt que les classes  $\gamma_z$  pour  $z \in \text{Spec}(A/(f) - \{x\})$  sont égales. Maintenant, si  $z$  et  $z'$  sont deux éléments de  $X - \{\eta, x\}$ , il existe bien évidemment  $f \in A - \{0\}$  tel que  $z$  et  $z'$  appartiennent à l'hypersurface définie par  $f$ . On obtient donc bien  $\gamma_z = \gamma_{z'}$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.2. Il s'agit d'établir la propriété  $(C)^{\leq c}$  pour tout  $c \geq 0$ . Elle équivaut à la propriété  $(C)_{\text{loc.}}^{\leq c}$  d'après le lemme 3.5.5. D'après le lemme 3.5.7, elle équivaut encore à la propriété

$(C)_{\text{loc.,normal},\Lambda}^{\leq c}$ . Compte tenu de ces équivalences, le lemme 3.5.8 montre que pour  $c \geq 3$ ,  $(C)_{\text{loc.,normal},\Lambda}^{\leq c-1}$  implique  $(C)_{\text{loc.,normal},\Lambda}^{\leq c}$ . Un raisonnement par récurrence permet donc de conclure puisque la propriété  $(C)_{\text{loc.,normal},\Lambda}^{\leq 2}$  a été établie plus haut.

### 3.6. Fin de la démonstration.

**PROPOSITION 3.6.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent local hensélien normal de dimension  $d$ , de point fermé  $x$  et de point générique  $\eta$ . Soit  $\bar{x}$  un point géométrique au-dessus de  $x$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . Soit  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation. Alors, l'image de 1 par le morphisme de transition  $\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}}^X: H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{2d}(X, \Lambda(d))$  est invariante par  $\text{Gal}(\bar{x}/x)$ , et indépendante de la spécialisation choisie  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{x}$ , on la note  $[x]$ . On obtient ainsi un morphisme  $\Lambda[-2d] \rightarrow \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$  dans  $D(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Ceci résulte aussitôt du théorème 3.1.2 et du fait que  $1 \in H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda)$  est fixé par  $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ .

Par construction, les classes  $[x]$  sont compatibles aux morphismes de transition. Pour finir de démontrer le théorème 3.1.1, il reste à montrer que dans la situation de la proposition précédente, le morphisme  $\Lambda[-2d] \rightarrow \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$  est un isomorphisme, ou encore, dans la situation où  $X$  est strictement hensélien, que le morphisme  $\Lambda \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  induit par  $[x]$  est un isomorphisme. En effet, des considérations de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1) expliquent l'annulation de  $H_x^q(X, \Lambda(d))$  pour  $q > 2d$ .

**LEMME 3.6.2.** *Soit  $d \geq 3$ . On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension  $d - 1$ . Alors, pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  local strictement hensélien normal de dimension  $d$ , de point fermé  $x$ , le morphisme  $\Lambda \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  induit par  $[x]$  est surjectif.*

On utilise la suite spectrale de coniveau calculant la cohomologie de l'ouvert  $U = X - x$  à coefficients dans  $\Lambda(d)$  :

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{y \in U^p} H_y^{p+q}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \implies H^{p+q}(U, \Lambda(d)) ,$$

où  $U^p$  désigne l'ensemble des points de codimension  $p$  de  $U$ . La topologie étale étant plus fine que la topologie de Nisnevich, dans l'expression du terme  $E_1$ , on peut remplacer les localisés  $X_{(y)}$  par leurs hensélisés  $X_{(y)}^h$  pour tout  $y \in U^p$  avec  $0 \leq p \leq d - 1$ . On obtient ainsi un isomorphisme canonique :

$$R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq R\Gamma(y, R\Gamma_y(\Lambda(p))(d - p)) .$$

La structure de  $\tau_{\geq 2p} R\Gamma_y(\Lambda(p))$  est connue par notre connaissance limitée du théorème 3.1.1 puisque  $p \leq d - 1$ . D'après la proposition 3.2.2, on a une majoration de la  $\ell$ -dimension cohomologique de  $y$  pour tout nombre premier  $\ell$  divisant  $n$  :  $cd_{\ell} y \leq d - p$ . En appliquant la suite spectrale de composition des foncteurs dérivés au calcul de  $R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d))$ , on obtient d'une part que  $H_y^i(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$  pour  $i > d + p$ , c'est-à-dire que  $H^{p+q}(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$  pour  $q > d$ , et d'autre part que  $H^{p+d}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq H^{d-p}(y, \Lambda(d - p))$ .

On a donc montré que  $E_1^{p,q} = 0$  pour  $q \geq d + 1$ , et par ailleurs, il est évident que  $E_1^{p,q} = 0$  si  $p \geq d$ . On en déduit aussitôt que l'on a des isomorphismes canoniques

$\text{Coker}(E_1^{d-2,d} \rightarrow E_1^{d-1,d}) \xrightarrow{\sim} H^{2d-1}(U, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$ . En particulier, le morphisme canonique  $E_1^{d-1,d} \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  est surjectif. D'après le calcul ci-dessus, on connaît la structure de  $E_1^{d-1,d}$  :

$$E_1^{d-1,d} \simeq \bigoplus_{y \in U^{d-1}} H^1(y, \Lambda(1)) .$$

Pour tout  $y \in U^{d-1}$ , on a un isomorphisme évident  $H^1(y, \Lambda(1)) \simeq \Lambda$  (induit par une spécialisation immédiate  $\bar{y} \rightarrow x$  de points géométriques de  $X$ ). Il n'est pas difficile de vérifier que l'image du morphisme canonique  $\Lambda \simeq H^1(y, \Lambda(1)) \subset E_1^{d-1,d} \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  est le sous-groupe engendré par  $[x]$ . Par conséquent, l'image du morphisme surjectif  $E_1^{d-1,d} \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  est le sous-groupe engendré par  $[x]$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

**LEMME 3.6.3.** *Soit  $d \geq 3$ . On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension  $d - 1$ . Alors, pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  local strictement hensélien normal de dimension  $d$ , de point fermé  $x$ , le morphisme  $\Lambda \rightarrow H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  induit par  $[x]$  est un isomorphisme, autrement dit, l'énoncé du théorème 3.1.1 vaut jusqu'en dimension  $d$ .*

En vertu du lemme précédent, il ne s'agit plus que de déterminer la structure du  $\Lambda$ -module  $H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$ . Compte tenu du théorème de changement de base formel (cf. [Fujiiwara, 1995, corollary 6.6.4]), on peut supposer que  $X$  est complet. Les théorèmes de structure des anneaux locaux noethériens complets (cf. [ÉGA 0<sub>IV</sub> 19.8.8]) montrent que  $X$  est alors isomorphe à un sous-schéma fermé d'un schéma régulier. Pour la fonction de dimension  $\delta$  sur  $X$  telle que  $\delta(\eta) = 0$  où  $\eta$  est le point générique de  $X$ , compte tenu de ce qu'on sait déjà sur les complexes dualisants potentiels (cf. proposition 2.4.4.1), il existe un complexe dualisant potentiel  $K$  pour  $(X, \delta)$ . Nous allons utiliser le lemme général suivant :

**LEMME 3.6.4.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent normal intègre de point générique  $\eta$ . On suppose  $X$  muni de la fonction de dimension  $\delta$  telle que  $\delta(\eta) = 0$ . Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel pour  $(X, \delta)$ . Alors, les faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^q K$  sont nuls pour  $q < 0$  et l'épinglage en  $\eta$  s'étend en un isomorphisme  $\mathcal{H}^0 K \simeq \Lambda$ . Autrement dit, on a un isomorphisme canonique  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} K$ .*

Pour obtenir le résultat pour  $X$ , il suffit de l'avoir pour ses hensélisés stricts. On peut donc supposer que  $X$  est strictement hensélien de dimension  $d$  et de point fermé  $x$ . On procède par récurrence sur  $d$ . Si  $d = 0$ , le résultat est évident. On suppose donc que  $d \geq 1$  et que le résultat est connu pour l'ouvert  $U = X - x$ . Notons  $j: U \rightarrow X$  et  $i: x \rightarrow X$  les immersions évidentes. On a un triangle distingué dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$i_* i^! K \rightarrow K \rightarrow Rj_* j^* K \rightarrow i_* i^! K[1] .$$

Grâce à l'épinglage en  $x$ , il vient que  $\mathcal{H}^q i^! K = 0$  pour  $q \leq 1$ . L'hypothèse sur  $U$  montre que  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} j^* K$ . On en déduit que  $\mathcal{H}^q K = 0$  pour  $q < 0$  et que  $\mathcal{H}^0 K \simeq j_* \Lambda$ . Comme  $X$  est normal, le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow j_* \Lambda$  est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons à la démonstration du lemme 3.6.3, on considère le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow K$  déduit du lemme ci-dessus. Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique au-dessus de  $\eta$ . Choisissons une spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow x$ . On considère le diagramme

commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par  $\Lambda \rightarrow K$  et les flèches horizontales par les morphismes de transition associés à la spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow x$  :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{\eta}}^0(\Lambda) & \longrightarrow & H_x^{2d}(X, \Lambda(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\bar{\eta}}^0(K) & \longrightarrow & H_x^{2d}(X, K(d)) \end{array}$$

Le morphisme de gauche est évidemment un isomorphisme. Celui du bas aussi puisque  $K$  est un complexe dualisant potentiel. Le morphisme du haut est donc injectif, mais on sait déjà qu'il est surjectif. Le  $\Lambda$ -module  $H_x^{2d}(X, \Lambda(d))$  est donc isomorphe à  $\Lambda$ , ce qui permet de conclure.

#### 4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels

**4.1. Énoncés.** Grâce aux résultats de la section 3, nous allons pouvoir poursuivre l'étude de certaines propriétés des complexes dualisants potentiels. Le résultat principal de la section 2 était la construction d'un complexe dualisant potentiel sur les schémas réguliers (cf. proposition 2.4.1.1). Les deux propositions suivantes établissent des propriétés de stabilité des complexes dualisants potentiels par rapport aux morphismes de type fini et aux morphismes réguliers [ÉGA IV 6.8.1].

**PROPOSITION 4.1.1.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents. On suppose  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta_X$ . On munit  $Y$  de la fonction de dimension  $\delta_Y$  définie par l'égalité  $\delta_Y(\mathbf{y}) = \delta_X(f(\mathbf{y})) - \text{codim}_{f^{-1}(f(\mathbf{y}))}(\mathbf{y})$  pour tout  $\mathbf{y} \in Y$ .*

*Si  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ , alors  $f^*K$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur  $Y$ , et c'est un complexe dualisant potentiel si  $K$  en est un.*

**PROPOSITION 4.1.2.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini compactifiable entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents. On suppose  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta_X$ . On munit  $Y$  de la fonction de dimension  $\delta_Y$  définie par l'égalité  $\delta_Y(\mathbf{y}) = \delta_X(f(\mathbf{y})) + \text{deg. tr.}(\mathbf{y}/f(\mathbf{y}))$  pour tout  $\mathbf{y} \in Y$ .*

*Si  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ , alors  $f^!K$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur  $Y$ , et c'est un complexe dualisant potentiel si  $K$  en est un.*

**REMARQUE 4.1.3.** Au cours des démonstrations, on observera que les constructions des propositions 4.1.1 et 4.1.2 sont compatibles à la composition des morphismes : si  $g: Z \rightarrow Y$  est un autre morphisme du type envisagé et  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ , l'isomorphisme de transitivité  $g^*f^*K \simeq (f \circ g)^*K$  (resp.  $g^!f^!K \simeq (f \circ g)^!K$ ) est compatible aux épingleages. La proposition 4.1.1 généralise la construction de la proposition 2.2.1 (cas où  $f$  est étale).

Nous verrons plus bas que la proposition 4.1.2 résulte facilement de la proposition 4.1.1. Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement aux morphismes réguliers. La sous-section suivante sur le théorème de changement de base par un morphisme régulier nous permettra de définir une structure de complexe dualisant putatif sur  $f^*K$  dans la situation de la proposition 4.1.1. Dans le cas d'un complexe dualisant potentiel, ce sont les résultats de la section 3 qui

vont nous permettre de vérifier que les épingleages sur  $f^*K$  sont compatibles aux spécialisations.

**4.2. Changement de base par un morphisme régulier.** Dans ce numéro, on étudie une généralisation du théorème de changement de base par un morphisme lisse au cas du changement de base par un morphisme régulier. La démonstration utilise le théorème de Popescu (cf. [Swan, 1998]). On examine ensuite quelques conséquences de ce résultat.

**PROPOSITION 4.2.1.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas localement noethériens. Soit  $g: X' \rightarrow X$  un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. On constitue le carré cartésien de schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Alors, pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme de changement de base  $f^*Rg_*K \rightarrow Rg'_*f'^*K$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Les arguments habituels montrent que l'on peut supposer que  $X, Y$ , puis  $X'$ , et donc  $Y'$ , sont affines. D'après le théorème de Popescu, on peut écrire  $Y$  comme la limite projective d'un système projectif filtrant  $(Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X)_\alpha$  de  $X$ -schémas affines lisses (voir [ÉGA IV 8]). Le théorème de changement de base par un morphisme lisse [SGA 4 XVI 1.2] montre que les morphismes de changement de base  $f_\alpha^*Rg_{\alpha*}K \rightarrow Rg'_{\alpha*}f'^*_\alpha K$  sont des isomorphismes. Ce résultat pour les morphismes  $f_\alpha$  s'étend au morphisme  $f$  grâce à la technique de passage à la limite de [SGA 4 VII 5.8], ce qui permet de conclure.

**PROPOSITION 4.2.2.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit  $K \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Soit  $L \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors, le morphisme évident est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  :*

$$f^*R\mathbf{H}\mathbf{om}(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathbf{H}\mathbf{om}(f^*K, f^*L).$$

Avant de la démontrer, signalons un corollaire de cette proposition :

**COROLLAIRE 4.2.3.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée. Notons  $i': f^{-1}(Z) \rightarrow Y$  l'immersion fermée déduite par changement de base, et  $f': f^{-1}(Z) \rightarrow Z$  la projection. Alors, pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme évident  $f'^*i'^*K \rightarrow i'^*f^*K$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(f^{-1}(Z)_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Pour démontrer la proposition 4.2.2, commençons par constater que ce corollaire est un cas particulier de la proposition 4.2.1 (l'appliquer avec pour  $g$  l'immersion ouverte complémentaire de  $i$ ).

**LEMME 4.2.4.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens. Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée. On constitue le carré cartésien suivant :*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Soit  $K \in \mathbf{D}_c^b(\mathbf{Z}_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On suppose que pour tout  $L \in \mathbf{D}^+(\mathbf{Z}_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme canonique  $f'^* \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(K, L) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(f'^* K, f'^* L)$  est un isomorphisme. Alors, pour tout  $L \in \mathbf{D}^+(\mathbf{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme canonique  $f^* \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(i_* K, L) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(f^* i_* K, f^* L)$  est un isomorphisme.

Ce lemme-ci résulte aussitôt du corollaire 4.2.3.

LEMME 4.2.5. Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens. Soit  $j: U \rightarrow X$  une immersion ouverte. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Soit  $K \in \mathbf{D}_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On suppose que pour tout  $L \in \mathbf{D}^+(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme canonique  $f'^* \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(K, L) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(f'^* K, f'^* L)$  est un isomorphisme. Alors, pour tout  $L \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme canonique  $f^* \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(j_! K, L) \rightarrow \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(f^* j_! K, f^* L)$  est un isomorphisme.

Ce lemme-là résulte de l'isomorphisme  $f^* \mathbf{R} j_* \simeq \mathbf{R} j'_* f'^*$  qui est un cas particulier de la proposition 4.2.1.

Démontrons la proposition 4.2.2. Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 permettent de supposer que  $K$  est un faisceau localement constant constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . En utilisant que le résultat est trivial si  $f$  est étale, on se ramène finalement au cas facile où  $K$  est un faisceau constant.

### 4.3. Démonstration de la proposition 4.1.1.

#### 4.3.1. Structure de complexe dualisant putatif sur $f^* K$ .

LEMME 4.3.1.1. Dans la situation de la proposition 4.1.1, si  $K$  est un complexe dualisant putatif sur  $X$ , on peut munir  $f^* K$  d'une structure de complexe dualisant putatif sur  $Y$ .

Soit  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ . Soit  $x \in X$ . Introduisons le localisé  $X' = X_{(x)}$  de  $X$  en  $x$  et  $Y' = Y \times_X X'$ . Notons  $i: f^{-1}(x) \rightarrow Y'$  l'immersion de la fibre au-dessus de  $x$ ,  $g: f^{-1}(x) \rightarrow x$  la projection et  $j: Y' \rightarrow Y$  le morphisme canonique. D'après le corollaire 4.2.3, on a un isomorphisme canonique  $g^* \mathbf{R} \Gamma_x(K) \simeq i^! j^* f^* K$ . Définir des épingleages sur  $f^* K$  en les points de  $f^{-1}(x)$  revient à définir une structure de complexe dualisant putatif sur  $i^! j^* f^* K$  pour la fonction de dimension  $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$ . On vient de voir que cet objet s'identifie à  $g^* \mathbf{R} \Gamma_x(K)$  qui s'identifie lui-même à  $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$  en vertu de l'épingleage donné de  $K$  en  $x$ . La fibre  $f^{-1}(x)$  étant régulière, le faisceau constant  $\Lambda$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension  $-\text{codim}$  (cf. proposition 2.4.1.1). Vu la définition de  $\delta_Y$ , on en déduit aussitôt une structure de complexe dualisant potentiel sur  $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)] \in \mathbf{D}^+(f^{-1}(x)_{\text{ét}}, \Lambda)$  pour la fonction de dimension  $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$ . On a ainsi obtenu des épingleages pour  $f^* K$  en tous les points de  $f^{-1}(x)$ . Grâce à cette construction fibre à fibre, on a défini une structure de complexe dualisant putatif sur  $f^* K$ .

LEMME 4.3.1.2. Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents réguliers. On munit  $X$  et  $Y$  des fonctions de dimension  $\delta_X = -\text{codim}$  et



$\delta_Y = -\text{codim}$ . On munit les faisceaux constants  $\Lambda$  sur  $X$  et  $Y$  des structures de complexes dualisants putatifs définies dans la proposition 2.4.1.1; le lemme 4.3.1.1 munit  $f^*\Lambda$  d'une structure de complexe dualisant putatif sur  $Y$  pour la fonction de dimension  $\delta_Y$ . Alors, l'isomorphisme canonique  $\Lambda \simeq f^*\Lambda$  sur  $Y$  est compatible aux épingleages.

Vérifions la compatibilité de l'isomorphisme canonique  $\Lambda \simeq f^*\Lambda$  aux épingleages en un point  $y$  de  $Y$ . Quitte à localiser, on peut supposer que  $X$  est local de point fermé  $x = f(y)$  et que  $y$  est un point fermé dans la fibre  $F = f^{-1}(y)$ . Notons  $c = \text{codim}_X x$  et  $d = \text{codim}_F y$ . L'épingleage de  $f^*\Lambda$  en  $y$  est donné par le produit des classes  $f^*(Cl_{x \rightarrow X}) \in H_F^{2c}(Y, \Lambda(c))$  et  $Cl_{y \rightarrow F} \in H_y^{2d}(F, \Lambda(d))$ , ce produit trouvant demeure dans  $H_y^{2c+2d}(Y, \Lambda(c+d))$ . La compatibilité des classes de Gysin au changement de base implique que  $f^*(Cl_{x \rightarrow X})$  est la classe de Gysin  $Cl_{F \rightarrow Y} \in H_F^{2c}(Y, \Lambda(c))$ . En utilisant la compatibilité des classes de Gysin à la composition, le produit considéré plus haut est  $Cl_{y \rightarrow Y}$ , qui est précisément la classe qui définit l'épingleage de  $\Lambda$  en  $y$ .

REMARQUE 4.3.1.3. Supposons que l'on dispose de deux morphismes réguliers composables  $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$  entre  $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Si  $K$  est un complexe dualisant putatif sur  $X$ , alors appliquer la construction du lemme 4.3.1.1 à  $f$ , puis à  $g$ , revient à l'appliquer directement à  $f \circ g$ , autrement dit l'isomorphisme évident  $g^*f^*K \simeq (f \circ g)^*K$  dans  $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$  est compatible aux épingleages. En effet, les constructions s'effectuant fibre à fibre, on peut supposer que  $X$  est le spectre d'un corps et, quitte à modifier la fonction de dimension, que  $K = \Lambda$ ; en particulier,  $X, Y$  et  $Z$  sont réguliers, les faisceaux constants  $\Lambda$  sur  $X, Y$  et  $Z$  sont naturellement munis de structures de complexes dualisants putatifs (et même potentiels, cf. proposition 2.4.4.1) pour les fonctions de dimension considérées, la compatibilité requise est obtenue en appliquant le lemme 4.3.1.2 aux morphismes  $f, g$  et  $f \circ g$ .

4.3.2. *Compatibilité aux spécialisations.* Supposons maintenant que  $K$  soit un complexe dualisant potentiel. Par définition des complexes dualisants potentiels, il s'agit maintenant de montrer que les épingleages sur  $f^*K$  sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates. D'après le théorème 3.1.2, on peut donner un sens à cette compatibilité pour toute spécialisation  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$  de points géométriques de  $Y$ , quelle que soit sa codimension.

LEMME 4.3.2.1. *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel sur  $X$ . Soit  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$  une spécialisation de points géométriques de  $Y$  au-dessus d'une spécialisation  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$ . Si  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  est de codimension 0 ou 1, alors les épingleages sur  $f^*K$  sont compatibles à la spécialisation  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$ .*

Étant entendu que la construction de la structure de complexe dualisant putatif sur  $f^*K$  a été réalisée fibre à fibre, on peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien intègre, de point générique  $x'$  et de point fermé  $x$ . On peut supposer que  $\delta_X(x') = 0$ . Le schéma  $X$  étant de dimension  $\leq 1$ , si on note  $n: \tilde{X} \rightarrow X$  la normalisation de  $X$ , le schéma  $\tilde{X}$  est régulier. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{n'} & Y \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ \tilde{X} & \xrightarrow{n} & X \end{array}$$

Les morphismes  $n$  et  $n'$  sont finis surjectifs radiciels. Pour eux, on dispose des constructions  $n^!$  et  $n'^!$  sur les complexes dualisants putatifs (cf. proposition 2.4.3.1). Pour les morphismes réguliers  $f$  et  $\tilde{f}$ , on a les constructions  $f^*$  et  $\tilde{f}^*$ . On peut donc considérer les complexes dualisants putatifs  $\tilde{f}^*n^!K$  et  $n'^!f^*K$ . D'après le lemme 4.3.2.2 à suivre, on a un isomorphisme canonique de complexes dualisants putatifs  $\tilde{f}^*n^!K \simeq n'^!f^*K$ . En outre, la proposition 2.4.3.3 montre que pour montrer que  $f^*K$  est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que  $n'^!f^*K$  en est un. Comme il s'identifie  $\tilde{f}^*n^!K$  et que la proposition 2.4.3.3 nous dit aussi que  $n^!K$  est un complexe dualisant potentiel, on peut finalement remplacer  $f$  par  $\tilde{f}$  et supposer que  $X$  est régulier de dimension  $\leq 1$ . On peut alors supposer que  $K = \Lambda$ , épinglé comme il convient de le faire. Le complexe  $f^*\Lambda$  s'identifie à  $\Lambda$  dont on sait qu'il peut-être muni d'une structure de complexe dualisant potentiel (cf. proposition 2.4.4.1). Il s'agit de montrer que les épinglages sur  $f^*\Lambda$  et sur  $\Lambda$  sont compatibles : c'est le sens du lemme 4.3.1.2.

**LEMME 4.3.2.2.** *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit  $g: X' \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif radiciel. On constitue le carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

*Soit  $K$  un complexe dualisant putatif sur  $X$ . Alors, l'isomorphisme évident  $f'^*g^!K \simeq g'^!f^*K$  dans  $\mathbf{D}^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda)$  est compatible aux épinglages.*

Les constructions envisagées se réalisant fibre à fibre, on peut supposer que  $X$  et  $X'$  sont les spectres de corps notés respectivement  $E$  et  $E'$ . Les morphismes  $f$  et  $f'$  étant plats et à fibres géométriquement régulières, les schémas  $Y$  et  $Y'$  sont réguliers. Dans cette situation, compte tenu de la proposition 2.4.3.3 et de la construction du lemme 4.3.1.1, il est manifeste que les complexes dualisants putatifs  $f'^*g^!K$  et  $g'^!f^*K$  sont des complexes dualisants potentiels. Pour montrer que l'isomorphisme évident  $f'^*g^!K \simeq g'^!f^*K$  est compatible aux épinglages, il suffit donc de le faire aux points maximaux de  $Y'$ . Bref, on peut supposer que  $Y$  est lui aussi le spectre d'un corps  $F$ . Comme  $Y'$  est régulier et homéomorphe à  $Y$ , le schéma  $Y'$  est à son tour le spectre d'un corps  $F'$ . Compte tenu de la construction de la proposition 2.4.3.1 faisant intervenir les morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète  $Y' \rightarrow Y$  et  $X' \rightarrow X$ , la comparaison des deux structures de complexes dualisants putatifs envisagées sur  $Y'$  se ramène à l'égalité des degrés  $[F' : F] = [E' : E]$ , qui résulte aussitôt de la définition de  $Y' : F' = E' \otimes_E F$ .

Pour finir la démonstration de la proposition 4.1.1, il nous reste à établir des compatibilités entre les épinglages sur  $f^*K$  et les spécialisations de points géométriques de  $Y$ . Les lemmes suivants sur les spécialisations nous seront utiles.

**LEMME 4.3.2.3.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre schémas noethériens. On suppose que  $f$  est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens. Soit  $\bar{x} \rightarrow X$  un point géométrique de  $X$ . Alors,  $f^{-1}(\bar{x}) = Y_{\bar{x}} = Y \times_X \bar{x}$  est un schéma intègre.*

La fibre  $Y_{\bar{x}}$  est géométriquement régulière et géométriquement connexe d'après la proposition 4.2.1 appliquée à un faisceau constant. Le schéma  $Y_{\bar{x}}$  est donc intègre.

**LEMME 4.3.2.4.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre schémas noethériens excellents. Soit  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  une spécialisation de points géométriques de  $X$ . Soit  $\bar{\eta}$  un point géométrique de  $X$  au-dessus de  $\bar{x}$  tel que  $\eta$  soit de codimension 0 dans sa fibre pour  $f$ . Alors, à un isomorphisme non nécessairement unique près, il existe une unique spécialisation  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  au-dessus de  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  telle que  $\eta'$  soit de codimension 0 dans sa fibre. La codimension de  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  est la même que celle de  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ .*

On peut supposer que  $f$  est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens  $Y$  et  $X$  de points fermés respectifs  $\bar{\eta}$  et  $\bar{x}$ . Établir le lemme dans ce cas précis revient à montrer qu'à isomorphisme près, la fibre géométrique  $Y_{\bar{x}}$  n'a qu'un seul point géométrique au-dessus d'un point maximal de  $Y_{\bar{x}}$ , ce qui résulte du lemme 4.3.2.3. Les formules liant les fonctions de dimension sur  $X$  et  $Y$  montrent que la codimension de la spécialisation de  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  est la même que celle de  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ .

**LEMME 4.3.2.5.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre schémas noethériens excellents. Soit  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  une spécialisation de points géométriques de  $Y$  au-dessus d'une spécialisation  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ . On suppose que  $\eta$  et  $\eta'$  sont de codimension 0 dans leur fibre pour  $f$ . Soit  $\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n$  une factorisation de la spécialisation  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$  en une suite de spécialisations immédiates. Alors, on peut décomposer  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  en une suite de spécialisations immédiates  $\bar{\eta}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{\eta}_n$  au-dessus de  $\bar{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{x}_n$ , chacun des points  $\eta_i$  étant de codimension 0 dans sa fibre pour  $f$ .*

Ceci résulte aussitôt du lemme 4.3.2.4, propriété d'unicité comprise.

**LEMME 4.3.2.6.** *Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme régulier entre schémas noethériens excellents. Soit  $\bar{y}' \rightarrow \bar{y}$  une spécialisation de points géométriques de  $Y$  au-dessus de  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ . Alors, il existe un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de  $Y$  :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta}' & \longrightarrow & \bar{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{y}' & \longrightarrow & \bar{y} \end{array}$$

où les points géométriques  $\bar{\eta}'$  et  $\bar{\eta}$  sont respectivement au-dessus de  $\bar{x}'$  et de  $\bar{x}$ , et où  $\eta'$  et  $\eta$  sont de codimension 0 dans leur fibre pour  $f$ .

On peut supposer que  $X$  et  $Y$  sont locaux strictement henséliens de points fermés respectifs  $\bar{y}$  et  $\bar{x}$ . On choisit une spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow \bar{y}$  de points géométriques de la fibre  $Y_{\bar{x}}$  avec  $\eta$  de codimension 0 dans cette fibre. D'après le lemme 4.3.2.4, il existe une spécialisation  $\bar{\eta}' \rightarrow \bar{\eta}$  de points géométriques de  $Y$  au-dessus de  $\bar{x}' \rightarrow \bar{x}$ , avec  $\eta'$  de codimension 0 dans sa fibre pour  $f$ . Par ailleurs, la fibre géométrique  $Y_{\bar{x}'}$  étant intègre, on peut en choisir un point géométrique  $\bar{\eta}''$  au-dessus du point générique. Le point géométrique  $\bar{y}'$  de  $Y$  étant au-dessus de  $\bar{x}'$ , il définit un point géométrique de  $Y_{\bar{x}'}$ ; on dispose donc d'une spécialisation  $\bar{\eta}'' \rightarrow \bar{y}'$  de points géométriques au-dessus de  $\bar{x}'$ . La fibre géométrique  $Y_{\bar{x}'}$  étant intègre, il existe un isomorphisme  $\bar{\eta}' \simeq \bar{\eta}''$ , ce qui donne le diagramme commutatif souhaité.

**4.3.3. Fin de la démonstration.** Finissons la démonstration de la proposition 4.1.1, il s'agit de montrer que pour tout complexe dualisant potentiel  $K$  sur  $X$ , les épingleages sur le complexe dualisant putatif  $f^*K$  sont compatibles aux spécialisations de points géométriques de  $Y$ . Soit  $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$  une telle spécialisation. Le lemme 4.3.2.6 s'applique et on obtient un diagramme commutatif de spécialisations comme ci-dessus. Pour montrer la compatibilité pour la spécialisation  $\overline{y'} \rightarrow \overline{y}$ , il suffit de l'obtenir pour les trois autres spécialisations qui interviennent dans le carré commutatif. Pour les spécialisations  $\overline{\eta'} \rightarrow \overline{y'}$  et  $\overline{\eta} \rightarrow \overline{y}$ , cela résulte aussitôt des faits observés dans la construction même du lemme 4.3.1.1, à savoir que chaque fibre de  $f$  est munie d'un complexe dualisant potentiel. On peut appliquer le lemme 4.3.2.5 pour obtenir une factorisation de  $\overline{\eta'} \rightarrow \overline{\eta}$  en une suite de spécialisations immédiates  $\overline{\eta}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{\eta}_n$  au-dessus d'une composition de spécialisations immédiates  $\overline{x}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{x}_n$  de points géométriques de  $X$ . On peut appliquer le lemme 4.3.2.1 aux spécialisations  $\overline{\eta}_i \rightarrow \overline{\eta_{i+1}}$  pour obtenir la compatibilité souhaitée pour  $\overline{\eta'} \rightarrow \overline{\eta}$ , ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.1.

#### 4.4. Démonstration de la proposition 4.1.2.

**LEMME 4.4.1.** *Dans la situation de la proposition 4.1.2, si  $K$  est un complexe dualisant putatif sur  $X$ , on peut munir  $f^!K$  d'une structure de complexe dualisant putatif sur  $Y$ .*

Définir la structure de complexe dualisant putatif sur  $f^!K$  peut se faire fibre à fibre. On suppose donc que  $X = x$  est le spectre d'un corps. Soit  $y \in Y$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de régularité de l'adhérence (réduite)  $\overline{\{y\}}$ . On note  $j: U \rightarrow Y$  l'immersion de  $U$  dans  $Y$  et  $\pi: U \rightarrow x$  la projection. On a des isomorphismes canoniques induits par le morphisme de Gysin  $Cl_\pi$  et l'épinglage de  $K$  en  $x$  :

$$\Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)] \xrightarrow{\sim} \pi^! \Lambda(\delta_x(x))[2\delta_x(x)] \xleftarrow{\sim} \pi^! R\Gamma_x(K) \simeq j^! f^! K .$$

En passant au point générique de  $U$ , on obtient l'isomorphisme voulu :  $R\Gamma_y(f^!K) \simeq \Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)]$ . Il ne dépend évidemment pas de l'ouvert  $U$ , ce qui permet de définir l'épinglage souhaité de  $f^!K$  en  $y$ .

On peut vérifier que la construction de cette structure de complexe dualisant putatif sur  $f^!K$  est compatible à la composition des morphismes de type fini (pour le sens de cette affirmation, cf. remarque 4.1.3). Par ailleurs, il est évident que dans le cas où  $f$  est quasi-fini, les épingleages définis ici sont les mêmes que ceux de la proposition 2.4.3.1. Enfin, dans le cas où  $f$  est lisse de dimension relative  $d$ , *via* l'isomorphisme canonique  $f^*K \simeq f^!K(d)[2d]$ , les épingleages sont compatibles avec ceux de la proposition 4.1.1, compte tenu du décalage entre les deux fonctions de dimension envisagées sur  $Y$ .

Montrons la proposition 4.1.2. La question étant de nature locale, on peut supposer que  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme de type fini entre schémas affines. Il existe donc une factorisation  $f = p \circ i$  avec  $i$  une immersion fermée et  $p$  un morphisme lisse. Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel sur  $X$ . Les remarques précédentes montrent que  $p^!K$ , puis  $i^!p^!K$  sont des complexes dualisants potentiels et que ce dernier s'identifie à  $f^!K$ . Par conséquent,  $f^!K$  est un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

## 5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels

**5.1. Énoncé du théorème.** L'objectif de cette section est d'établir le théorème suivant :

**THÉORÈME 5.1.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Alors  $(X, \delta)$  admet un complexe dualisant potentiel  $K_X$ , unique à isomorphisme unique près, et le morphisme évident  $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(K_X, K_X)$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . De plus,  $K_X \in \text{Perv}^{-2\delta}(X, \Lambda)$  (cf. sous-section 5.2).*

**5.2. Préliminaires sur les faisceaux pervers.** Si  $X$  est un schéma noethérien et  $p: X \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$  une fonction de perversité (c'est-à-dire que pour toute spécialisation  $\bar{y} \rightarrow \bar{x}$  de points géométriques de  $X$ , on a  $p(x) \geq p(y)$ ), Gabber a défini dans [Gabber, 2004] une t-structure  $(\mathbf{D}^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda), \mathbf{D}^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda))$  sur  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  de sorte que pour tout  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on ait :

$$K \in \mathbf{D}^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, K|_x \in \mathbf{D}^{\leq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda),$$

$$K \in \mathbf{D}^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, \mathbf{R}\Gamma_x(K) \in \mathbf{D}^{\geq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda),$$

où l'on a muni chacune des catégories  $\mathbf{D}^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$  de sa t-structure canonique.

On note  $\text{Perv}^p(X, \Lambda) \subset \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  le cœur de cette t-structure, les foncteurs de troncatures étant notés  $\tau_{\leq p}$  et  $\tau_{\geq p}$ .

**DÉFINITION 5.2.1.** Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme de schémas. On dit que  $f$  est une pseudo-immersion ouverte si  $f$  induit un homéomorphisme sur son image et que le morphisme induit  $f^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$  est un isomorphisme.

Cette classe de morphismes est stable par composition ; elle contient les immersions ouvertes et les localisations.

**PROPOSITION 5.2.2.** *Soit  $p: X \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$  une fonction de perversité. Soit  $f: Y \rightarrow X$  une pseudo-immersion ouverte.*

- La fonction  $p \circ f: Y \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$  est une fonction de perversité (encore notée  $p$ ) et pour les t-structures définies par  $p$ ,  $f^*: \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$  est t-exact et  $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  t-exact à gauche ;*
- Le foncteur  $f^*$  induit un foncteur exact  $f^*: \text{Perv}^p(X, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(Y, \Lambda)$  qui admet un adjoint à droite  $f_*^p: \text{Perv}^p(Y, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(X, \Lambda)$  défini par la formule  $f_*^p K = \tau_{\leq p} \mathbf{R}f_* K$  ;*
- Le morphisme d'adjonction  $f^* f_*^p \rightarrow \text{Id}_{\text{Perv}^p(Y, \Lambda)}$  est un isomorphisme et le foncteur  $f_*^p: \text{Perv}^p(Y, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^p(X, \Lambda)$  est pleinement fidèle.*
- Si  $g: Z \rightarrow Y$  est une pseudo-immersion ouverte composable avec  $f$ , on dispose d'un isomorphisme de transitivité  $f_*^p \circ g_*^p \simeq (f \circ g)_*^p$ .*

La t-exactitude de  $f^*$  est triviale. En particulier,  $f^*$  est t-exact à droite ; par adjonction,  $\mathbf{R}f_*$  est t-exact à gauche. (b) résulte aussitôt de (a). (c) en résulte aussi compte tenu du fait que le morphisme d'adjonction  $f^* \mathbf{R}f_* \rightarrow \text{Id}_{\text{Perv}^p(X, \Lambda)}$  est un isomorphisme. L'isomorphisme du (d) se déduit par adjonction de l'isomorphisme de transitivité des foncteurs images inverses.

### 5.3. Cas d'un schéma normal.

**PROPOSITION 5.3.1.** *L'énoncé du théorème 5.1.1 est vrai si on suppose de plus que le schéma  $X$  est normal. Plus précisément, soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent irréductible normal de point générique  $\eta$ , muni d'une fonction de dimension  $\delta$  telle que*

$\delta(\eta) = 0$ . On note  $j: \eta \rightarrow X$  l'inclusion du point générique et on pose  $T = j_* \Lambda$  où  $\varphi: X \rightarrow \mathbf{N}$  est la fonction de perversité définie par l'égalité :

$$\varphi(x) = \max(0, 2 \dim \mathcal{O}_{X,x} - 2)$$

pour tout  $x \in X$ .

- (a) Le morphisme d'adjonction  $\Lambda \rightarrow j_* j^* \Lambda$  définit un morphisme évident  $\Lambda \rightarrow T$  tel que pour tout point géométrique  $\bar{x} \rightarrow X$ , l'application induite

$$H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(\Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(T)$$

soit un isomorphisme et que  $H_{\bar{x}}^q(T) = 0$  si  $q \neq -2\delta(x)$ . Le théorème 3.1.1 donne alors un épinglage de  $T$  en  $x$ . Avec ces épinglages,  $T$  est un complexe dualisant potentiel pour  $(X, \delta)$ .

- (b) Si  $K$  est un complexe dualisant potentiel pour  $(X, \delta)$ , alors  $K$  appartient à  $\text{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$  (et à  $\text{Perv}^{-2\delta}(X, \Lambda)$ ) et le morphisme  $K \rightarrow T$  qui s'en déduit aussitôt est un isomorphisme compatible aux épinglages.
- (c) Si  $K$  est un complexe dualisant potentiel sur  $X$ , alors le morphisme évident  $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} \mathbf{R} \mathbf{Hom}(K, K)$  est un isomorphisme.

Établissons (a). Le point essentiel est de montrer que pour tout  $x \in X$ , le morphisme évident  $H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(\Lambda) \rightarrow H_{\bar{x}}^{-2\delta(x)}(T)$  est un isomorphisme et que  $H_{\bar{x}}^q(T)$  est nul si  $q \neq -2\delta(x)$ . Le fait que  $T$  soit un complexe dualisant potentiel résultera alors aussitôt du théorème 3.1.1. Pour établir le résultat voulu, on peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien de point fermé  $x$ . Par récurrence sur  $d = \dim X$ , on peut supposer (a) connu sur l'ouvert  $U = X - x$ . Si  $d = 0$ , le résultat est évident. On suppose donc  $d \geq 1$ , de sorte que  $U$  contienne le point générique de  $X$ . Posons  $L = T|_U$ . D'après la proposition 5.2.2, si on note  $g: U \rightarrow X$  l'immersion ouverte évidente, on a un isomorphisme canonique  $T = g_* L$ . On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique  $T = \tau_{\leq \varphi(x)} \mathbf{R} g_* L$ .

Si  $d = 1$ ,  $\varphi(\eta) = 0$ , donc  $T = g_* \Lambda = \Lambda$ . La proposition 2.4.2.1 permet de conclure que  $T$  est bien un complexe dualisant potentiel avec les épinglages envisagés ici. On suppose donc que  $d \geq 2$ . Dans ce cas, on a  $\varphi(x) = 2d - 2$  et  $T = \tau_{\leq 2d-2} \mathbf{R} g_* L$ .

D'après le lemme 3.6.4, la structure des objets de cohomologie  $\mathcal{H}^q L$  pour  $q \leq 0$  est connue. Notons  $i: x \rightarrow X$  l'immersion du point fermé de  $X$ . Utilisons le triangle distingué canonique :

$$i_* i^! T \rightarrow T \rightarrow \mathbf{R} g_* L \rightarrow i_* i^! T[1].$$

Il en résulte une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U, L) \rightarrow H_x^q(X, T) \rightarrow (\mathcal{H}^q T)_x \rightarrow H^q(U, L) \rightarrow \dots$$

Par construction,  $(\mathcal{H}^q T)_x \xrightarrow{\sim} H^q(U, L)$  si  $q \leq 2d - 2$  et  $(\mathcal{H}^q T)_x = 0$  si  $q \geq 2d - 1$ . Il en résulte que  $H_x^q(X, T) = 0$  si  $q \leq 2d - 1$  et que l'on a des isomorphismes  $H^{q-1}(U, L) \xrightarrow{\sim} H_x^q(X, T)$  pour  $q \geq 2d$ . Il vient aussi que  $\mathcal{H}^q T = 0$  si  $q < 0$  et que l'on a un isomorphisme canonique  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 T$ . Ainsi, on a un morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow T$  induisant un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} T$ .

**LEMME 5.3.2.** Soit  $U$  le complémentaire du point fermé dans un schéma local strictement hensélien excellent normal  $X$  de dimension  $d \geq 2$ . Soit  $M \in \mathbf{D}^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On

suppose qu'il existe un isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}M$ . Alors, pour tout  $q \geq 2d$ , le morphisme évident est un isomorphisme :

$$H^{q-1}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{q-1}(U, M) .$$

On note  $M^+$  un cône du morphisme évident  $\Lambda \rightarrow M$ . Il suffit de montrer que  $H^q(U, M^+) = 0$  pour  $q \geq 2d - 2$ . Les hypothèses impliquent que les objets de cohomologie de  $M^+$  sont nuls en dehors de l'intervalle  $[1, 2d - 4]$ . On peut aussi observer que pour tout  $1 \leq i \leq d - 2$ , si  $y \in U$  est tel que  $(\mathcal{H}^{2i-1}M^+)_{\bar{y}}$  ou  $(\mathcal{H}^{2i}M^+)_{\bar{y}}$  soit non nul, alors l'adhérence (dans  $X$ ) de  $y$  est de dimension  $\leq d - i - 1$ . D'après la proposition 3.2.1 et la suite spectrale d'hypercohomologie, on obtient bien que  $H^q(U, M^+) = 0$  si  $q \geq 2d - 2$ .

On peut appliquer le lemme 5.3.2 avec  $M = L$ . Il résulte alors de ce qui précède et du théorème 3.1.1 que  $H_x^q(X, T) = 0$  si  $q \neq 2d$ , que l'on a un isomorphisme canonique  $H_x^{2d}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H_x^{2d}(X, T(d))$ , et que l'on peut ainsi définir des épingleages sur  $T$  qui en font un complexe dualisant potentiel sur  $X$ .

Montrons maintenant (b). Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel sur  $X$ . Il est évident que  $K \in \mathbf{D}^{\geq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset \mathbf{D}^{\geq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Pour montrer que  $K \in \mathbf{D}^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset \mathbf{D}^{\leq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien de dimension  $d$ . On note  $i: x \rightarrow X$  l'inclusion du point fermé et  $g: U \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert complémentaire  $X - x$ . Le cas où  $d = 0$  étant trivial et celui où  $d = 1$  ayant été traité dans la proposition 2.4.2.1, on peut supposer que  $d \geq 2$ . Par récurrence sur  $d$ , on peut supposer (b) connu pour l'ouvert  $U$ . On note  $L = K|_U \in \mathbf{D}^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Comme  $K$  est un complexe dualisant potentiel, la structure des faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^q K$  pour  $q \leq 0$  est connue (cf. lemme 3.6.4). On peut donc appliquer le lemme 5.3.2 avec  $M = L$ . Ainsi, le morphisme évident est un isomorphisme  $H^{2d-1}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{2d-1}(U, L)$ , et  $H^q(U, L) = 0$  pour  $q \geq 2d$ .

De même que pour établir (a), on utilise le triangle distingué canonique :

$$i_* i^! T \rightarrow T \rightarrow \text{R}g_* L \rightarrow i_* i^! T[1] ,$$

et la suite exacte longue qui s'en déduit :

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U, L) \rightarrow H_x^q(X, K) \rightarrow (\mathcal{H}^q K)_x \rightarrow H^q(U, L) \rightarrow \dots$$

La structure de  $H_x^q(X, K)$  étant connue pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ , il vient aussitôt que  $(\mathcal{H}^q K)_x = 0$  pour  $q \geq 2d + 1$  et que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{H}^{2d-1} K)_x \rightarrow H^{2d-1}(U, L) \rightarrow H_x^{2d}(X, K) \rightarrow (\mathcal{H}^{2d} K)_x \rightarrow 0 .$$

Pour montrer que  $K \in \mathbf{D}^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , il reste donc à montrer que le morphisme canonique  $H^{2d-1}(U, L) \rightarrow H_x^{2d}(X, K)$  est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow x$ . On peut considérer le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow K$  :

$$\begin{array}{ccccc} H_{\bar{\eta}}^0(X, \Lambda) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_x^{2d}(X, \Lambda(d)) & \xleftarrow{\sim} & H^{2d-1}(U, \Lambda(d)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ H_{\bar{\eta}}^0(X, K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^X} & H_x^{2d}(X, K(d)) & \xleftarrow{\sim} & H^{2d-1}(U, L(d)) \end{array}$$

Les flèches de la colonne de gauche vers celle du milieu sont les morphismes de transition introduits au théorème 3.1.2. Ici, ce sont des isomorphismes : pour la flèche du haut, cela résulte du théorème 3.1.1 et pour la flèche du bas, du fait que  $K$  soit un complexe dualisant potentiel. On en déduit que le morphisme du milieu  $H_x^{2d}(X, \Lambda(d)) \rightarrow H_x^{2d}(X, K(d))$  est un isomorphisme. Compte tenu des autres isomorphismes connus, il vient que le morphisme évident  $H^{2d-1}(U, L(d)) \rightarrow H_x^{2d}(X, K(d))$  est un isomorphisme, ce qui achève de montrer que  $K \in \text{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$ .

On a alors un morphisme d'adjonction  $K \rightarrow j_*^\varphi j^* K = T$  dans  $\text{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$ . Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut se placer dans la situation locale précédente, et faire une récurrence sur la dimension pour pouvoir supposer que le morphisme induit  $K|_U \rightarrow T|_U$  est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation  $\bar{\eta} \rightarrow x$ . On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{\eta}}^0(X, K) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^\chi} & H_x^{2d}(X, K(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\bar{\eta}}^0(X, T) & \xrightarrow{\text{sp}_{\bar{\eta} \rightarrow x}^\chi} & H_x^{2d}(X, T(d)) \end{array}$$

La flèche de gauche est évidemment un isomorphisme. Les flèches horizontales aussi puisque  $K$  et  $T$  sont des complexes dualisants potentiels. Il vient donc que le morphisme induit  $i^! K \rightarrow i^! T$  est un isomorphisme. Il en découle que  $K \rightarrow T$  est un isomorphisme (compatible aux épingleages au point générique, donc à tous les épingleages), ce qui achève la démonstration de (b).

Montrons (c). Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel sur  $X$ . Pour montrer que le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow \tau_{\leq 0} \mathbf{R} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}(K, K)$  est un isomorphisme, quitte à remplacer  $X$  par des schémas connexes étales sur lui, il suffit de montrer que  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}_{\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K)$  et que  $\mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}_{\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K[q]) = 0$  pour  $q < 0$ . L'annulation de  $\mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}_{\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K[q])$  pour  $q < 0$  résulte aussitôt du fait que  $K$  appartienne au cœur de la  $t$ -structure définie par  $\varphi$ . D'après (b), on a un isomorphisme canonique  $K = j_*^\varphi \Lambda$ . L'isomorphisme  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{H} \mathbf{o} \mathbf{m}_{\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)}(K, K)$  résulte alors de ce que  $j_*^\varphi : \text{Perv}^\varphi(\eta, \Lambda) \rightarrow \text{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$  soit pleinement fidèle (cf. proposition 5.2.2).

**5.4. Un résultat de recollement.** La proposition suivante est un résultat de recollement qui nous permettra de passer du cas normal au cas général :

**PROPOSITION 5.4.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . On suppose donné un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où  $i$  est une immersion fermée d'ouvert complémentaire  $U$  et où  $p$  est un morphisme fini induisant un isomorphisme  $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ . On note  $q = p \circ i'$ . On suppose que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour  $X', Y$  et  $Y'$  (relativement aux fonctions de dimensions déduites de celle sur  $X$  par le procédé de la proposition 2.4.3.1). Alors, cet énoncé est également vrai pour  $X$ , et si on note  $K_X, K_{X'}, K_Y$  et  $K_{Y'}$  les complexes dualisants potentiels de  $X, X', Y$  et  $Y'$  respectivement, on a un triangle distingué canonique dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$q_* K_{Y'} \rightarrow i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \rightarrow K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1].$$



Dans un premier temps, supposons que  $X$  admette un complexe dualisant potentiel  $K_X$  et montrons que l'on peut définir un triangle distingué canonique de la forme souhaitée. Pour cela, considérons la suite exacte courte évidente de faisceaux sur  $X$  :

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(+,+)} i_* \Lambda \oplus p_* \Lambda \xrightarrow{(+,-)} q_* \Lambda \rightarrow 0.$$

En appliquant  $R\mathbf{Hom}(-, K_X)$  au triangle distingué correspondant, on obtient un triangle distingué :

$$q_* q^! K_X \xrightarrow{(+,-)} i_* i^! K_X \oplus p_* p^! K_X \xrightarrow{(+,+)} K_X \rightarrow q_* q^! K_X[1],$$

qui, compte tenu de la proposition 4.1.2 et de la vertu d'unicité des complexes dualisants potentiels sur  $X'$ ,  $Y$  et  $Y'$ , se réécrit sous la forme :

$$q_* K_{Y'} \xrightarrow{(+,-)} i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \xrightarrow{(+,+)} K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1].$$

Revenant aux hypothèses de la proposition, nous allons montrer qu'inversement, si on définit  $K_X$  de façon à avoir un tel triangle distingué (mais *a priori* pas de façon canonique), on obtient bien un complexe dualisant potentiel sur  $X$ . On suppose donc le théorème 5.1.1 connu seulement pour  $X'$ ,  $Y$  et  $Y'$  et on note  $K_{X'}$ ,  $K_Y$  et  $K_{Y'}$  les complexes dualisants potentiels correspondants. La propriété d'unicité pour les complexes dualisants potentiels sur  $Y'$  donne des isomorphismes canoniques  $K_{Y'} \simeq p^! K_Y$  et  $K_{Y'} \simeq i^! K_{X'}$ . Par adjonction, on en déduit des morphismes canoniques  $p_* K_{Y'} \rightarrow K_Y$  et  $i_* K_{Y'} \rightarrow K_{X'}$ , puis en appliquant respectivement  $i_*$  et  $p_*$ , on obtient des morphismes canoniques  $q_* K_{Y'} \rightarrow i_* K_Y$  et  $q_* K_{Y'} \rightarrow p_* K_{X'}$ . On peut considérer leur différence et constituer un triangle distingué dans  $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$q_* K_{Y'} \xrightarrow{(+,-)} i_* K_Y \oplus p_* K_{X'} \rightarrow K_X \rightarrow q_* K_{Y'}[1].$$

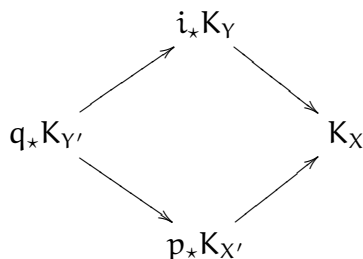
On obtient ainsi un objet  $K_X \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et deux morphismes privilégiés  $i_* K_Y \rightarrow K_X$  et  $p_* K_{X'} \rightarrow K_X$ .

Notons  $j: U \rightarrow X$  et  $j': U \rightarrow X'$  les immersions ouvertes évidentes. En appliquant  $j^*$  au triangle distingué ci-dessus, on peut commencer par observer que le morphisme évident  $j'^* K_{X'} \simeq j^* p_* K_{X'} \rightarrow j^* K_X$  est un isomorphisme. Par conséquent, on peut munir  $K_X$  d'épinglages en les points de l'ouvert  $U$  de façon compatible avec la structure de complexe dualisant potentiel obtenue sur  $j'^* K_{X'}$ .

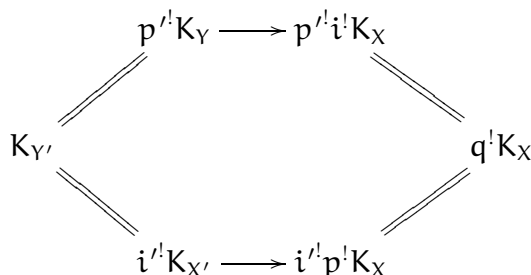
Considérons le morphisme canonique  $q_* K_{Y'} \rightarrow p_* K_{X'}$ . J'affirme qu'il induit un isomorphisme après application du foncteur  $i^!$ . En effet, on a des isomorphismes évidents de foncteurs  $i^! q_* i^! \simeq i^! i_* p^! i^* \simeq p^! i^* \simeq i^! p_*$  et, compte tenu de l'isomorphisme canonique  $K_{Y'} \simeq i^! K_{X'}$ , on obtient bien que le morphisme évident  $i^! q_* K_{Y'} \rightarrow i^! p_* K_{X'}$  est un isomorphisme. En appliquant  $i^!$  au triangle distingué de définition de  $K_X$ , il vient alors que le morphisme canonique  $i_* K_Y \rightarrow K_X$  induit un isomorphisme  $K_Y \xrightarrow{\sim} i^! K_X$  après application de  $i^!$ . Ceci permet de définir des épinglages pour  $K_X$  en tous les points de  $Y$ .

Finalement, on a obtenu une structure de complexe dualisant putatif sur  $K_X$ . D'après la proposition 2.4.3.3, pour montrer que  $K_X$  est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que  $p^! K_X$  en est un. Nous allons bien évidemment le

comparer à  $K_{X'}$ . Par construction de  $K_X$ , on a un diagramme commutatif :



Par adjonction, on obtient que deux définitions concurrentes d'un morphisme  $K_{Y'} \rightarrow q^! K_X$  coïncident :



On a déjà montré que le morphisme canonique  $K_Y \rightarrow i^! K_X$  était un isomorphisme. Par conséquent, sur le diagramme ci-dessus, toutes les flèches sont des isomorphismes. Ainsi, le morphisme évident  $K_{X'} \rightarrow p^! K_X$  induit un isomorphisme non seulement après application de  $j^*$ , mais aussi après celle de  $i^!$ . Il en résulte que ce morphisme  $K_{X'} \rightarrow p^! K_X$  est un isomorphisme. En outre, sur le diagramme ci-dessus, tous les objets sont naturellement munis d'une structure de complexe dualisant putatif et tous les isomorphismes, sauf peut-être celui du bas, sont compatibles aux épinglages. Cet isomorphisme  $i'^! K_{X'} \rightarrow i'^! p^! K_X$  est donc lui aussi compatible aux épinglages. Par conséquent, l'isomorphisme  $K_{X'} \xrightarrow{\sim} p^! K_X$  est compatible aux épinglages non seulement sur  $U$  mais aussi sur  $Y'$ . Il en résulte que  $p^! K_X$  est un complexe dualisant potentiel, et on a vu que l'on pouvait en conclure que  $K_X$  en était un aussi.

En outre, il résulte aussitôt de la construction que l'hypothèse selon laquelle les complexes dualisants potentiels sur  $X'$ ,  $Y$  et  $Y'$  sont pervers pour la fonction de perversité  $-2\delta$  que  $K_X$  est aussi pervers pour  $-2\delta$ .

Pour conclure, il s'agit de montrer que si  $K$  et  $L$  deux complexes dualisants potentiels sur  $X$ , on a un isomorphisme privilégié  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} R \mathbf{Hom}(K, L)$  qui donne naissance à un morphisme  $\psi: K \rightarrow L$  qui soit un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. En effet, cela montrera que si  $\phi: K \rightarrow L$  est un autre isomorphisme, alors  $\phi = \lambda \cdot \psi$  où  $\lambda: X \rightarrow \Lambda^\times$  est une fonction localement constante. Demander que  $\phi$  soit compatible aux épinglages impliquant que  $\lambda = 1$ , on aura bien un unique isomorphisme  $K \xrightarrow{\sim} L$  de complexes dualisants potentiels.

D'après la propriété d'unicité des complexes dualisants potentiels sur  $X'$ ,  $Y$  et  $Y'$ , on a des isomorphismes de complexes dualisants potentiels  $p^! K \xrightarrow{\sim} p^! L$  et  $i^! K \xrightarrow{\sim} i^! L$  induisant le même isomorphisme  $q^! K \xrightarrow{\sim} q^! L_Y$ . On a construit plus haut un triangle distingué canonique :

$$q_* q^* K \xrightarrow{(+,-)} i_* i^! K \oplus p_* p^! K \xrightarrow{(+,+)} K \rightarrow q_* q^* K[1].$$

En lui appliquant  $R\mathbf{Hom}(-, L)$ , on obtient un autre triangle distingué :

$$R\mathbf{Hom}(K, L) \xrightarrow{(+,+)} i_*R\mathbf{Hom}(i^!K, i^!L) \oplus p_*R\mathbf{Hom}(p^!K, p^!L) \xrightarrow{(+,-)} q_*R\mathbf{Hom}(q^!K, q^!L) \xrightarrow{+}$$

L'énoncé du théorème 5.1.1 pour  $X', Y$  et  $Y'$  implique aussitôt que les objets de cohomologie  $\mathcal{H}^q R\mathbf{Hom}(K, L)$  sont nuls pour  $q < 0$ , et, compte tenu de la suite exacte canonique de faisceaux :

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{(+,+)} i_*\Lambda \oplus p_*\Lambda \xrightarrow{(+,-)} q_*\Lambda \rightarrow 0,$$

que l'on a un isomorphisme privilégié  $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 R\mathbf{Hom}(K, L)$ . Le morphisme  $K \rightarrow L$  correspondant induit bien entendu les uniques isomorphismes de complexes dualisants potentiels  $i^!K \xrightarrow{\sim} i^!L$  et  $p^!K \xrightarrow{\sim} p^!L$ . Ce morphisme  $K \rightarrow L$  est donc compatible aux épingleages sur  $Y$  et sur  $U$  : c'est un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.1.

**5.5. Cas général.** Montrons le théorème 5.1.1 dans le cas général. Pour le montrer pour tous les  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension, par récurrence noethérienne, on peut supposer le résultat connu pour les schémas finis sur un fermé d'intérieur vide de  $X$ . On peut supposer que  $X$  est réduit. Notons  $p: X' \rightarrow X$  la normalisation de  $X$ . Le morphisme  $p$  est fini surjectif et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense de normalité  $U$  du schéma excellent  $X$ . Posons  $Y = (X - U)_{\text{réd}}$  et formons le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Comme  $X'$  est normal, la proposition 5.3.1 montre que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour  $X'$ . L'hypothèse de récurrence noethérienne montre que c'est aussi le cas pour  $Y$  et  $Y'$ . La proposition 5.4.1 donne la conclusion souhaitée pour  $X$ .

## 6. Le théorème de dualité locale

### 6.1. Énoncé du théorème.

**THÉORÈME 6.1.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Soit  $K$  le complexe dualisant potentiel de  $(X, \delta)$ . Alors*

- $K \in D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  ;
- $K$  est de dimension quasi-injective finie si et seulement si  $X$  est de dimension de Krull finie ;
- le foncteur  $D_K = R\mathbf{Hom}(-, K)$  préserve  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  ;
- pour tout  $M \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , le morphisme de bidualité  $M \rightarrow D_K D_K M$  est un isomorphisme.

En particulier, si  $X$  est de dimension de Krull finie,  $K$  est un complexe dualisant au sens de [SGA 5 I 1.7].

### 6.2. Constructibilité, tor-dimension, dimension quasi-injective.

### 6.2.1. Changement de coefficients.

**PROPOSITION 6.2.1.1.** *Soit  $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Soit  $m$  un diviseur de  $n$ . Soit  $\Lambda' = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ . L'anneau  $\Lambda'$  est une  $\Lambda$ -algèbre. Soit  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  un complexe dualisant potentiel sur  $X$  relativement à l'anneau de coefficients  $\Lambda$ . Alors  $K' = \mathbf{R}\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\Lambda', K) \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$  est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients  $\Lambda'$ . De plus, si  $M \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$ , on a un isomorphisme canonique dans  $\mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  :*

$$\mathbf{R}\mathbf{Hom}_{\Lambda}(M, K) \simeq \mathbf{R}\mathbf{Hom}_{\Lambda'}(M, K').$$

Ceci résulte facilement de la commutation des foncteurs de cohomologie à supports avec le foncteur  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\Lambda', -)$ .

### 6.2.2. Constructibilité, tor-finitude.

**PROPOSITION 6.2.2.1.** *Soit  $K$  un complexe dualisant potentiel sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Alors  $K \in \mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

On va utiliser le lemme suivant :

**LEMME 6.2.2.2.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent. Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée. Soit  $j: U \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire. Soit  $K \in \mathbf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $K \in \mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  ;
- $j^*K \in \mathbf{D}_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $i^!K \in \mathbf{D}_{\text{c}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Ce lemme résulte aussitôt du fait non trivial que le foncteur  $\mathbf{R}j_*$  envoie  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , cf. **XIII-1.1.1**.

Démontrons la proposition. On peut supposer  $X$  réduit. Comme  $X$  est excellent,  $X$  admet un ouvert dense régulier. Notons  $Z$  le sous-schéma fermé  $(X - U)_{\text{réd}}$  et  $i: Z \rightarrow X$  son immersion fermée dans  $X$ . Par récurrence noethérienne, on peut supposer que le complexe dualisant potentiel  $i^!K$  de  $Z$  est dans  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ . En vertu du lemme, on est ramené à montrer que  $j^*K \in \mathbf{D}_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Autrement dit, on peut supposer que  $X$  est régulier. On peut supposer de plus que  $X$  est connexe. Notons  $\eta$  le point générique de  $X$ . D'après la proposition **2.4.4.1** et le théorème **5.1.1**, on a un isomorphisme canonique  $K \simeq \Lambda(\delta(\eta))[2\delta(\eta)]$ . Ainsi,  $K$  appartient bien à  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , ce qui achève la démonstration de la proposition.

**PROPOSITION 6.2.2.3.** *Soit  $X$  un schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Le complexe dualisant potentiel de  $(X, \delta)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

On sait déjà que le complexe dualisant potentiel  $K$  de  $(X, \delta)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Il s'agit donc d'obtenir un résultat de tor-finitude pour  $K$ . Pour cela, on peut supposer que  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier et  $v \geq 1$ . D'après la proposition **6.2.1.1**,  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$  est un complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  ; d'après la proposition **6.2.2.1**, cet objet appartient à  $\mathbf{D}_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ , le critère du lemme suivant permet de conclure que  $K$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

**LEMME 6.2.2.4.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\ell$  un nombre premier. Soit  $v \geq 1$ . On pose  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$ . Soit  $K \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $K \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  ;
- (ii)  $K \otimes_{\Lambda}^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  ;

(iii)  $\mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \in \mathbf{D}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ .

Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique  $\mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \simeq \mathbf{K} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{D}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ .

L'équivalence entre (i) et (ii) est simplement indiquée pour mémoire. Il s'agit ici de montrer que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. On représente  $\mathbf{K}$  par un complexe borné. On peut considérer le complexe complexe double dont les colonnes sont représentées ci-dessous (les degrés horizontaux étant indiqués en exposant) :

$$\dots \xrightarrow{\ell^{v-1}} \overset{-1}{\mathbf{K}} \xrightarrow{\ell} \overset{0}{\mathbf{K}} \xrightarrow{\ell^{v-1}} \overset{1}{\mathbf{K}} \xrightarrow{\ell} \overset{2}{\mathbf{K}} \xrightarrow{\ell^{v-1}} \dots$$

On note  $\mathbf{C}$  le complexe simple de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X$  associé à ce complexe double <sup>iv</sup>. De façon évidente, on a un triangle distingué dans  $\mathbf{D}(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$  :

$$\mathbf{C} \xrightarrow{p} \mathbf{K} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \xrightarrow{i} \mathbf{C}[1].$$

On remarque que :

- $\mathcal{H}^q \mathbf{C} \simeq \mathcal{H}^{q+2} \mathbf{C}$  pour tout  $q \in \mathbf{Z}$  ;
- $p$  induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie  $\mathcal{H}^q$  pour  $q$  suffisamment petit ;
- $i$  induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie  $\mathcal{H}^q$  pour  $q$  suffisamment grand.

Comme  $\mathbf{K} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \mathbf{D}^-(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  et  $\mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \in \mathbf{D}^+(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ , il en résulte aussitôt que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathbf{C} \simeq 0$  ;
- $\mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \in \mathbf{D}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$  ;
- $\mathbf{K} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \mathbf{D}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Si on suppose que  $\mathbf{K} \in \mathbf{D}_{\text{cft}}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ , pour obtenir l'isomorphisme  $\mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K}) \simeq \mathbf{K} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{D}^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ , on peut représenter  $\mathbf{K}$  par un complexe borné de  $\Lambda$ -modules plats. On peut conclure en utilisant l'isomorphisme évident  $\mathbf{K}/\ell\mathbf{K} \xrightarrow{\sim} \ell\mathbf{K}$  induit par la multiplication par  $\ell^{v-1}$ , où  $\ell\mathbf{K}$  désigne le noyau de la multiplication par  $\ell$  sur  $\mathbf{K}$ . En effet, on montre facilement que pour tout complexe borné de  $\Lambda$ -modules plats le morphisme évident  $\ell\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, \mathbf{K})$  est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ .

### 6.2.3. Préservation de $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

**PROPOSITION 6.2.3.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Notons  $\mathbf{K}_X$  le complexe dualisant potentiel de  $(X, \delta)$ . Alors, le foncteur  $\mathbf{D}_X = \mathbf{R Hom}(-, \mathbf{K}_X)$  préserve  $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Grâce à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que l'anneau de coefficients est  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ , avec  $\ell$  un nombre premier. Il s'agit de montrer que pour tout faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{M}$  sur  $X$ ,  $\mathbf{D}_X \mathcal{M} \in \mathbf{D}_c^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ . D'après la proposition 6.2.2.1, si  $\mathcal{M}$  est constant, on a bien  $\mathbf{D}_X \mathcal{M} \in \mathbf{D}_c^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Si  $p: Y \rightarrow X$  est un morphisme étale, on a un isomorphisme évident  $p^* \mathbf{D}_X \mathcal{M} \simeq \mathbf{D}_Y p^* \mathcal{M}$  pour tout faisceau constructible  $\mathcal{M}$  sur  $X$ . Si  $\mathcal{M}$  est localement constant, en choisissant pour  $p$  un morphisme étale surjectif tel que  $p^* \mathcal{M}$  soit constant, on obtient que  $\mathbf{D}_X \mathcal{M} \in \mathbf{D}_c^b(\mathcal{X}_{\text{ét}}, \Lambda)$  si  $\mathcal{M}$  est localement constant.

<sup>iv</sup>Ce complexe étant concentré sur un nombre fini de lignes, il n'y a pas lieu de préciser si l'on définit le complexe simple en termes de sommes ou de produits.

On raisonne alors par récurrence noethérienne. Pour tout faisceau constructible  $\mathcal{M}$ , il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  sur lequel  $\mathcal{M}$  est localement constant. On note  $j: U \rightarrow X$  l'immersion ouverte correspondante et  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée complémentaire. D'après ce qui précède, on a  $j^* D_X \mathcal{M} = D_U \mathcal{M}|_U \in D_c^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Par ailleurs,  $i^! D_X \mathcal{M} \simeq D_Z i^* \mathcal{M}$ . Par hypothèse de récurrence noethérienne, on obtient que  $i^! D_X \mathcal{M}$  appartient à  $D_c^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Le lemme 6.2.2.2 permet de conclure que  $D_X \mathcal{M}$  appartient à  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

La stabilité de  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  par  $D_X$  permet d'énoncer le résultat important suivant :

**PROPOSITION 6.2.3.2.** *Soit  $p: X' \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schémas noethériens excellents. On suppose  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta_X$  et on munit  $X'$  de la fonction de dimension  $\delta_{X'}$  définie dans la proposition 4.1.1. Alors, pour tout  $L \in D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on a un isomorphisme canonique  $p^* D_X L \xrightarrow{\sim} D_{X'} p^* L$  et le morphisme de bidualité  $p^* L \rightarrow D_{X'}^2 p^* L$  s'identifie à l'image par  $p^*$  du morphisme de bidualité  $L \rightarrow D_X^2 L$ .*

Cela résulte aussitôt des propositions 4.1.1, 4.2.2 et 6.2.3.1.

#### 6.2.4. Dimension quasi-injective.

**PROPOSITION 6.2.4.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Notons  $K_X$  le complexe dualisant potentiel de  $(X, \delta)$ . La dimension quasi-injective de  $K_X$  est  $-2 \inf_{x \in X} \delta(x)$ . En particulier, elle est finie si et seulement si  $X$  est de dimension de Krull finie.*

Commençons par minorer la dimension quasi-injective de  $K_X$ . Soit  $x \in X$ . On note  $i: Z \rightarrow X$  l'inclusion du sous-schéma intègre de  $X$  de point générique  $x$ . On a un isomorphisme canonique  $i^! K_X \simeq i^* R \mathbf{Hom}(\Lambda_Z, K_X)$ . Le complexe  $K_Z = i^! K_X$  est un complexe dualisant potentiel pour  $(Z, \delta_Z)$ . Par conséquent  $(K_Z)_{\bar{x}} \simeq \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$ . Il en résulte que la dimension quasi-injective de  $K_X$  est au moins  $-2\delta(x)$ . On obtient ainsi la minoration

$$-2 \inf_{x \in X} \delta(x) \leq \dim. \text{q. inj. } K_X .$$

Montrons que cette inégalité est en fait une égalité si  $X$  est de dimension de Krull finie. On peut procéder par récurrence sur la dimension de  $X$ . On peut en outre supposer que  $X$  est local strictement hensélien (réduit) de point fermé  $x$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . Il s'agit de montrer que  $D_X \mathcal{M} \in D^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Il existe un ouvert affine dense  $U$  sur lequel  $\mathcal{M}$  est localement constant. Le schéma  $X$  étant réduit et excellent, quitte à rétrécir  $X$ , on peut supposer que  $U$  est régulier. Notons  $j: U \rightarrow X$  l'immersion de  $U$ . Notons  $U_1, \dots, U_n$  les composantes connexes de  $U$ , et  $\eta_1, \dots, \eta_n$  les points génériques de ces composantes. Le schéma  $U$  étant régulier, on connaît la structure du complexe dualisant potentiel  $K_U$  : pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a un isomorphisme canonique  $K_{U_i} \simeq \Lambda(\delta(\eta_i))[2\delta(\eta_i)]$ . En particulier,  $K_{U_i} \in D^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i,\text{ét}}, \Lambda)$ . Le faisceau  $\mathcal{M}|_{U_i}$  étant localement constant, on obtient que  $D_{U_i} \mathcal{M}|_{U_i} \in D^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i,\text{ét}}, \Lambda)$ . D'après le théorème de Lefschetz affine appliqué aux immersions ouverts affines  $j_i: U_i \rightarrow X$ , il vient alors que  $Rj_{i*} D_{U_i} \mathcal{M}|_{U_i}$  appartient à  $D^{\leq \dim \overline{\{\eta_i\}} - 2\delta(\eta_i)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Comme on a  $\dim \overline{\{\eta_i\}} - 2\delta(\eta_i) \leq -2\delta(x)$ , il vient que  $Rj_{*} D_U \mathcal{M}|_U$  appartient à  $D^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

Notons  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée complémentaire à  $j$ . Grâce à la récurrence sur la dimension, on sait que  $D_Z i^* \mathcal{M} \in D^{\leq -2\delta(x)}(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ . En utilisant le

triangle distingué canonique

$$i_* D_Z i^* \mathcal{M} \rightarrow D_X \mathcal{M} \rightarrow Rj_* D_U \mathcal{M}|_U,$$

on obtient bien que  $D_X \mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , ce qui achève la démonstration de la proposition.

### 6.3. Le théorème en degré négatif ou nul.

**PROPOSITION 6.3.1.** *Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . Alors, le morphisme canonique est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} D_X D_X \mathcal{M}.$$

Au cours de cette démonstration, on dira qu'un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{M}$  sur  $X$  est faiblement réflexif si le morphisme canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \tau_{\leq 0} D_X D_X \mathcal{M}$  de la proposition est un isomorphisme.

D'après le théorème 5.1.1, on sait que  $\Lambda$  est faiblement réflexif. Si  $g: Z \rightarrow X$  est une immersion fermée et  $\mathcal{N}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $Z$ , il est clair que  $\mathcal{N}$  est faiblement réflexif sur  $Z$  si et seulement si  $g_* \mathcal{N}$  est faiblement réflexif sur  $X$ . Plus généralement, si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme fini et  $\mathcal{N}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $Y$ , alors  $\mathcal{N}$  est faiblement réflexif si et seulement si  $f_* \mathcal{N}$  l'est (voir [SGA 5 I 1.13]). Notons aussi qu'une utilisation appropriée du lemme des cinq montre que si on a une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  de faisceaux constructibles de  $\Lambda$ -modules, et que  $\mathcal{M}''$  est faiblement réflexif, alors  $\mathcal{M}$  est faiblement réflexif si et seulement si  $\mathcal{M}'$  est faiblement réflexif.

Grâce à la stabilité par extension énoncée plus haut et à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier. Des remarques précédentes, il résulte que si  $f: Y \rightarrow X$  est fini et que  $U$  est un ouvert de  $Y$ , alors  $f_* \Lambda_U$  est faiblement réflexif. La classe des faisceaux constructibles de  $\Lambda$ -modules faiblement réflexifs sur  $X$  étant stable par facteurs directs et extensions, on peut conclure en utilisant le dévissage des faisceaux constructibles de [SGA 4 IX 5.8].

### 6.4. L'argument de [SGA 4 $\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 4.3].

**DÉFINITION 6.4.1.** Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . On dit que  $\mathcal{M}$  est réflexif si le morphisme de bidualité  $\mathcal{M} \rightarrow D_X D_X \mathcal{M}$  est un isomorphisme. On dira que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour  $X$  si tout faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$  est réflexif.

**PROPOSITION 6.4.2.** *Soit  $d \geq 0$ . Si le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour les  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas excellents noethériens de dimension  $\leq d$ , alors il l'est aussi pour les schémas de type fini sur de tels schémas.*

**REMARQUE 6.4.3.** Dans [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 4.3], un tel isomorphisme de bidualité est construit pour les schémas de type fini sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma régulier de dimension au plus un (mais non nécessairement excellent). Aux hypothèses d'excellence et de régularité du schéma de base près, il s'agit essentiellement du cas  $d = 1$  de la proposition. La démonstration qui suit reprend et généralise celle de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 4.3].

Par récurrence sur  $d$ , on peut supposer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour les schémas de type fini (et leurs hensélisés stricts) sur des  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents de dimension  $< d$ . Pour montrer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout schéma  $Y$  de type fini sur  $X$ , il suffit évidemment de le faire pour  $Y = (\mathbf{P}^1)^n \times X$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  de dimension au plus  $d$  (muni d'une fonction de dimension  $\delta$ ), le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour  $(\mathbf{P}^1)^n \times X$ . L'hypothèse de la proposition règle le cas  $n = 0$ . Supposons la propriété établie jusqu'au cran  $n - 1$ , avec  $n \geq 1$ . Soit  $X$  un schéma noethérien excellent de dimension  $d$  muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Montrons que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour  $(\mathbf{P}^1)^n \times X$ . On peut supposer que  $X$  est local strictement hensélien, de point fermé  $x$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible sur  $(\mathbf{P}^1)^n \times X$ . Notons  $C$  un cône du morphisme de bidualité  $\mathcal{M} \rightarrow DD\mathcal{M}$ . On sait déjà que  $C \in D_c^b((\mathbf{P}^1)^n \times X_{\text{ét}}, \Lambda)$  (cf. proposition 6.2.3.1). Nous allons dans un premier temps montrer que les faisceaux de cohomologie de  $C$  sont en gratte-ciel, c'est-à-dire supportés par des points fermés. L'hypothèse de récurrence sur  $d$  montre que le support de  $C$  est contenu dans le fermé  $(\mathbf{P}^1)^n \times x$ . Posons  $Y = (\mathbf{P}^1 \times X)_{(y)}$  où  $y$  est le point générique de  $\mathbf{P}^1 \times x \subset \mathbf{P}^1 \times X$ . On considère les  $n$  projections canoniques  $(\mathbf{P}^1)^n \times X \rightarrow \mathbf{P}^1 \times X$  et leur changement de base  $(\mathbf{P}^1)^{n-1} \times Y \rightarrow Y$  au-dessus de  $Y$ . Le schéma  $Y$  étant de dimension  $d$  et la proposition 6.2.3.2 montrant en particulier que « la dualité commute aux localisations », l'hypothèse de récurrence pour  $n - 1$  implique que si  $z \in (\mathbf{P}^1)^n \times X$  est tel que  $C_z \neq 0$ , alors les images de  $z$  par les  $n$  projections canoniques  $(\mathbf{P}^1)^n \times X \rightarrow \mathbf{P}^1 \times X$  sont des points fermés (puisqu'elles sont au-dessus de  $x$  et différentes du point générique  $y$  de  $\mathbf{P}^1 \times x$ ). Par conséquent, un tel point  $z$  est un point fermé de  $(\mathbf{P}^1)^n \times x$ . Bref, les faisceaux de cohomologie de  $C$  sont supportés par des points fermés. Il en résulte que si on note  $\pi: (\mathbf{P}^1)^n \times X \rightarrow X$  le morphisme canonique, alors pour montrer que  $C \simeq 0$ , il suffit de montrer que  $R\pi_* C \simeq 0$ . D'après [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [Th. finitude] 4.4],  $R\pi_* C$  s'identifie au cône du morphisme de bidualité  $R\pi_* \mathcal{M} \rightarrow D_X D_X R\pi_* \mathcal{M}$ , qui est un isomorphisme par hypothèse. Par conséquent,  $C \simeq 0$ , ce qui achève la démonstration de la proposition.

**6.5. Fin de la démonstration.** Démontrons le théorème 6.1.1. Compte tenu des résultats antérieurs, il ne reste plus qu'à montrer que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Comme il suffit d'obtenir la conclusion pour les hensélisés stricts de  $X$ , on peut supposer que  $X$  est de dimension de Krull finie  $d$ . On va raisonner par récurrence sur  $d$ .

**DÉFINITION 6.5.1.** Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur un  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent  $X$  muni d'une fonction de dimension  $\delta$ . Pour tout  $q \geq 1$ , on dit que  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété  $(D)_q$  si le faisceau de cohomologie  $\mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M})$  est nul.

D'après la proposition 6.3.1,  $\mathcal{M}$  est réflexif si et seulement s'il vérifie la propriété  $(D)_q$  pour tout  $q \geq 1$ .

La fonction de dimension  $\delta$  sert à formuler la propriété  $(D)_q$ . Pourtant, elle n'en dépend pas. En effet, si  $\delta$  et  $\delta'$  sont deux fonctions de dimension sur  $X$  (connexe), il existe un entier relatif  $k$  tel que  $\delta' = \delta + k$ . Le complexe dualisant potentiel  $K_{X,\delta'}$  s'identifie canoniquement à  $K_{X,\delta}(k)[2k]$  : les foncteurs de bidualité



$D_{X,\delta}^2$  et  $D_{X,\delta'}^2$  sont canoniquement isomorphes. Il n'y a donc pas lieu de mentionner la fonction de dimension dans la notation  $D_X^2$ , et les propriétés  $(D)_q$  définies relativement à  $\delta$  et  $\delta'$  sont équivalentes.

En outre, les propriétés  $(D)_q$  sont clairement locales pour la topologie étale. Comme les schémas noethériens excellents admettent localement pour la topologie étale des fonctions de dimension, on peut leur donner un sens même en l'absence d'une fonction de dimension globale. Par recollement, on peut même donner un sens aux faisceaux de cohomologie  $\mathcal{H}^q(D_X^2 \mathcal{M})$ .

Soit  $d \geq 0$ . On suppose que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schéma noethérien excellent de dimension au plus  $d - 1$  muni d'une fonction de dimension.

Nous allons montrer par récurrence sur  $q \geq 1$  que tout faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules  $\mathcal{M}$  sur un schéma noethérien excellent  $X$  de dimension  $\leq d$  vérifie la propriété  $(D)_q$ .

Soit  $q \geq 1$ . On suppose que pour tout  $1 \leq q' < q$ , tout faisceau de  $\Lambda$ -modules sur un schéma noethérien excellent  $X$  de dimension  $\leq d$  vérifie la propriété  $(D)_{q'}$ .

**LEMME 6.5.2.** *Les entiers  $d$  et  $q$  ayant été fixés comme ci-dessus, la propriété  $(D)_q$  pour les faisceaux constructibles de  $\Lambda$ -modules sur les schémas noethériens excellents de dimension au plus  $d$  est stable par extensions et sous-objets.*

En effet, si on a une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  de faisceaux constructibles de  $\Lambda$ -modules sur un tel schéma  $X$ , l'hypothèse de récurrence si  $q \geq 2$  ou la proposition 6.3.1 si  $q = 1$  implique que l'on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow H^q(D_X^2 \mathcal{M}') \rightarrow H^q(D_X^2 \mathcal{M}) \rightarrow H^q(D_X^2 \mathcal{M}'')$$

La propriété  $(D)_q$  est donc stable par extensions et sous-objets.

**LEMME 6.5.3.** *Soit  $p: Y \rightarrow X$  un morphisme fini entre schémas noethériens excellents. Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $Y$ . Alors,  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété  $(D)_q$  si et seulement si  $p_* \mathcal{M}$  la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de l'isomorphisme canonique  $p_* \mathcal{H}^q(D_Y^2 \mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}^q(D_X^2 p_* \mathcal{M})$  (voir [SGA 5 I 1.12 (a)]) et de la conservativité du foncteur  $p_*$ .

**LEMME 6.5.4.** *Soit  $X$  un schéma noethérien excellent. Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie  $\text{Cons}(X, \Lambda)$  des faisceaux constructibles de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ , stable par facteurs directs et extensions. On suppose que pour tout morphisme fini  $p: Y \rightarrow X$ , toute immersion ouverte  $j: U \rightarrow Y$  avec  $Y$  normal intègre et tout nombre premier  $\ell$  divisant  $n$ , on a  $p_* j_* \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z} \in \mathcal{C}$ . Alors,  $\mathcal{C} = \text{Cons}(X, \Lambda)$ .*

Il s'agit d'une variante facile de [SGA 4 IX 5.8].

**LEMME 6.5.5.** *Les entiers  $d$  et  $q$  ayant été fixés comme ci-dessus, si la propriété  $(D)_q$  est satisfaite par le faisceau constant  $\Lambda$  sur les schémas noethériens excellents normaux (strictement henséliens) de dimension au plus  $d$ , alors la propriété  $(D)_q$  est satisfaite par tout faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur un schéma noethérien excellent de dimension au plus  $d$ .*

D'après le lemme 6.5.4, il suffit d'établir la propriété  $(D)_q$  pour un faisceau de la forme  $p_* j_* \mathbf{Z}/\ell \mathbf{Z}$  avec  $\ell$  un diviseur premier de  $n$ ,  $p$  un morphisme fini et  $j$  une immersion ouverte entre schémas normaux intègres. D'après le lemme 6.5.3,

il suffit d'établir la propriété  $(D)_q$  pour  $j_*\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  avec  $j: U \rightarrow Y$  une immersion ouverte, avec  $Y$  normal intègre. D'après la stabilité par sous-objet et extensions de la propriété  $(D)_q$  (cf. lemme 6.5.2), il suffit de traiter le cas du faisceau  $j_*\Lambda$ , qui est lui-même un sous-faisceau du faisceau constant  $\Lambda$  sur le schéma normal  $Y$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ainsi ramené à montrer la propriété  $(D)_q$  pour le faisceau constant  $\Lambda$  sur les schémas noethériens excellents normaux  $X$  de dimension  $d$ . On peut supposer  $X$  local strictement hensélien de point fermé  $x$  et de point générique  $\eta$ . Si  $d \leq 1$ ,  $X$  est régulier, et alors, si on choisit la fonction de dimension  $\delta$  sur  $X$  telle que  $\delta(\eta) = 0$ , le complexe dualisant potentiel associé  $K_X$  sur  $X$  est le faisceau constant  $\Lambda$ , et alors il est évident que  $\Lambda$  vérifie la propriété  $(D)_q$  puisque l'on a tautologiquement  $D_X D_X \Lambda \simeq \Lambda$ . On peut donc supposer que  $d \geq 2$ . En appliquant le lemme suivant à la complétion  $\widehat{X} \rightarrow X$ , on voit qu'on peut supposer que  $X$  est complet :

**LEMME 6.5.6.** *Soit  $q \geq 1$ . Soit  $p: X' \rightarrow X$  un morphisme régulier entre  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ -schémas noethériens excellents. Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau constructible de  $\Lambda$ -modules sur  $X$ . On suppose que  $p$  est surjectif. Alors, le faisceau  $\mathcal{M}$  vérifie la propriété  $(D)_q$  si et seulement si  $p^*\mathcal{M}$  la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de la proposition 6.2.3.2.

Il nous reste à montrer que si  $X$  est un schéma local strictement hensélien noethérien normal complet de dimension  $d \geq 2$ , alors le faisceau constant  $\Lambda$  sur  $X$  vérifie la propriété  $(D)_q$ . D'après le théorème d'algébrisation partielle V-3.1.3, il existe un morphisme  $p: X' \rightarrow X$  fini surjectif tel que

- le schéma  $X'$  soit normal ;
- il existe un schéma local noethérien complet  $Y$  de dimension  $< d$ , un morphisme de type fini  $Z \rightarrow Y$ , un point géométrique  $\bar{z} \rightarrow Z$  et un isomorphisme  $X' \simeq \widehat{Z_{(\bar{z})}}$ .

Le schéma  $Y$  est noethérien excellent et de dimension  $< d$ . L'hypothèse de récurrence sur  $d$  et la proposition 6.4.2 impliquent que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour  $Z_{(\bar{z})}$ . En particulier, le faisceau constant  $\Lambda$  sur  $Z_{(\bar{z})}$  est réflexif. Appliqué au morphisme de complétion  $X' \rightarrow Z_{(\bar{z})}$ , la proposition 6.2.3.2 montre que le faisceau constant  $\Lambda$  sur  $X'$  est réflexif. En particulier, le faisceau constant  $\Lambda$  sur  $X'$  satisfait la propriété  $(D)_q$ . D'après le lemme 6.5.3, on peut en déduire que le faisceau  $p_*\Lambda$  sur  $X$  vérifie la propriété  $(D)_q$ . Le morphisme fini  $p$  étant surjectif, le morphisme canonique  $\Lambda \rightarrow p_*\Lambda$  est un monomorphisme de faisceaux. La propriété  $(D)_q$  étant stable par sous-objets (cf. lemme 6.5.2), le faisceau constant  $\Lambda$  sur  $X$  vérifie bien la propriété  $(D)_q$ , ce qui achève la démonstration du théorème de dualité locale.

## 7. Anneaux de coefficients généraux

### 7.1. Énoncés.

**DÉFINITION 7.1.1.** Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $A$  un anneau noethérien. On appelle complexe dualisant sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{cfl}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ) un objet  $K \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  tel que le foncteur  $D_K = R\mathbf{Hom}(K, -)$  préserve  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{cfl}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ) et que pour tout  $M \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $M \in D_{\text{cfl}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ), le morphisme de bidualité  $M \rightarrow D_K^2 M$  soit un isomorphisme.

Cette section vise à établir les deux théorèmes suivants :

**THÉORÈME 7.1.2.** *Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit  $R \in D(A)$  un complexe ponctuellement dualisant fort au sens de [Conrad, 2000, page 120]<sup>v</sup>. Soit  $K$  un complexe dualisant sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors,  $R \otimes_{\Lambda}^L K$  est un complexe dualisant sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ .*

**THÉORÈME 7.1.3.** *Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur  $D_{\text{cfl}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit  $K$  un complexe dualisant sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors,  $A \otimes_{\Lambda}^L K$  est un complexe dualisant sur  $D_{\text{cfl}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ .*

## 7.2. Systèmes locaux.

**DÉFINITION 7.2.1.** Soit  $X$  un schéma noethérien. On appelle système local (d'ensembles) sur  $X$  un faisceau d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$  isomorphe à une limite inductive filtrante de faisceaux représentés par des revêtements étales finis de  $X$ . Un système local fini est un système local représenté par un revêtement étale fini.

**PROPOSITION 7.2.2.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. La catégorie des systèmes locaux sur  $X$  est équivalente à la catégorie  $\text{Ind}(\text{Rev}(X))$  des ind-objets dans la catégorie  $\text{Rev}(X)$  des revêtements étales finis de  $X$ .*

Le foncteur qui à un revêtement étale fini  $Y \rightarrow X$  associe le faisceau d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$  représenté par  $Y$  est pleinement fidèle. En utilisant [SGA 1 v 8.7.5 a)], on en déduit, par passage à la limite inductive, un foncteur pleinement fidèle de la catégorie  $\text{Ind}(\text{Rev}(X))$  vers celle des faisceaux d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$ . Par définition, l'image essentielle de ce foncteur est la catégorie des systèmes locaux.

**PROPOSITION 7.2.3.** *Soit  $X$  un schéma noethérien connexe. Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$ . Le foncteur qui à un système local  $\mathcal{F}$  associe la fibre  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  est naturellement muni d'une action de  $\pi_1(X, \bar{x})$  et définit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur  $X$  et la catégorie  $\pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ens}$  des ensembles sur lesquels le groupe profini  $\pi_1(X, \bar{x})$  agit continûment. Autrement dit, la catégorie des systèmes locaux d'ensembles sur  $X$  s'identifie à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le topos classifiant du groupe profini  $\pi_1(X, \bar{x})$ .*

Notons  $\text{Ensf}$  la catégorie des ensembles finis. D'après [SGA 1 v 7], le foncteur  $\text{Rev}(X) \rightarrow \text{Ensf}$  qui à  $Y$  associe l'ensemble sous-jacent au schéma  $Y_{\bar{x}}$  s'enrichit d'une action du groupe  $\pi_1(X, \bar{x})$  pour définir une équivalence de catégories  $\text{Rev}(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ensf}$  où  $\pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ensf}$  est la catégorie des ensembles finis (discrets) munis d'une action continue du groupe profini  $\pi_1(X, \bar{x})$ . En passant cette équivalence aux ind-objets, on obtient une équivalence  $\text{Ind}(\text{Rev}(X)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \bar{x}) - \text{Ens}$ , ce qui permet de conclure d'après la proposition 7.2.2.

<sup>v</sup>On rappelle que cela signifie ici que  $R$  appartient à  $D_c^b(A)$  et que pour tout  $x \in \text{Spec}(A)$ ,  $R_{(x)} \in D(A_{(x)})$  est un complexe dualisant pour  $A_{(x)}$  au sens de [Hartshorne, 1966, page 258], ce qui signifie que  $R_{(x)}$  est de dimension injective finie et que le foncteur  $\text{RHom}(-, R_{(x)})$  induit une involution de  $D_c^b(A_{(x)})$ . D'après, [Conrad, 2000, lemma 3.1.5], il revient au même de demander que le foncteur  $\text{RHom}_{\Lambda}(-, R)$  induise une involution de  $D_c^b(A)$ .

À partir de la définition des systèmes locaux d'ensembles, on peut définir les systèmes locaux de groupes abéliens, de groupes abéliens de torsion, de modules, etc.

**PROPOSITION 7.2.4.** *Pour tout schéma noethérien  $X$ , la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur  $X$  admet des limites inductives et des limites projectives finies et le foncteur d'inclusion de la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur  $X$  dans la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur  $X_{\text{ét}}$  commute.*

*Soit  $p: Y \rightarrow X$  un morphisme entre schémas noethériens. Si  $\mathcal{F}$  est un système local sur  $X$ , alors  $p^*\mathcal{F}$  est un système local sur  $Y$ ; la réciproque est vraie si  $p$  est un revêtement étale fini surjectif.*

*Si  $\mathcal{G}$  est un système local sur  $Y$  et  $p$  un revêtement étale fini, alors  $p_*\mathcal{G}$  est un système local sur  $X$ .*

Le seul fait non trivial à montrer ici est que si  $p$  est un revêtement étale fini surjectif et  $\mathcal{F}$  un faisceau d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$  tel que  $p^*\mathcal{F}$  soit un système local, alors  $\mathcal{F}$  est un système local. On a un isomorphisme évident entre  $\mathcal{F}$  et l'égalisateur des deux morphismes évidents  $p_*p^*\mathcal{F} \rightarrow p_*p^*p_*p^*\mathcal{F}$  déduits du couple de foncteurs adjoints  $(p^*, p_*)$ . D'après les autres propriétés triviales de stabilité des systèmes locaux,  $p_*p^*\mathcal{F}$  et  $p_*p^*p_*p^*\mathcal{F}$  sont des systèmes locaux; l'égalisateur de deux morphismes entre systèmes locaux est encore un système local.

**PROPOSITION 7.2.5.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. La catégorie abélienne des systèmes locaux de groupes abéliens de torsion sur  $X$  est stable par extension dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur  $X_{\text{ét}}$ . Plus précisément, si  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur  $X$  telle que  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  soient des systèmes locaux et que  $\mathcal{F}'$  soit de torsion, alors  $\mathcal{F}$  est un système local de groupes abéliens.*

Cette proposition résulte aussitôt du lemme suivant :

**LEMME 7.2.6.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau de groupes abéliens de torsion agissant librement sur un faisceau d'ensembles  $\mathcal{T}$ . On note  $p: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{G}$  le morphisme quotient. Si  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{T}/\mathcal{G}$  sont des systèmes locaux, alors  $\mathcal{T}$  aussi.*

On peut supposer que  $X$  est connexe. Notons  $\mathcal{Y} = \mathcal{T}/\mathcal{G}$ . On peut écrire  $\mathcal{Y}$  comme réunion de sous-systèmes locaux finis  $\mathcal{Y}'$ . Pour chacun de ces  $\mathcal{Y}'$ , on peut considérer  $p^{-1}(\mathcal{Y}')$  : il s'agit d'un faisceau d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$  sur lequel  $\mathcal{G}$  agit librement avec  $\mathcal{Y}'$  pour quotient. Le faisceau  $\mathcal{T}$  étant réunion des sous-faisceaux  $p^{-1}(\mathcal{Y}')$  associés, pour montrer que  $\mathcal{T}$  est un système local, il suffit de montrer que pour tout sous-système local fini  $\mathcal{Y}'$  de  $\mathcal{Y}$ ,  $p^{-1}(\mathcal{Y}')$  est un système local. Bref, on peut supposer que  $\mathcal{Y}$  est un système local fini.

On suppose ainsi que  $\mathcal{Y}$  est représenté par un revêtement étale fini  $q: Y \rightarrow X$ . On peut identifier le faisceau  $\mathcal{T}$  sur  $X$  muni du morphisme  $p: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Y}$  à un faisceau étale  $\tilde{\mathcal{T}}$  sur  $Y$  via un isomorphisme canonique  $\mathcal{T} \simeq q_1\tilde{\mathcal{T}}$ . L'action libre de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{T}$  correspond à une action libre du système local  $q^*\mathcal{G}$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ . D'après la proposition 7.2.4, pour montrer que  $\mathcal{T}$  est un système local, il suffit de montrer que  $\tilde{\mathcal{T}}$  en est un. Bref, on peut supposer que  $Y = X$ .

On s'est ramené à la situation où  $\mathcal{T}/\mathcal{G}$  est l'objet final de la catégorie des faisceaux sur  $X$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{T}$  est un torseur sous  $\mathcal{G}$ . Si  $\mathcal{G}$  est un système

local fini, alors  $\mathcal{F}$  est représentable par un revêtement étale fini et est donc un système local ; nous allons nous ramener à ce cas-là.

La classe d'isomorphisme du  $\mathcal{G}$ -torseur  $\mathcal{F}$  est définie par un élément dans l'ensemble  $H^1(X_{\text{ét}}, \mathcal{G})$ . Comme  $H^1(X_{\text{ét}}, -)$  commute aux limites inductives filtrantes, il existe un sous-système local de groupes abéliens finis  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{G}$  (supposé de torsion), un  $\mathcal{G}'$ -torseur  $\mathcal{F}'$  et un  $\mathcal{G}$ -isomorphisme  $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{F}'$  où l'on a noté  $\otimes$  le foncteur d'extension du groupe structural (cf. [Giraud, 1971, proposition 1.3.6, Chapitre III]). L'extension du groupe structural commutant aux limites inductives filtrantes,  $\mathcal{F}$  s'identifie à la limite inductive des  $\mathcal{G}'' \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{F}'$  pour  $\mathcal{G}''$  parcourant l'ensemble ordonné des sous-systèmes locaux de groupes abéliens finis de  $\mathcal{G}$  contenant  $\mathcal{G}'$ . D'après ce qui précède,  $\mathcal{G}'' \otimes_{\mathcal{G}'} \mathcal{F}'$  est un système local d'ensembles sur  $X$ . Par passage à la limite inductive,  $\mathcal{F}$  est bien un système local.

Le résultat de l'exercice suivant montre que l'hypothèse « de torsion » est bien nécessaire dans la proposition 7.2.5, et que par ailleurs, un faisceau qui est un système local localement pour la topologie étale n'est pas forcément un système local.

**EXERCICE 7.2.7.** Soit  $A$  le sous-anneau de  $\mathbf{C}[t]$  formé des polynômes  $f$  tels que  $f(0) = f(1)$  : le schéma  $C = \text{Spec}(A)$  correspondant est obtenu en identifiant 0 et 1 dans la droite affine complexe  $\mathbf{A}_\mathbf{C}^1$ .

- Montrer que  $C$  est isomorphe à la cubique plane d'équation  $x^3 - y^2 + xy = 0$  dans le plan affine complexe  $\text{Spec}(\mathbf{C}[x, y])$  (envoyer  $x$  et  $y$  respectivement sur  $t(t-1)$  et  $t^2(t-1)$ ).
- Montrer que  $C$  admet un unique point singulier  $O$ .
- Montrer que le morphisme évident  $p: \mathbf{A}_\mathbf{C}^1 \rightarrow C$  est le normalisé de  $C$  et que le sous-schéma fermé (réduit)  $p^{-1}(O)$  de  $\mathbf{A}_\mathbf{C}^1$  est  $\{0, 1\}$ .
- Construire un isomorphisme  $H_{\text{ét}}^1(C, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ .
- Montrer qu'il existe un faisceau de groupes abéliens sur  $C_{\text{ét}}$  tel que :
  - (i)  $\mathcal{F}$  soit extension de deux systèmes locaux, et s'insère plus précisément dans une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$  ;
  - (i') Localement pour la topologie étale,  $\mathcal{F}$  soit un système local ;
  - (ii)  $\mathcal{F}$  ne soit pas un système local.

### 7.3. Partitions galoisiennes.

**DÉFINITION 7.3.1.** Une partition galoisienne d'un schéma noethérien  $X$  consiste en la donnée d'une partition finie de  $X$  par des sous-schémas (localement fermés) réduits connexes  $(S_i)_{i \in I}$  et d'un revêtement étale galoisien  $S'_i \rightarrow S_i$  pour tout  $i \in I$ .

**DÉFINITION 7.3.2.** Soit  $p: Y \rightarrow X$  un revêtement fini étale galoisien entre schémas noethériens. Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre. On dit qu'un système local de  $A$ -modules  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est rendu ind-unipotent par  $Y$ , si pour un point géométrique  $\bar{y}$  de  $Y$  (et donc pour tous) au-dessus d'un point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , le  $\pi_1(X, \bar{x})$ -module discret  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  est ind-unipotent pour le sous-groupe distingué  $\pi_1(Y, \bar{y})$  (cf. sous-section 11.3), autrement dit que  $\mathcal{F}$  est limite inductive filtrante de faisceaux localement constants extensions successives de faisceaux dont l'image inverse par  $p$  soit un faisceau constant.

**DÉFINITION 7.3.3.** Soit  $X$  un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne  $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$ . Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre. On dit d'un faisceau de  $A$ -modules sur  $X$  qu'il est faiblement constructible par rapport à  $\mathcal{P}$  si pour tout

$i \in I$ , sa restriction à  $S_i$  est un système local rendu ind-unipotent par  $S'_i$ . On note  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux de  $A$ -modules sur  $X$  formée des faisceaux faiblement constructibles pour  $\mathcal{P}$ . Si  $\mathcal{P}'$  est une deuxième partition galoisienne, on dit que  $\mathcal{P}'$  raffine  $\mathcal{P}$  si on a l'inclusion  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A) \subset \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X, A)$  (et donc aussi  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A) \subset \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X, A)$  pour toute  $A$ -algèbre  $A$ ).

**PROPOSITION 7.3.4.** *Soit  $X$  un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne. Soit  $A$  une  $A$ -algèbre. La catégorie  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est abélienne ; son foncteur d'inclusion dans la catégorie des faisceaux de  $A$ -modules sur  $X$  est exact et commute aux limites inductives.  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est stable par extensions dans la catégorie des faisceaux de  $A$ -modules sur  $X$ .*

Ceci résulte aussitôt des propriétés des modules ind-unipotents pour un sous-groupe (cf. proposition 11.3.4) et des propriétés générales des systèmes locaux (cf. sous-section 7.2).

**DÉFINITION 7.3.5.** On dit d'une partition galoisienne  $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$  sur un schéma noethérien  $X$  qu'elle est dirigée si on a muni  $I$  d'un ordre total tel que, soit  $I$  est vide, soit, si on note  $i_0$  le plus petit élément de  $I$ ,  $S_{i_0}$  est ouvert et, récursivement,  $(S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I - \{i_0\}}$  est une partition galoisienne dirigée du fermé réduit  $X - S_{i_0}$ . On dit qu'une partition galoisienne est dirigeable s'il existe un ordre total sur l'ensemble d'indices qui en fasse une partition galoisienne dirigée.

**PROPOSITION 7.3.6.** *Toute partition galoisienne d'un schéma noethérien est raffinée par une partition galoisienne dirigeable.*

**LEMME 7.3.7.** *Soit  $X' \rightarrow X$  un revêtement étale galoisien. Soit  $(S_i \rightarrow X)_{i \in I}$  une partition de  $X$  par un nombre fini de sous-schémas réduits connexes. On note  $S'_i$  une composante connexe du produit fibré  $S_i \times_X X'$ . Alors,  $(S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$  est une partition galoisienne de  $X$  qui raffine la partition galoisienne  $(X' \rightarrow X)$ .*

Cela résulte aussitôt de la théorie de Galois.

Montrons la proposition par récurrence noethérienne sur  $X$ . Soit  $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$  une partition galoisienne d'un schéma noethérien non vide  $X$ . Tout d'abord, montrons que, quitte à raffiner  $\mathcal{P}$ , on peut supposer qu'il existe un indice  $i_0 \in I$  tel que  $S_{i_0}$  soit un ouvert. En effet, si on choisit un  $i_0 \in I$  tel que  $S_{i_0}$  contienne un point maximal de  $X$ ,  $S_{i_0}$  contient un ouvert non vide  $U$  de  $S_{i_0}$ . Notons  $V_1, \dots, V_n$  les composantes connexes du fermé réduit  $S_{i_0} - U$  de  $S_{i_0}$ . D'après le lemme, il existe une partition galoisienne  $\mathcal{Q} = (U' \rightarrow U, V'_1 \rightarrow V_1, \dots, V'_n \rightarrow V_n)$  de  $S_{i_0}$  qui raffine la partition galoisienne  $(S'_i \rightarrow S_i)$  de  $S_{i_0}$ . Quitte à remplacer la partition galoisienne initiale de  $X$  par son raffinement  $\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}'$  avec  $\mathcal{P}' = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I - \{i_0\}}$ , on peut effectivement supposer que  $S_{i_0}$  est ouvert.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence noethérienne à la partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  de  $X - S_{i_0}$  pour en obtenir un raffinement  $\mathcal{P}''$  indexé par un certain ensemble totalement ordonné  $J$  qui fasse de  $\mathcal{P}''$  une partition galoisienne dirigée de  $X - S_{i_0}$ . La partition galoisienne  $(S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0}) \cup \mathcal{P}''$  raffine  $\mathcal{P}$ , et si on étend l'ordre sur  $J$  en un ordre sur la réunion disjointe  $\{i_0\} \sqcup J$  de façon à faire de  $i_0$  le plus petit élément, on a obtenu une partition dirigée.

**EXERCICE 7.3.8.** Montrer que si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont deux partitions galoisiennes d'un schéma noethérien  $X$ , il existe une partition galoisienne (dirigeable) raffinant à la fois  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .

**7.4. Dévissages.** Le but de cette sous-section est d'établir le résultat suivant :

**PROPOSITION 7.4.1.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\mathcal{T}$  une sous-catégorie triangulée strictement pleine de  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  stable par facteurs directs. On suppose que pour tout nombre premier  $\ell$  divisant  $n$  et tout  $A/\ell A$ -module  $N$ , le foncteur  $N \otimes_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}}^L -: D_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \rightarrow D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{T}$ . Alors,  $\mathcal{T} = D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ .

La démonstration de cette proposition est repoussée à la fin de cette sous-section.

**PROPOSITION 7.4.2.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre. Soit  $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$  avec  $I = \{1, \dots, N\}$  une partition galoisienne dirigée d'un schéma noethérien  $X$ . Notons  $k_i: S_i \rightarrow X$  l'immersion canonique pour tout  $i \in I$ . Pour tout  $i \in I$ , le foncteur  $k_{i!}: \text{FCons}^{(S'_i \rightarrow S_i)}(S_i, A) \rightarrow \text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est pleinement fidèle. Tout objet  $\mathcal{F}$  de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  admet une filtration croissante (fonctorielle)  $(\text{Fil}_n \mathcal{F})_{n \in \mathbf{Z}}$  telle que le  $\text{Fil}_{-1} \mathcal{F} = 0$ ,  $\text{Fil}_N \mathcal{F} = \mathcal{F}$  et que pour tout  $1 \leq i \leq n$ , le quotient  $\text{Fil}_i \mathcal{F} / \text{Fil}_{i-1} \mathcal{F}$  soit dans  $k_{i!} \text{FCons}^{S'_i \rightarrow S_i}(S_i, A)$ .

C'est trivial.

**PROPOSITION 7.4.3.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre. Soit  $\mathcal{P} = (S'_i \rightarrow S_i)_{i \in I}$  une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien  $X$ . Notons  $k_i: S_i \rightarrow X$  l'immersion canonique pour tout  $i \in I$ . Si  $A$  est noethérien, alors  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est une catégorie abélienne localement noethérienne (cf. [Gabriel, 1962, pages 325–326]). Si  $A$  est artinien,  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est localement finie et admet un nombre fini d'objets simples ; plus précisément, si on note  $k_i: S_i \rightarrow X$  les inclusions canoniques,  $W_i$  un ensemble (fini) représentatif des objets simples de la catégorie des  $\text{Gal}(S'_i/S_i)$ -modules (via le choix d'un point géométrique de  $S'_i$ , on identifie ces objets à des systèmes locaux sur  $S_i$  trivialisés par  $S'_i$ ), alors les objets  $k_{i!} \mathcal{F}$  pour  $i \in I$  et  $\mathcal{F} \in W_i$  forment un ensemble représentatif des objets simples de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ .

Supposons  $A$  noethérien. Montrons que  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est localement noethérienne. On sait déjà que cette catégorie abélienne admet des limites inductives filtrantes et que celles-ci sont exactes. Il s'agit de montrer que tout objet de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  est limite inductive d'objets noethériens (ou plus précisément, mais cela revient au même, « réunion » de ses sous-objets noethériens). Si l'ensemble d'indice  $I$  de  $\mathcal{P}$  est vide, c'est trivial. Sinon, on peut choisir un ordre total sur  $I$  qui fasse de  $\mathcal{P}$  une partition galoisienne dirigée, et noter  $i_0$  le plus petit élément de  $I$ . Notons  $j: S_{i_0} \rightarrow X$  l'immersion (ouverte) correspondante et  $k: X - S_{i_0} \rightarrow X$  l'immersion du fermé réduit complémentaire. Pour tout objet  $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ , on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow j_{j!} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} k_* k^* \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

En raisonnant par récurrence sur le cardinal de  $I$ , on peut supposer que  $k^* \mathcal{F}$  est « réunion » de ses sous-objets noethériens dans  $\text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X - S_{i_0}, A)$  avec  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - (S'_i \rightarrow S_i)$ . Bien entendu, un objet  $\mathcal{R} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}'}(X - S_{i_0}, A)$  est noethérien si et seulement si  $k_* \mathcal{R}$  l'est dans  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . On dispose donc d'un système

inductif  $(\mathcal{H}_a)_{a \in A}$  indexé par un ensemble ordonné filtrant  $A$  de sous-objets noethériens de  $k_*k^*\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{F}$  soit la réunion des sous-objets  $\pi^{-1}(\mathcal{H}_a)$  de  $\mathcal{F}$  pour  $a \in A$ . Si chacun des  $\pi^{-1}(\mathcal{H}_a)$  est réunion de ses sous-objets noethériens, alors  $\mathcal{F}$  aussi. Ceci permet de supposer que  $k^*\mathcal{F}$  est noethérien. Concernant  $j^*\mathcal{F}$ , en utilisant que la catégorie des  $A[G]$ -modules discrets (avec  $G$  groupe profini) est localement noethérienne, on obtient que l'objet  $j^*\mathcal{F}$  de  $\text{FCons}^{S'_{i_0} \rightarrow S_{i_0}}(S_{i_0}, A)$  est réunion de ses sous-objets noethériens ; on en déduit aussitôt que  $j_*j^*\mathcal{F}$  est aussi réunion de ses sous-objets noethériens dans  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . Pour conclure que  $\mathcal{F}$  est réunion de ses sous-objets noethériens, on utilise le lemme suivant :

**LEMME 7.4.4.** *Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $\mathcal{P}$  une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien  $X$ . Soit  $0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  une suite exacte courte dans  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . On suppose que  $\mathcal{G}$  est un objet noethérien de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  et que  $\mathcal{H}$  est réunion de ses sous-objets noethériens. Alors,  $\mathcal{F}$  est aussi réunion de ses sous-objets noethériens.*

Il est évident que  $\mathcal{G}$  est un faisceau de  $A$ -modules constructible sur  $X$ . D'après [SGA 4 IX 2.7.3], le foncteur  $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, -)$  de la catégorie des faisceaux de  $A$ -modules sur  $X$  vers celle des  $A$ -modules commute aux limites inductives filtrantes. La suite exacte donnée définissant un élément dans  $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  et  $\mathcal{H}$  s'écrivant comme une limite inductive filtrante de ses sous-objets noethériens, il existe un sous-objet noethérien  $\mathcal{H}'$  de  $\mathcal{H}$ , une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  et un diagramme commutatif de la forme suivante, où le carré de gauche est cocartésien :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}' & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

À vrai dire, on peut remplacer  $\mathcal{H}'$  par tout sous-objet (noethérien)  $\mathcal{H}''$  de  $\mathcal{H}$  contenant  $\mathcal{H}'$ , et  $\mathcal{F}$  s'identifie à la réunion des sous-objets  $\mathcal{F}''$  ainsi définis. Pour conclure, il suffit de montrer qu'un tel  $\mathcal{F}''$  est un objet noethérien de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ , ce qui est évident puisqu'il est extension de deux objets noethériens  $\mathcal{H}''$  et  $\mathcal{G}$ .

Supposons  $A$  artinien. Il s'agit de trouver un ensemble fini d'objets simples à partir desquels tous les objets noethériens s'obtiennent par extensions successives. Compte tenu du dévissage de la proposition 7.4.2, on peut supposer que  $\mathcal{P}$  est constitué d'un unique revêtement galoisien  $X' \rightarrow X$ . Choisissons un point géométrique  $\bar{x}'$  de  $X'$  au-dessus d'un point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ . Notons  $G = \pi_1(X, \bar{x})$  et  $H = \pi_1(X', \bar{x}')$ . Le groupe profini  $H$  s'identifie à un sous-groupe distingué fermé de  $G$ . Notons  $K = G/H$  le groupe fini quotient. L'anneau  $A[K]$  est évidemment artinien à gauche, on peut en noter  $W$  un ensemble représentatif fini d'objets simples ; considérés comme des  $A[G]$ -modules discrets, les éléments de  $W$  sont encore simples.

La catégorie  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  s'identifie à la catégorie des  $G$ -modules discrets ind-unipotents pour  $H$ . Tout objet de cette catégorie s'écrit comme une réunion de sous-objets de type fini unipotents pour  $H$ , et de tels sous-objets se dévissent eux-mêmes en extensions successives d'objets sur lesquels  $H$  agit trivialement, ces derniers s'identifiant à des  $A[K]$ -modules de type fini, ils se dévissent en extensions successives d'éléments de  $W$ .



**DÉFINITION 7.4.5.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\mathcal{P}$  une partition galoisienne. On note  $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  formée des faisceaux de  $A$ -modules constructibles (ce qui revient ici à dire que les fibres sont des  $A$ -modules de type fini). Il s'agit bien entendu de la sous-catégorie abélienne des objets noethériens dans  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ .

**PROPOSITION 7.4.6.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\mathcal{P}$  une partition galoisienne dirigeable de  $X$ . Soit  $\mathcal{F}$  un objet de  $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . Il existe une filtration finie de  $\mathcal{F}$  dans  $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$  dont les quotients successifs soient des facteurs directs d'objets de la forme  $M \otimes_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F}_0$  où  $\ell$  est un nombre premier divisant  $n$ ,  $M$  un  $A/\ell A$ -module de type fini et  $\mathcal{F}_0$  un objet de  $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ .

D'après la proposition 7.4.2, on peut supposer que  $\mathcal{P}$  est constituée d'un unique revêtement galoisien  $X' \rightarrow X$ . En reprenant les notations utilisées dans la démonstration du cas artinien de la proposition 7.4.3, on peut identifier  $\mathcal{F}$  à un  $A[G]$ -module discret unipotent pour le sous-groupe distingué fermé  $H$ . Cette propriété d'unipotence permet de supposer que  $H$  agit trivialement, de sorte qu'on se retrouve avec une action du groupe fini  $K = G/H = \text{Gal}(X'/X)$  (bref, on peut supposer que  $\mathcal{F}$  est un système local de  $A$ -modules trivialisé par  $X'$ ). Le lemme suivant appliqué à l'algèbre de groupe  $B = A[K]$  permet de conclure.

**LEMME 7.4.7.** Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $B$  une  $\Lambda$ -algèbre finie non nécessairement commutative. Tout  $A \otimes_{\Lambda} B$ -module (à gauche) de type fini admet une filtration finie dont les quotients successifs soient des facteurs directs de  $A \otimes_{\Lambda} B$ -modules de la forme  $N \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$  où  $\ell$  est un nombre premier divisant  $n$ ,  $N$  un  $A/\ell A$ -module de type fini et  $L$  un  $B/\ell B$ -module simple.

En premier lieu, comme  $A \otimes_{\Lambda} B$  est évidemment noethérien à gauche, on peut procéder à une récurrence noethérienne ; il suffit donc de montrer que tout  $A \otimes_{\Lambda} B$ -module non nul admet un sous-module non nul facteur direct d'un module de la forme  $N \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$  avec  $N$  un  $A/\ell A$ -module de type fini,  $L$  un  $B/\ell B$ -module simple et  $\ell$  un nombre premier divisant  $n$ . Ceci permet de supposer que  $B$  est un anneau semi-simple. En effet, pour tout  $B$ -module non nul  $M$ , l'annulateur du radical de Jacobson  $\mathcal{N}$  de  $B$  dans  $M$  est un sous- $B$ -module non nul de  $M$  (cf. [Lam, 1991, §4]) ; si  $M$  est un  $A \otimes_{\Lambda} B$ -module non nul, l'annulateur de  $\mathcal{N}$  dans  $M$  s'identifie donc à un  $A \otimes_{\Lambda} (B/\mathcal{N})$ -module non nul et l'anneau  $B/\mathcal{N}$  est bien semi-simple.

En deuxième lieu, l'énoncé du lemme est vrai pour un produit  $B = B_1 \times \cdots \times B_k$  d'anneaux si et seulement s'il est vrai pour chacun des  $B_i$  et l'énoncé est aussi invariant par équivalence de Morita (cf. [Lam, 1999, §18]) puisqu'on peut le formuler intrinsèquement en termes de la catégories des  $B$ -modules. Compte tenu du théorème d'Artin-Wedderburn de structure des anneaux semi-simples (cf. [Lam, 1991, 3.5]), on peut donc supposer que  $B$  est un corps fini, *a priori* non commutatif, mais effectivement commutatif en vertu du théorème de Wedderburn (cf. [Lam, 1991, 13.1]).

En troisième lieu, l'énoncé est vrai dans le cas particulier auquel on s'est ramené ci-dessus. Soit  $B = L$  une extension finie de  $\mathbf{F}_\ell$ , pour un certain nombre premier  $\ell$  divisant  $n$ . On peut supposer que  $\ell$  annule  $A$ . Soit  $M$  un  $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ -module. L'extension  $L/\mathbf{F}_\ell$  est galoisienne, notons  $G$  son groupe de Galois. On considère le  $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ -module  $M' = \bigoplus_{\sigma \in G} \sigma^* M$  où  $\sigma^* M$  est le  $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ -module obtenu par image inverse par l'automorphisme de  $\text{Spec}(A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L)$  induit par  $\sigma^{-1} : L \rightarrow L$  (on peut

identifier  $\sigma^*M$  au  $A$ -module sur  $M$  sur lequel on ferait agir  $\lambda \in L$  par la multiplication d'origine par  $\sigma(\lambda)$ ). Le  $A \otimes_{F_\ell} L$ -module  $M$  est évidemment un facteur direct de  $M'$ . On va montrer que  $M'$  est de la forme  $N \otimes_{F_\ell} L$  où  $N$  est un  $A$ -module. On observe que pour tout  $\sigma \in G$ , on dispose d'un isomorphisme évident de  $A \otimes_{F_\ell} L$ -modules  $M' \simeq \sigma^*M'$ . Ces isomorphismes vérifient tautologiquement les relations de cocycles qui permettent de munir le  $A \otimes_{F_\ell} L$ -module  $M'$  d'une donnée de descente relative au morphisme de schémas  $\text{Spec}(A \otimes_{F_\ell} L) \rightarrow \text{Spec}(A)$  (qui est un revêtement étale surjectif). Par descente fidèlement plate (cf. [SGA1 VIII 1.1]), il existe un  $A$ -module  $N$  tel que  $N \otimes_{F_\ell} L$  s'identifie à  $M'$  de façon compatible avec les isomorphismes  $M' \simeq \sigma^*M'$ . En particulier, on a un isomorphisme de la forme voulue entre les  $A \otimes_{F_\ell} L$ -modules  $M'$  et  $N \otimes_{F_\ell} L$ , ce qui permet de conclure.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 7.4.1. Soit  $\mathcal{T}$  une telle sous-catégorie triangulée de  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau constructible de  $A$ -modules sur  $X$ . Il s'agit de montrer que  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Il existe évidemment une partition galoisienne  $\mathcal{P}$  telle que  $\mathcal{F}$  appartienne à  $\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . D'après la proposition 7.3.6, on peut supposer que  $\mathcal{P}$  est dirigeable. On peut alors appliquer la proposition 7.4.6 pour conclure que  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

**7.5. Complexes dualisants sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ .**

**7.5.1. Unicité.**

PROPOSITION 7.5.1.1. *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $A$  un anneau noethérien. Si  $K$  et  $K'$  sont deux complexes dualisants sur  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ), alors il existe un objet inversible  $L \in D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  (cf. proposition 9.2 pour plus de précisions) tel que  $K'$  soit isomorphe à  $L \otimes_A^L K$ .*

LEMME 7.5.1.2. *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $A$  un anneau noethérien. On suppose que  $K \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  est dualisant. Pour tout  $F \in D_c^-(X_{\text{ét}}, A)$ , si  $D_K F \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , alors  $F \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ .*

Commençons par montrer que l'on peut supposer que  $D_K F = 0$ . Pour tout  $F \in D(X_{\text{ét}}, A)$ , notons  $\varepsilon_F: F \rightarrow D_K D_K F$  le morphisme de bidualité. Le morphisme composé

$$D_K F \xrightarrow{\varepsilon_{D_K F}} D_K D_K D_K F \xrightarrow{D_K(\varepsilon_F)} D_K F$$

est l'identité de  $D_K F$ . Comme  $D_K F$  est dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , le fait que  $K$  soit dualisant implique que  $\varepsilon_{D_K F}$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $D_K(\varepsilon_F)$  est un isomorphisme. Quitte à remplacer  $F$  par un cône de  $\varepsilon_F$ , on peut supposer que  $D_K F = 0$ .

Par l'absurde, supposons que  $F$  soit non nul. Il existe un morphisme non nul  $p: F \rightarrow F'$  avec  $F' \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (par exemple, le morphisme canonique  $F \rightarrow \tau_{\geq n} F$  pour un entier  $n$  bien choisi). Considérons le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p} & F' \\ \downarrow \varepsilon_F & & \varepsilon_{F'} \downarrow \sim \\ D_K^2 F & \xrightarrow{D_K^2(p)} & D_K^2 F' \end{array}$$

D'un côté,  $D_K^2 F$  est nul, donc  $\varepsilon_{F'} \circ p = 0$ , mais de l'autre,  $\varepsilon_{F'}$  est un isomorphisme, d'où  $p = 0$ , ce qui conduit à une contradiction.

Établissons la proposition 7.5.1.1 dans le cas des complexes dualisants sur  $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ , la démonstration qui suit vaudra aussi pour  $D_{\text{cff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  (à ceci près qu'il ne sera plus alors nécessaire de recourir au lemme ci-dessus). On pose  $Y = D_K K' \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Comme  $K$  est dualisant, on a aussi un isomorphisme privilégié  $K' = D_K Y$ . Pour tout  $Z \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ , on a un isomorphisme fonctoriel  $D_{K'} Z \simeq D_K(Z \otimes_A^L Y)$  dans  $D(X_{\text{ét}}, A)$ . Grâce au lemme, on en déduit que pour tout  $Z \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ , on a  $Z \otimes_A^L Y \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ . On a ainsi un triangle commutatif de catégories et de foncteurs (à isomorphismes près de foncteurs) :

$$\begin{array}{ccc} D_C^b(X_{\text{ét}}, A) & \xrightarrow{-\otimes_A^L Y} & D_C^b(X_{\text{ét}}, A) \\ & \searrow D_{K'} & \downarrow D_K \\ & & (D_C^b(X_{\text{ét}}, A))^{\text{opp}} \end{array}$$

Comme  $D_K$  et  $D_{K'}$  sont des équivalences, le foncteur  $-\otimes_A^L Y$  aussi. En particulier,  $Y$  est un complexe inversible. Notons  $Y'$  l'inverse de  $Y$ . On a un isomorphisme de foncteurs  $R\mathbf{Hom}(Y, -) \simeq Y' \otimes_A^L -$  (si un foncteur est une équivalence, son adjoint à droite est un quasi-inverse). Comme  $K' = D_K Y$ , on peut en déduire que  $K' \simeq Y' \otimes_A^L K$ .

### 7.5.2. Réduction au cas $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ .

**PROPOSITION 7.5.2.1.** *Soit  $A$  un anneau noethérien. Soit  $R \in D(A)$  un complexe ponctuellement dualisant fort. Soit  $J$  un idéal de  $A$ . On pose  $A' = A/J$  et  $R' = R\mathbf{Hom}_A(A', R) \in D(A')$ . Alors,  $R'$  est un complexe ponctuellement dualisant fort. Si on note  $D$  (resp.  $D'$ ) le foncteur  $R\mathbf{Hom}_A(-, R)$  (resp.  $R\mathbf{Hom}_{A'}(-, R')$ ) sur  $D(A)$  (resp.  $D(A')$ ) et  $\text{oub} : D(A') \rightarrow D(A)$  le foncteur de « restriction des scalaires », on a un isomorphisme canonique :*

$$\text{oub} \circ D' \simeq D \circ \text{oub} .$$

C'est essentiellement trivial.

**PROPOSITION 7.5.2.2.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $K \in D_{\text{cff}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $J$  un idéal de  $A$ . Soit  $R \in D(A)$  un complexe ponctuellement dualisant fort. On pose  $A' = A/J$  et  $R' = R\mathbf{Hom}_A(A', R) \in D(A')$ . On note  $K_R = K \otimes_A^L R \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$  et  $K_{R'} = K \otimes_A^L R' \in D_C^b(X_{\text{ét}}, A')$ . On note  $\text{oub} : D_C^b(X_{\text{ét}}, A') \rightarrow D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$  le foncteur conservatif évident. Alors, pour tout  $M \in D(X_{\text{ét}}, A')$ , on a un isomorphisme canonique dans  $D(X_{\text{ét}}, A)$  :*

$$\text{oub}(R\mathbf{Hom}_{A'}(M, K_{R'})) \simeq R\mathbf{Hom}_A(\text{oub}M, K_R) .$$

De plus, si  $K_R$  est un complexe dualisant sur  $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ , alors  $K_{R'}$  en est un sur  $D_C^b(X_{\text{ét}}, A')$  et la réciproque est vraie si  $J$  est nilpotent.

Les autres assertions en étant des conséquences faciles, il s'agit de montrer que l'on a un isomorphisme canonique  $R\mathbf{Hom}_A(A', K_R) \simeq \text{oub}(K_{R'})$  dans  $D_C^b(X_{\text{ét}}, A)$ , ce qui résulte de la proposition 10.1.2.

**COROLLAIRE 7.5.2.3.** *Pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que  $A = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier.*

Étant entendu que la propriété d'unicité des complexes dualisants a déjà été obtenu, il est évident que pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v\mathbf{Z}$  où  $\ell$  est un nombre premier et  $v \geq 1$ . Posons  $A' = A/\ell A$ . Notons  $R \in \mathbf{D}(A)$  un complexe ponctuellement dualisant fort. D'après la proposition 7.5.2.1, le complexe  $R' = R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(A', R) \in \mathbf{D}(A')$  en est un pour  $A'$ . Appliquant dans un premier temps la proposition 7.5.2.2 au cas où  $\Lambda \rightarrow A$  est  $\Lambda \rightarrow \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ , nous obtenons que  $K'' = R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$  est un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ . D'après le lemme 6.2.2.4, on a aussi un isomorphisme  $K'' \simeq K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ . Appliquons le théorème 7.1.2 dans le cas de la  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ -algèbre  $A'$  : on obtient que  $K'' \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} R'$  est un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A')$ . Cet objet  $K'' \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} R'$  s'identifie aussi à  $K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda R' = K_{R'}$ . D'après la proposition 7.5.2.2, il vient que  $K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda R = K_R$  est un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , ce qui achève la démonstration de ce corollaire.

**7.5.3. Démonstration du théorème 7.1.2.** L'énoncé d'unicité des complexes dualisants sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  a déjà été obtenu, cf. proposition 7.5.1.1. Pour l'énoncé d'existence, d'après le corollaire 7.5.2.3, on peut supposer que  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  avec  $\ell$  un nombre premier. On se donne  $K$  un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ . Soit  $A$  une  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ -algèbre noethérienne et  $R \in \mathbf{D}(A)$  un complexe ponctuellement dualisant fort. Notons  $D_X = R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(-, K)$  le foncteur de dualité sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  induit par  $K$  et  $D_A$  celui induit par  $R$  sur  $\mathbf{D}_c^b(A)$ . Notons  $D_{X,A}$  le foncteur  $R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(-, K_R)$  sur  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  où  $K_R = K \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda R$ . La proposition 10.1.3 ( $\Lambda$  est un corps) montre que l'on a un isomorphisme canonique, pour tout  $N \in \mathbf{D}_c^b(A)$  et  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$  :

$$D_{X,A}(N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F}) \simeq (D_A N) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} (D_X \mathcal{F}).$$

Par hypothèse,  $D_A N \in \mathbf{D}_c^b(A)$  et  $D_X \mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ , ce qui permet de déduire que  $D_{X,A}(N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F})$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , puis que  $D_{X,A}$  préserve  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  grâce au dévissage de la proposition 7.4.1. Avec les mêmes notations, les morphismes de bidualité  $N \rightarrow D_A^2 N$  et  $\mathcal{F} \rightarrow D_X^2 \mathcal{F}$  sont des isomorphismes, le morphisme de bidualité  $N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F} \rightarrow D_{X,A}^2(N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathcal{F})$  en est donc un aussi ; le même dévissage permet de conclure que  $D_{X,A}$  définit une involution de  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , c'est-à-dire que  $K_R$  est un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , ce qui achève la démonstration du théorème 7.1.2.

**7.6. Complexes dualisants sur  $\mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ .** L'assertion d'unicité des complexes dualisants sur  $\mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  a déjà été énoncée dans la proposition 7.5.1.1. L'essentiel de cette sous-section vise à établir le théorème suivant, dont on va déduire dans quelques lignes le théorème 7.1.3 :

**THÉORÈME 7.6.1.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Pour tous  $K$  et  $L$  objets de  $\mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , l'objet  $R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(K, L)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  et pour tout  $M \in \mathbf{D}^+(A)$ , le morphisme canonique est un isomorphisme :*

$$M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathbf{H}\mathbf{om}_\Lambda(K, M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_\Lambda L).$$

Si  $A'$  est une  $A$ -algèbre, que  $K$  et  $L$  sont des objets de  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , alors on a un isomorphisme canonique dans  $D^b(X_{\text{ét}}, A')$  :

$$A' \otimes_A^L \mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, L) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathbf{Hom}_{A'}(A' \otimes_A^L K, A' \otimes_A^L L).$$

Montrons que l'on peut déduire le théorème 7.1.3 de ce théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.2 qui a déjà été établi. Commençons par un lemme :

**LEMME 7.6.2.** *Soit  $A$  un anneau noethérien. Soit  $K \in D_{\text{c}}^-(A)$ . Alors  $K$  est nul si et seulement si pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , l'objet  $A/\mathfrak{m} \otimes_A^L K$  est nul.*

On suppose que  $K$  n'est pas nul. On veut montrer qu'il existe un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  tel que  $A/\mathfrak{m} \otimes_A^L K$  ne soit pas nul. Soit  $q$  le plus grand entier tel que  $H^q(K)$  soit non nul. On peut supposer que  $K$  est un complexe formé de  $A$ -modules projectifs de type fini et nuls en degrés strictement plus grands que  $q$ . Par construction du produit tensoriel dérivé, on a une surjection  $H^q(A/\mathfrak{m} \otimes_A^L K) \rightarrow H^q(K)/\mathfrak{m}H^q(K)$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  tel que  $H^q(K) \neq \mathfrak{m}H^q(K)$  ou encore, d'après le lemme de Nakayama, que  $H^q(K) \otimes_A A_{\mathfrak{m}} \neq 0$ . Le support de  $H^q(K)$  est un fermé non vide de  $\text{Spec}(A)$  (cf. [ÉGA 0<sub>I</sub> 1.7]), il contient un point fermé que l'on identifie à un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , et cet idéal maximal vérifie la condition voulue.

Soit  $K$  un complexe dualisant sur  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Grâce au lemme 6.2.2.4, il vient que  $K$  appartient à  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  et donc que  $K_A = A \otimes_{\Lambda}^L K$  appartient à  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . D'après le théorème 7.6.1, le foncteur  $D_A = \mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(-, K_A)$  préserve  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Il reste à montrer que le morphisme de bidualité  $L \rightarrow D_A^2 L$  est un isomorphisme pour tout  $L \in D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . D'après le lemme, il suffit de montrer qu'après produit tensoriel dérivé avec  $A/\mathfrak{m}$ , le morphisme  $L \rightarrow D_A^2 L$  induit un isomorphisme. D'après le théorème 7.6.1, le foncteur de dualité considéré commute au changement d'anneau, ainsi, après produit tensoriel avec  $A/\mathfrak{m}$ , on obtient le morphisme de bidualité pour  $A/\mathfrak{m} \otimes_A^L L$  dans  $D_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A/\mathfrak{m})$ . Bref, on peut supposer que l'anneau  $A$  est un corps. Dans ce cas, on peut conclure en utilisant le théorème 7.1.2.

**PROPOSITION 7.6.3.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors, pour toute immersion  $j$  d'un ouvert  $U$  de  $X$ , le foncteur  $\mathbf{R}j_*$  envoie  $D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .*

Soit  $K$  un complexe dualisant sur  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Pour des raisons évidentes,  $j^*K$  est un complexe dualisant sur  $D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ . On note  $D_X$  (resp.  $D_U$ ) les dualités induites par  $K$  et  $j^*K$  sur les catégories triangulées  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  (resp.  $D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ ). On a un isomorphisme canonique  $D_X \circ j_! \simeq \mathbf{R}j_* D_U$ . On en déduit que pour tout  $M \in D_{\text{c}}^b(U_{\text{ét}}, \Lambda)$ ,  $\mathbf{R}j_* M \simeq D_X j_! D_U M$ , ce qui permet de conclure que  $\mathbf{R}j_* M$  appartient à  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ .

**DÉFINITION 7.6.4.** Si  $X$  est un schéma noethérien,  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne et  $\mathcal{P}$  une partition galoisienne dirigeable de  $X$ , on note  $D(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$  la sous-catégorie triangulée de  $D(X_{\text{ét}}, A)$  dont les objets de cohomologie sont dans  $F\text{Cons}^{\mathcal{P}}(X, A)$ . On définit de même les variantes  $D^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ ,  $D_{\text{c}}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ , etc.

**PROPOSITION 7.6.5.** *Soit  $j: \mathcal{U} \rightarrow X$  une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que  $Rj_*$  applique  $D_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Pour toute partition galoisienne dirigeable  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{U}$ , il existe une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  de  $X$  et un entier  $c$  tel que  $Rj_*$  envoie  $D^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}}$  dans  $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$  et que pour tout  $q > c$  et  $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, \Lambda)$ , on ait  $R^q j_* \mathcal{F} = 0$ .*

On sait que la catégorie  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, \Lambda)$  est localement finie et admet même un nombre fini d'objets simples (et ceux-ci sont des faisceaux constructibles). Comme  $Rj_*$  applique  $D_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on peut choisir un entier  $c$  et une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  de  $X$  tels que pour tout objet simple  $\mathcal{F}$  de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, \Lambda)$ ,  $Rj_* \mathcal{F}$  appartienne à  $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$  et ait des objets de cohomologie nuls en les degrés strictement supérieurs à  $c$ . Ce résultat s'étend par dévissage aux objets noethériens de  $\text{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, \Lambda)$  puis à cette catégorie toute entière du fait de la commutation des foncteurs  $R^q j_*$  aux limites inductives filtrantes.

**COROLLAIRE 7.6.6.** *Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que  $i^!$  applique  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $D_c^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Pour toute partition galoisienne dirigeable  $\mathcal{P}$  sur  $X$ , il existe une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  sur  $Z$  et un entier  $c$  tel que  $i^!$  envoie  $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}}$  dans  $D^b(Z_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}'}$  et que pour tout  $q > c$  et  $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}}(X, \Lambda)$ , on ait  $\mathcal{H}^q(i^! \mathcal{F}) = 0$ .*

Si on note  $j: \mathcal{U} \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire, l'hypothèse sur  $i^!$  énoncée ici équivaut à celle exigée sur  $Rj_*$  dans la proposition 7.6.5. Quitte à raffiner  $\mathcal{P}$ , on peut supposer que les constituants de  $\mathcal{P}$  sont soit au-dessus de  $\mathcal{U}$ , soit au-dessus de  $Z$ . On peut ainsi écrire  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_U \cup \mathcal{P}_Z$  où  $\mathcal{P}_U$  et  $\mathcal{P}_Z$  sont des partitions galoisiennes de  $\mathcal{U}$  et  $Z$  respectivement. On applique la proposition 7.6.5 à  $\mathcal{P}_U$ . On obtient une partition galoisienne  $\mathcal{P}''$  de  $X$  telle que  $Rj_*$  applique  $D^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}_U}$  dans  $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)^{\mathcal{P}''}$  et un entier naturel  $c'$  tel que pour tout  $\mathcal{F} \in \text{FCons}^{\mathcal{P}_U}(\mathcal{U}, \Lambda)$ , on ait  $R^q j_* \mathcal{F} = 0$  pour  $q > c'$ . Quitte à raffiner  $\mathcal{P}''$ , on peut supposer que  $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}_Z'' \cup \mathcal{P}_U''$  comme ci-dessus. Quitte à raffiner  $\mathcal{P}_Z''$ , on peut supposer que cette partition galoisienne de  $Z$  raffine  $\mathcal{P}_Z$ . En utilisant le triangle distingué

$$i^! K \rightarrow i^* K \rightarrow i^* Rj_* j^* K \xrightarrow{+}$$

pour tout  $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on obtient aussitôt que  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_Z''$  et  $c = c' + 1$  conviennent.

**PROPOSITION 7.6.7.** *Soit  $j: \mathcal{U} \rightarrow X$  une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que  $Rj_*$  envoie  $D_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)$  dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors, pour toute  $\Lambda$ -algèbre noethérienne  $A$ ,  $Rj_*$  envoie  $D_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{ctf}}^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$ ) dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ). En outre, pour tout  $Y \in D_{\text{ctf}}^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$  et  $M \in D^+(A)$ , le morphisme canonique  $M \otimes_A^L Rj_* Y \rightarrow Rj_*(M \otimes_A^L Y)$  est un isomorphisme. Par ailleurs, si  $i: Z \rightarrow X$  est une immersion fermée complémentaire à  $j$ , alors  $i^!$  envoie  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ ) dans  $D_c^b(Z_{\text{ét}}, A)$  (resp.  $D_{\text{ctf}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ ), et pour tout  $M \in D^+(A)$  et  $Y \in D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , le morphisme canonique  $M \otimes_A^L i^! Y \rightarrow i^!(M \otimes_A^L Y)$  est un isomorphisme.*

L'énoncé sur  $i^!$  se déduit aussitôt de celui sur  $Rj_*$ , on se concentre donc sur celui-là. Pour montrer que  $Rj_*$  envoie  $D_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$  dans  $D_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , on peut supposer par un dévissage évident que  $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ , où  $\ell$  est un nombre premier. Par

conséquent, pour tout  $\Lambda$ -module  $N$  et tout objet  $Y \in \mathbf{D}_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on a un isomorphisme  $\mathbf{R}j_{*}(N \otimes_{\Lambda}^L Y) \simeq N \otimes_{\Lambda}^L \mathbf{R}j_{*}Y$  (cf. proposition 10.2.1). Si  $N$  a une structure de  $A$ -module de type fini, comme on sait que  $\mathbf{R}j_{*}Y$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ , on peut en déduire que  $\mathbf{R}j_{*}(N \otimes_{\Lambda}^L Y)$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ . D'après le dévissage de la proposition 7.4.1, il vient que  $\mathbf{R}j_{*}$  envoie  $\mathbf{D}_c^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$  dans  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ .

Montrons maintenant que  $\mathbf{R}j_{*}$  envoie  $\mathbf{D}_{\text{cf}}^b(\mathcal{U}_{\text{ét}}, A)$  dans  $\mathbf{D}_{\text{cf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Compte tenu du résultat précédent, il suffit de montrer que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau de  $A$ -modules plat et constructible sur  $\mathcal{U}$ , alors  $\mathbf{R}j_{*}\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , c'est-à-dire que  $M \otimes_A^L \mathbf{R}j_{*}\mathcal{F}$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . D'après la proposition 10.2.1, il suffit de montrer que  $\mathbf{R}j_{*}(\mathcal{F} \otimes_A M)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ , et si tel est le cas, la formule des coefficients universels énoncée ici sera satisfaite. Il existe une partition galoisienne dirigeable  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{U}$  tel que  $\mathcal{F}$  appartienne à  $\mathbf{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, A)$ . Pour tout  $A$ -module  $M$ ,  $\mathcal{F} \otimes_A M$  est un objet de  $\mathbf{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, A)$ , ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un entier  $c$  tel que pour tout objet  $\mathcal{G}$  de  $\mathbf{FCons}^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}, A)$ , on ait  $\mathbf{R}^q j_{*}\mathcal{G} = 0$  pour  $q > c$ , ce qui résulte de la proposition 7.6.5.

**DÉFINITION 7.6.8.** Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne. Soit  $K \in \mathbf{D}_{\text{cf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . On dira que  $K$  vérifie la condition (B) si pour toute partition galoisienne  $\mathcal{P}$  de  $X$ , il existe un entier  $c$  et une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  de  $X$  tels que pour tout  $L \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ ,  $\mathbf{RHom}_{\Lambda}(K, L)$  appartienne à  $\mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$ , que si on suppose que  $\mathcal{H}^q L = 0$  pour  $q > 0$ , alors  $\mathcal{H}^q \mathbf{RHom}_{\Lambda}(K, L) = 0$  pour  $q > c$  et enfin, que si  $L$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ , alors  $\mathbf{RHom}_{\Lambda}(K, L)$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$ .

**PROPOSITION 7.6.9.** Soit  $X$  un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors, tout objet  $K \in \mathbf{D}_{\text{cf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  vérifie la condition (B).

**LEMME 7.6.10.** Soit  $X$  un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée. Soit  $j: \mathcal{U} \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire. Soit  $K \in \mathbf{D}_{\text{cf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . On suppose que  $i^*K$  et  $j^*K$  satisfont la condition (B). Alors,  $K$  satisfait la condition (B).

Pour tout  $L \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ , on a un triangle distingué dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  :

$$i_* \mathbf{RHom}_{\Lambda}(i^*K, i^!L) \rightarrow \mathbf{RHom}_{\Lambda}(K, L) \rightarrow \mathbf{R}j_* \mathbf{RHom}_{\Lambda}(j^*K, j^!L) \xrightarrow{+}$$

Grâce au résultat de l'exercice 7.3.8, on peut combiner d'une part le résultat sur  $i^!$  du corollaire 7.6.6 et la condition (B) pour  $i^*K$  et d'autre part la proposition 7.6.5 concernant  $\mathbf{R}j_*$  et la condition (B) pour  $j^*K$  pour obtenir que  $K$  vérifie la condition (B).

Démontrons la proposition 7.6.9. La condition (B) définit une sous-catégorie triangulée de  $\mathbf{D}_{\text{cf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que si  $K$  est un faisceau de  $A$ -modules plat et constructibles, alors  $K$  satisfait la condition (B). L'existence d'un complexe dualisant étant une condition préservée par passage à un sous-schéma, le lemme précédent fournit un moyen de dévisser la situation pour se ramener au cas où  $K$  est localement constant. On est ramené au lemme suivant :

**LEMME 7.6.11.** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $A$ -modules constructible, plat et localement constant. Alors,  $\mathcal{F}$  satisfait la propriété (B).*

Tout d'abord, pour tout  $L \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , si  $\mathcal{H}^q L = 0$  pour  $q > 0$ , alors pour tout  $q > 0$ ,  $\mathcal{H}^q(\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(\mathcal{F}, L)) = 0$ , et si  $L \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ , alors  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, L) \in \mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Il reste donc à montrer que si  $\mathcal{P}$  est une partition galoisienne de  $X$ , il existe une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  de  $X$  telle que pour tout  $L \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ , alors  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(\mathcal{F}, L)$  appartient à  $L \in \mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$ . On peut supposer que  $\mathcal{P}$  est constitué d'un unique revêtement étale galoisien  $X' \rightarrow X$ . On choisit un revêtement étale galoisien  $X'' \rightarrow X$  tel que l'image inverse de  $\mathcal{F}$  sur  $X''$  soit un faisceau constant, puis un revêtement galoisien  $X''' \rightarrow X$  coiffant  $X'$  et  $X''$ . On voit aussitôt que la partition galoisienne  $\mathcal{P}' = (X''' \rightarrow X)$  de  $X$  convient.

Démontrons le théorème 7.6.1. Soit  $K \in \mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . D'après la proposition 7.6.9,  $K$  vérifie la condition (B). Soit  $L \in \mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Il existe une partition galoisienne  $\mathcal{P}$  de  $X$  telle que  $L$  appartienne à  $\mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}}$ . Pour tout  $A$ -module  $M$ , l'objet  $M \overset{L}{\otimes}_A L$  appartient encore à cette catégorie (et est borné indépendamment de  $M$ ). Il résulte de la condition (B) de  $K$  que  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, L)$  appartient à  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, A)$  et qu'il existe une partition galoisienne  $\mathcal{P}'$  telle que  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, M \overset{L}{\otimes}_A L)$  soit un objet de  $\mathbf{D}^b(X_{\text{ét}}, A)^{\mathcal{P}'}$  borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . La proposition 10.1.1 permet de déduire que  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, L)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  et que pour tout  $M \in \mathbf{D}^+(A)$ , le morphisme canonique  $M \overset{L}{\otimes}_A \mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, L) \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(K, M \overset{L}{\otimes}_A L)$  est un isomorphisme. On déduit aussitôt de cette formule la compatibilité au changement d'anneau  $A \rightarrow A'$  pour toute  $A$ -algèbre  $A'$ .

### 7.7. Élimination d'hypothèses noethériennes sur $A$ .

**DÉFINITION 7.7.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $X$  un schéma noethérien. On dit d'un complexe  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  qu'il est  $c$ -parfait s'il existe une partition finie  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des sous-schémas (réduits) telle que pour tout  $i \in I$ ,  $K|_{U_i} \in \mathbf{D}(U_{i,\text{ét}}, A)$  soit un complexe parfait (cf. [SGA 6 I 4.8]). On note  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  la sous-catégorie triangulée de  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  formée des complexes  $c$ -parfaits.

Bien entendu, pour tout morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$ , le foncteur  $A' \overset{L}{\otimes}_A - : \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A) \rightarrow \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A')$  induit un foncteur  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A) \rightarrow \mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A')$ . En outre, si  $A$  est un anneau noethérien,  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A) = \mathbf{D}_{\text{cft}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ .

**THÉORÈME 7.7.2.** *Soit  $A$  une  $\Lambda$ -algèbre commutative. Soit  $X$  un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit  $K$  un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_c^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ . Alors,  $A \overset{L}{\otimes}_\Lambda K$  est un complexe dualisant sur  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . En outre, le bifoncteur  $\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A$  préserve  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  et commute à tout changement d'anneau  $A \rightarrow A'$ .*

Le théorème 7.6.1 énonce que si  $B$  est une  $\Lambda$ -algèbre noethérienne, que  $K$  et  $L$  sont deux objets de  $\mathbf{D}_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, B)$ , alors pour toute  $B$ -algèbre  $A$ , on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\mathbf{Hom}_A(A \overset{L}{\otimes}_B K, A \overset{L}{\otimes}_B L) \simeq A \overset{L}{\otimes}_B \mathbf{R}\mathbf{Hom}_B(K, L).$$



Comme l'objet de droite appartient à  $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , il s'agit d'un isomorphisme dans  $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ . Bref, compte tenu du théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.3 (dont l'énoncé d'unicité des complexes dualisants vaut aussi pour  $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  avec la même démonstration), le théorème ci-dessus est ramené au lemme suivant :

**LEMME 7.7.3.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $X$  un schéma noethérien. Pour tout objet  $K$  de  $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ , il existe un sous-anneau noethérien (et même de type fini sur  $\mathbf{Z}$ )  $B$  de  $A$  et  $K' \in D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, B)$  tel que les objets  $K$  et  $A \otimes_B^L K'$  de  $D_{c\text{-parf}}^b(X_{\text{ét}}, A)$  soient isomorphes.*

Comme il nécessite un examen plus attentif de la notion de  $c$ -perfection, on repousse la démonstration de ce lemme à la fin de cette sous-section.

**LEMME 7.7.4.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $A$ -modules sur  $X_{\text{ét}}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une partition  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des sous-schémas réduits tels que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{F}|_{U_i}$  soit localement constant et que pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , le  $A$ -module  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  soit projectif de type fini ;*
- (ii) *Le faisceau de  $A$ -modules  $\mathcal{F}$  est constructible<sup>vi</sup> et pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ , le  $A$ -module  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  est projectif de type fini ;*
- (iii) *Le faisceau de  $A$ -modules  $\mathcal{F}$  est plat et constructible.*

Par définition des faisceaux constructibles, on a évidemment l'équivalence (i)  $\iff$  (ii). Si  $\mathcal{F}$  est constructible, les fibres  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  sont des  $A$ -modules de présentation finie, il est alors équivalent d'exiger que ces modules soient plats ou projectifs de type fini, ce qui montre l'équivalence (ii)  $\iff$  (iii).

On note  $\mathcal{C}$  la catégorie fibrée au-dessus du site  $X_{\text{ét}}$  qui à  $U \in X_{\text{ét}}$  fait correspondre la catégorie des faisceaux de  $A$ -modules sur  $U_{\text{ét}}$  et  $\mathcal{C}_c$  la sous- $X_{\text{ét}}$ -catégorie de  $\mathcal{C}$  formée des faisceaux de  $A$ -modules plats et constructibles. Nous allons utiliser la terminologie de [SGA 6 I 1.2]. Il est évident qu'un objet de  $\mathcal{C}$  qui est localement dans  $\mathcal{C}_c$  est dans  $\mathcal{C}_c$  et que  $\mathcal{C}_c$  est stable par noyau d'épimorphisme. D'après [SGA 4 IX 2.7], un faisceau de  $A$ -modules sur  $X_{\text{ét}}$  est constructible si et seulement s'il est isomorphe au conoyau d'un morphisme  $A_V \rightarrow A_U$  pour  $U$  et  $V$  deux  $X$ -schémas étales et de présentation finie. Les faisceaux  $A_U$  pour  $U$  étale et de présentation finis sur  $X$  sont donc évidemment plats et constructibles. Il résulte de ces résultats qu'un objet de  $\mathcal{C}_X$  est de  $\mathcal{C}_c$ -type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini de sections (ce qui revient à demander qu'il soit de  $\mathcal{C}_{0X}$ -type fini) et qu'un objet de  $\mathcal{C}_X$  est de  $\mathcal{C}_c$ -présentation finie si et seulement s'il est constructible (ce qui revient encore à demander qu'il soit de  $\mathcal{C}_{0X}$ -présentation finie). Il est par ailleurs évident que  $\mathcal{C}_c$  est quasi-relevable dans  $\mathcal{C}$  et même que  $\mathcal{C}_{0X}$  est quasi-relevable dans  $\mathcal{C}_X$ . Les catégories  $\mathcal{C}_c$  et  $\mathcal{C}$  vérifient donc les hypothèses de [SGA 6 I 2.0] et de [SGA 6 II 1.1] (mais en général pas de [SGA 6 I 4.0]). On dispose donc d'une notion de complexe pseudo-cohérent (relativement à  $\mathcal{C}_c$ ) et celle-ci peut-être définie de façon globale :

<sup>vi</sup>On utilise la définition donnée dans [SGA 4 IX 2.3] même si  $A$  n'est pas noethérien, et non pas la définition suggérée en note à cet endroit ; un faisceau constructible pour cette autre définition est ce que pourrions appeler un faisceau  $c$ -pseudo-cohérent.

**DÉFINITION 7.7.5.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $K \in \mathbf{C}(X_{\text{ét}}, A)$ . On dit que  $K$  est strictement  $c$ -pseudo-cohérent (resp. strictement  $c$ -parfait) si  $K$  est un complexe borné supérieurement (resp. borné) formé de faisceaux de  $A$ -modules plats et constructibles.

**DÉFINITION 7.7.6.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . On dit que  $K$  est  $c$ -pseudo-cohérent s'il est isomorphe à l'image dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  d'un complexe strictement  $c$ -pseudo-cohérent <sup>vii</sup>. Les objets  $c$ -pseudo-cohérents forment une sous-catégorie triangulée anonyme de  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ .

**REMARQUE 7.7.7.** La  $X_{\text{ét}}$ -catégorie  $\mathcal{C}$  contient aussi la  $X_{\text{ét}}$ -catégorie  $\mathcal{C}_0$  des faisceaux de  $A$ -modules facteurs directs de faisceaux libres de  $A$ -modules. Bien entendu,  $\mathcal{C}_0$  est contenue dans  $\mathcal{C}$ . Ainsi, les notions de stricte pseudo-cohérence (resp. stricte perfection) définies relativement à  $\mathcal{C}_0$  impliquent les notions correspondantes relativement à  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSITION 7.7.8.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $K$  est  $c$ -parfait ;
- (ii)  $K$  est  $c$ -pseudo-cohérent et de tor-dimension finie ;
- (iii)  $K$  est isomorphe à l'image dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  d'un complexe strictement  $c$ -parfait.

**LEMME 7.7.9.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une partition finie de  $X$  par des sous-schémas réduits. Soit  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . On suppose que pour tout  $i \in I$ , la restriction de  $K$  à  $U_i$  est  $c$ -pseudo-cohérente. Alors,  $K$  est  $c$ -pseudo-cohérent.

Par les arguments habituels, on se ramène au cas où la partition de  $X$  est constituée d'un ouvert  $U$  et d'un fermé  $Z$ . On note  $i: Z \rightarrow X$  et  $j: U \rightarrow X$  les immersions correspondantes. On dispose d'un triangle distingué dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  :

$$j_* j^* K \rightarrow K \rightarrow i_* i^* K \xrightarrow{+}$$

On sait que  $j^* K$  et  $i^* K$  sont  $c$ -pseudo-cohérents. Il est évident que  $j_*$  et  $i_*$  préservent la notion de faisceau plat et constructible ; au niveau des catégories triangulées, ces foncteurs préservent donc évidemment la notion de  $c$ -pseudo-cohérence. Les objets  $j_* j^* K$  et  $i_* i^* K$  sont  $c$ -pseudo-cohérents ; il en résulte que  $K$  aussi est  $c$ -pseudo-cohérent.

**LEMME 7.7.10.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . Si  $K$  est  $c$ -parfait, alors  $K$  est  $c$ -pseudo-cohérent.

D'après le lemme précédent, quitte à passer à un recouvrement fini par des localement fermés convenables, on peut supposer que  $K$  est parfait. Par conséquent,  $K$  est pseudo-cohérent (sous-entendu relativement à la  $X_{\text{ét}}$ -catégorie  $\mathcal{C}_0$ ) ; *a fortiori*,  $K$  est  $c$ -pseudo-cohérent.

Démontrons la proposition 7.7.8. L'implication (iii)  $\implies$  (i) est évidente. L'implication (i)  $\implies$  (ii) résulte essentiellement du lemme précédent ; il reste cependant à vérifier que si  $K$  est  $c$ -parfait, alors il est de tor-dimension finie. Supposons donc que  $K$  est  $c$ -parfait. Il existe un recouvrement fini  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des localement fermés tels que  $K|_{U_i}$  soit parfait pour tout  $i \in I$ . Pour obtenir (ii) pour  $K$ ,

<sup>vii</sup>En raison de l'existence de « résolutions globales », la définition globale donnée ici équivaut à la définition locale de [SGA 6 I 2.3].

il suffit de montrer que le complexe parfait  $K|_{U_i}$  est de tor-dimension finie, ce qui résulte aussitôt de [SGA 6 I 5.8.1]. Il reste à établir l'implication (ii)  $\implies$  (iii), la plus intéressante pour nous. Soit  $K \in \mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$  un complexe  $c$ -pseudo-cohérent et de tor-dimension finie. Par définition de la  $c$ -pseudo-cohérence, on peut remplacer si besoin est  $K$  par un complexe borné supérieurement formé de faisceaux de  $A$ -modules plats et constructibles. Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on peut considérer la troncature canonique  $\tau_{\leq n} K$  de  $K$ , si on note  $Z^n$  le noyau de  $K^n \rightarrow K^{n+1}$ , il s'agit du sous-complexe suivant de  $K$  :

$$\dots \rightarrow K^{n-2} \rightarrow K^{n-1} \rightarrow Z^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Comme  $K$  est de tor-dimension finie, il existe un entier  $a \in \mathbf{Z}$  tel que pour tout  $A$ -module  $M$ ,  $\tau_{\leq a}(K \otimes_A M)$  soit acyclique. En appliquant ceci avec  $M = A$ , on obtient une résolution plate de  $Z^a$  :

$$\dots \rightarrow K^{a-3} \rightarrow K^{a-2} \rightarrow K^{a-1} \rightarrow Z^a \rightarrow 0.$$

Ensuite, on obtient aussitôt que pour un  $A$ -module  $M$  quelconque, cette suite reste exacte après passage au produit tensoriel avec  $M$ . Par suite, pour tout  $i > 0$ ,  $\text{Tor}_i^A(Z^a, M) = 0$  pour tout  $A$ -module  $M$ , ce qui implique que  $Z^a$  est un faisceau de  $A$ -modules plat. Par ailleurs,  $Z^a$  est le conoyau du morphisme  $K^{a-2} \rightarrow K^{a-1}$ , donc  $Z^a$  est un faisceau constructible. Ainsi,  $Z^a$  est plat et constructible. Le complexe  $K$  est quasi-isomorphe au complexe strictement  $c$ -parfait

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow Z^a \rightarrow K^a \rightarrow K^{a+1} \rightarrow \dots,$$

ainsi  $K$  vérifie la condition (iii).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 7.7.3. Compte tenu de la proposition 7.7.8, il s'agit de montrer que si  $K \in \mathbf{C}(X_{\text{ét}}, A)$  est un complexe strictement  $c$ -parfait, alors  $A$  contient un sous-anneau  $A'$  de type fini sur  $\mathbf{Z}$  tel qu'il existe un complexe strictement  $c$ -parfait  $K' \in \mathbf{C}(X_{\text{ét}}, A')$  et un isomorphisme  $K \simeq A \otimes_{A'} K'$ . Ceci résulte aussitôt du lemme suivant :

**LEMME 7.7.11.** *Soit  $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$  un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant  $I$ . On en note  $A$  la limite inductive. Soit  $X$  un schéma noethérien. Alors, la donnée d'un faisceau de  $A$ -modules constructible (resp. plat et constructible) sur  $X$  équivaut à la donnée d'un faisceau de  $A_\alpha$ -modules constructible (resp. plat et constructible) sur  $X$  pour  $\alpha$  assez grand.*

Conformément aux grands principes de [ÉGA IV 8], ceci signifie d'une part que si  $F$  est un faisceau de  $A$ -modules constructible sur  $X$ , il existe  $\alpha \in I$  et  $F_\alpha$  un faisceau de  $A_\alpha$ -modules constructible sur  $X$  tel que  $F$  soit isomorphe à  $A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$  et d'autre part que si  $\alpha \in I$  et que  $F_\alpha$  et  $G_\alpha$  sont deux faisceaux de  $A_\alpha$ -modules constructibles sur  $X$ , si on note  $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$  et  $G_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$  pour tout  $\beta \geq \alpha$  et  $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$  et  $G = A \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$ , alors l'application canonique

$$\text{colim}_{\beta \geq \alpha} \text{Hom}_{A_\beta}(F_\beta, G_\beta) \rightarrow \text{Hom}_A(F, G)$$

est un isomorphisme. En outre, si  $\alpha \in I$  et que  $F_\alpha$  est un faisceau de  $A_\alpha$ -modules constructible sur  $X$ , alors  $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$  est plat si et seulement si pour  $\beta \geq \alpha$  assez grand,  $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$  est plat.

L'énoncé dans le cas non respé résulte de la description des faisceaux de  $B$ -modules constructibles (pour tout anneau commutatif  $B$ ) comme conoyau d'une flèche  $B_V \rightarrow B_U$  où  $U$  et  $V$  sont étales et de présentation finie sur  $X$ , et du fait que

le foncteur  $H^0(V, -)$  de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur  $X_{\text{ét}}$  vers celle des groupes abéliens commute aux limites inductives filtrantes [SGA 4 VII 3.3].

Il reste à montrer que si  $F_\alpha$  est un faisceau de  $A_\alpha$ -modules constructible tel que, avec les notations ci-dessus,  $F$  soit  $A$ -plat, alors pour  $\beta \geq \alpha$  assez grand,  $F_\beta$  est  $A_\beta$ -plat. En utilisant une décomposition de  $X$  en réunion de localement fermés connexes au-dessus desquels  $F_\alpha$  soit localement constant trivialisé par un revêtement étale, on peut supposer que  $X$  est connexe et que  $F_\alpha$  est localement constant et trivialisé par un revêtement étale  $Y \rightarrow X$ . Pour vérifier la platitude de  $F_\beta$ , il suffit de l'obtenir pour une fibre  $(F_\beta)_{\bar{x}}$ ; on est ainsi ramené au lemme suivant :

**LEMME 7.7.12.** *Soit  $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$  un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant  $I$ . On en note  $A$  la limite inductive. Soit  $X$  un schéma noethérien. Soit  $\alpha \in I$ , soit  $M_\alpha$  un  $A_\alpha$ -module de présentation finie. On suppose que  $M = A \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$  est  $A$ -plat. Alors, il existe  $\beta \geq \alpha$  tel que  $M_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$  soit  $A_\beta$ -plat.*

Les modules considérés étant de présentation finie, le module  $M$  (resp.  $M_\beta$ ) est plat si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre de type fini. On peut conclure en utilisant convenablement [ÉGA IV 8.5.2].

## 8. Produits tensoriels de complexes non bornés

### 8.1. K-platitude.

**DÉFINITION 8.1.1.** Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. On note  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  (resp.  $K(\mathcal{T}, \mathcal{A}), D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ ) la catégorie des complexes de  $\mathcal{A}$ -Modules (resp. la catégorie homotopique correspondance, la catégorie dérivée associée). On dispose d'un bifoncteur  $\otimes_{\mathcal{A}}$  sur  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  induisant un bifoncteur sur  $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ <sup>viii</sup>. Soit  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . On dit que  $K$  est  $K$ -plat si le foncteur triangulé  $K \otimes_{\mathcal{A}} - : K(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  préserve les quasi-isomorphismes, autrement dit que pour tout complexe acyclique  $L$  de  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , le complexe  $K \otimes_{\mathcal{A}} L$  est acyclique (cf. [Spaltenstein, 1988, définition 5.1]).

La sous-catégorie pleine de  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  formée des complexes  $K$ -plats est stable par limites inductives filtrantes, sommes directes et facteurs directs. En outre, la sous-catégorie pleine de  $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  correspondante est une sous-catégorie triangulée de  $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ .

**PROPOSITION 8.1.2.** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit  $K$  un complexe borné supérieurement formé de  $\mathcal{A}$ -modules plats (cf. [SGA 4 V 1]). Alors,  $K$  est  $K$ -plat.*

En utilisant les foncteurs de troncature bête et la stabilité par limites inductives filtrantes de la  $K$ -platitude, on se ramène au cas où  $K$  est borné. Comme la  $K$ -platitude définit une sous-catégorie triangulée de  $K(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , on peut procéder à un dévissage utilisant encore les troncatures bêtes pour se ramener au cas où  $K^q = 0$  pour  $q \neq 0$ . On est alors ramené à montrer que si  $F$  est un  $\mathcal{A}$ -Module plat et  $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un complexe acyclique, alors  $F \otimes_{\mathcal{A}} L$  est acyclique, ce qui résulte aussitôt de la définition de la platitude.

<sup>viii</sup>Plus précisément, si  $K$  et  $L$  sont deux complexes de  $\mathcal{A}$ -Modules, on peut définir un bicomplexe dont la composante de bidegré  $(p, q)$  est  $K^p \otimes_{\mathcal{A}} L^q$  et alors  $K \otimes_{\mathcal{A}} L$  est le complexe simple (défini en termes de sommes) associé à ce bicomplexe. Nous n'imposerons pas ici de convention de signes au lecteur.

## 8.2. Résolutions K-plates.

### 8.2.1. Définition du produit tensoriel dérivé.

**THÉORÈME 8.2.1.1.** Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Il existe un foncteur  $\rho: C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  et une transformation naturelle  $\rho K \rightarrow K$  pour  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  telle que :

- pour tout  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ ,  $\rho K$  soit K-plat ;
- pour tout  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , le morphisme  $\rho K \rightarrow K$  soit un quasi-isomorphisme ;
- le foncteur  $\rho$  commute aux limites inductives filtrantes.

Ce théorème sera démontré plus bas. Déduisons-en aussitôt la proposition triviale suivante, qui constitue notre définition du produit tensoriel sur  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  :

**PROPOSITION 8.2.1.2.** Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur dérivé total à gauche de  $\otimes_{\mathcal{A}}: C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \times C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  existe. Plus précisément, pour tous  $K$  et  $L$  dans  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , on note  $K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} L = (\rho K) \otimes_{\mathcal{A}} (\rho L) \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  ; ce bifoncteur  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$  commute aux limites inductives filtrantes en chaque argument et, préservant les quasi-isomorphismes, il induit un bifoncteur du même nom  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \times D(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  ; la transformation naturelle évidente  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} \rightarrow \otimes_{\mathcal{A}}$  fait de  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$  le foncteur dérivé total à gauche de  $\otimes_{\mathcal{A}}$  (cf. [Goerss & Jardine, 1999, remark 7.4, Chapter II] pour une définition des foncteurs dérivés totaux en termes d'extensions de Kan). En outre, si  $K$  et  $L$  sont deux objets de  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  dont l'un au moins est K-plat, alors le morphisme canonique  $K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} L \rightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} L$  est un isomorphisme dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ .

**8.2.2. Modules sur un anneau.** On se place ici dans le cas particulier où le topos  $\mathcal{T}$  est ponctuel. On peut identifier les faisceaux de  $\mathcal{A}$ -modules à des  $A$ -modules pour un anneau  $A$ . Le lemme suivant démontre le théorème 8.2.1.1 dans ce cas particulier.

**LEMME 8.2.2.1.** Pour tout anneau commutatif  $A$ , on peut définir un foncteur  $\rho_A$  et une transformation naturelle  $\rho_A \rightarrow \text{Id}$  de foncteurs de la catégorie  $C(A)$  des complexes de  $A$ -modules dans elle-même telle que  $\rho_A$  commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes, que pour tout  $K \in C(A)$ , le morphisme de complexes  $\rho_A(K) \rightarrow K$  soit un quasi-isomorphisme, que pour tout entier relatif  $n$ ,  $\rho_A(K)^n$  soit un  $A$ -module libre, et que  $\rho_A(K)$  soit la limite inductive filtrante de ses sous-complexes bornés formés de  $A$ -modules libres (en particulier,  $\rho_A(K)$  est K-plat).

On peut définir de telles résolutions K-plates  $\rho_A$  pour tout anneau commutatif  $A$  de sorte que si  $A \rightarrow A'$  est un morphisme d'anneaux, on ait un morphisme fonctoriel  $\rho_A(K) \rightarrow \rho_{A'}(K)$  dans  $C(A)$  pour  $K \in C(A')$ , ce morphisme vérifiant une compatibilité évidente à la composition des morphismes d'anneaux.

On note  $G$  le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $\text{oub}$  de la catégorie des  $A$ -modules vers celle des ensembles pointés. On pose  $F = G \circ \text{oub}$ . Si  $M$  est un  $A$ -module,  $FM$  est le quotient du  $A$ -module libre de base l'ensemble  $M$  par le sous-module libre de rang 1 engendré par le zéro de  $M$ . Le morphisme d'adjonction  $FM \rightarrow M$  est un épimorphisme. Pour tout  $A$ -module  $M$ , on note  $Z_0$  le noyau de cet épimorphisme  $FM \rightarrow M$  et on pose  $(F'M)_0 = FM$ . Ensuite, de façon évidente, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on peut définir par récurrence un objet  $(F'M)_n = FZ_{n-1}$ , un morphisme  $d_n: (F'M)_n \rightarrow (F'M)_{n-1}$  et le noyau

$Z_n = \text{Ker} d_n$ . Il est évident que l'on définit ainsi un complexe  $F'M$  concentré en degrés négatifs ou nuls, muni d'une augmentation  $F'M \rightarrow M$  qui soit un quasi-isomorphisme. Comme  $F$  préserve les monomorphismes, on voit que  $F'$  préserve aussi les monomorphismes.

Soit  $K \in C(A)$ . Le foncteur  $F'$  défini ci-dessus n'est pas additif (à moins que  $A = 0$ ), mais il est tel que  $F'(0) = 0$ . Ainsi, si on applique terme à terme le foncteur  $F'$  aux objets  $K_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on obtient un complexe double dans la catégorie des  $A$ -modules. On note  $\rho_A(K)$  le complexe simple associé (défini en termes de sommes). On dispose bien entendu d'un morphisme d'augmentation  $\rho_A(K) \rightarrow K$ . Il est évident que  $\rho_A$  commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes et que pour tout entier  $n$ ,  $\rho_A(K)^n$  soit une  $A$ -module libre. Si  $K$  est borné supérieurement, le fait que pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , le morphisme  $\rho_A(K^n) \rightarrow K^n$  soit un quasi-isomorphisme implique, par passage au complexe simple, que  $\rho_A(K) \rightarrow K$  est un quasi-isomorphisme. Comme tout complexe de  $A$ -module peut s'écrire comme une limite inductive filtrante de sous-complexes bornés supérieurement, il vient que pour tout  $K \in C(A)$ , le morphisme  $\rho_A(K) \rightarrow K$  est un quasi-isomorphisme. Comme  $\rho_A$  préserve les monomorphismes et commute aux limites inductives filtrantes, pour montrer que  $\rho_A(K)$  est une limite inductive filtrante de ses sous-complexes bornés formés de  $A$ -modules libres, on peut supposer que  $K$  est borné supérieurement : le résultat est alors trivial puisque, dans ce cas,  $\rho_A(K)$  est un complexe borné supérieurement formé de  $A$ -modules libres.

La dernière assertion concernant le changement d'anneau étant évidente, on peut considérer que le lemme a été démontré.

**8.2.3. Préfaisceaux de Modules.** On suppose maintenant que  $\mathcal{T}$  est le topos des préfaisceaux sur une petite catégorie  $\mathcal{C}$ . Le faisceau d'anneaux  $\mathcal{A}$  est un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur  $\mathcal{C}$ .

Soit  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ ,  $K(U)$  s'identifie à un objet de  $C(\mathcal{A}(U))$ . On applique la construction du lemme 8.2.2.1 à l'anneau  $\mathcal{A}(U)$ . On pose  $(\rho K)(U) = \rho_{\mathcal{A}(U)}(K(U)) \in C(\mathcal{A}(U))$ . Si  $V \rightarrow U$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}$ , on définit un  $\mathcal{A}(U)$ -morphisme  $(\rho K)(U) \rightarrow (\rho K)(V)$  de la façon suivante :

$$\rho_{\mathcal{A}(U)}(K(U)) \rightarrow \rho_{\mathcal{A}(U)}(K(V)) \rightarrow \rho_{\mathcal{A}(V)}(K(V))$$

où le morphisme de gauche est induit par la structure de complexes de préfaisceaux de  $\mathcal{A}$ -modules sur  $K$  et la flèche de droite par la compatibilité de la construction du lemme 8.2.2.1 au changement d'anneau. D'après ce lemme, ces morphismes de transition définissent une structure de préfaisceau sur  $\rho K$ . Ainsi, on a défini un objet  $\rho K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  et il est muni d'un morphisme fonctoriel  $\rho K \rightarrow K$ .

Par construction, on peut vérifier les vertus présumées de  $\rho$  terme à terme ; ainsi, ce foncteur  $\rho$  permet d'établir le théorème 8.2.1.1 dans le cas où le topos est un topos de préfaisceaux.

**8.2.4. Faisceaux de Modules.**

**PROPOSITION 8.2.4.1.** *Soit  $\mathcal{T}$  le topos des faisceaux sur un site dont la catégorie sous-jacente est notée  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathcal{T}'$  le topos des préfaisceaux d'ensembles sur  $\mathcal{C}$ . Soit  $\mathcal{A}'$  un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur  $\mathcal{C}$ . On note  $\mathcal{A}$  le faisceau d'anneaux  $\mathcal{A}'$  sur  $\mathcal{T}$  associé à  $\mathcal{A}'$ . Si  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  est  $K$ -plat, alors  $\mathcal{A}K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est  $K$ -plat.*

**LEMME 8.2.4.2.** *Avec les notations de la proposition 8.2.4.1, si  $K$  et  $L$  sont des objets de  $C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  tel que  $aK$  soit nul dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , alors  $a(K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} L)$  (où le produit tensoriel dérivé au-dessus de  $\mathcal{A}'$  est celui défini plus haut dans le cas des préfaisceaux) est nul dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ .*

La compatibilité du produit tensoriel dérivé sur  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  avec les limites inductives filtrantes calculées dans  $C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  permet de supposer que  $L$  est un complexe borné supérieurement (utiliser les troncatures canoniques). Quitte à remplacer  $L$  par la résolution  $K$ -plate  $\rho_{\mathcal{A}'} L$  sus-définie, on peut ensuite supposer que  $L$  est borné supérieurement et constitué de  $\mathcal{A}'$ -Modules plats. En utilisant les troncatures bêtes sur ce complexe  $L$ , on peut supposer de plus que  $L$  est borné. Finalement, en utilisant les triangles distingués dans  $K(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  donnés par les troncatures bêtes, on peut finalement supposer que  $L$  est formé d'un unique  $\mathcal{A}'$ -Module plat placé en degré 0.

Bref, il faut montrer que si  $L$  est un  $\mathcal{A}'$ -Module plat et que  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  est tel que  $aK$  soit un complexe acyclique dans  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , alors le complexe de faisceaux  $a(K \otimes_{\mathcal{A}'} L)$  est acyclique. On a un isomorphisme  $a(K \otimes_{\mathcal{A}'} L) \simeq aK \otimes_{\mathcal{A}} aL$ , donc pour conclure que  $a(K \otimes_{\mathcal{A}'} L)$  est acyclique, il suffit de montrer que le  $\mathcal{A}$ -Module  $aL$  est plat, ce qui est vrai d'après [SGA 4 v 1.7.1].

Montrons la proposition 8.2.4.1. Notons  $\mathcal{L}$  la sous-catégorie triangulée de  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  formée des complexes qui sont annulés par le foncteur faisceau associé  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}') \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Le foncteur induit  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')/\mathcal{L} \rightarrow D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est évidemment une équivalence de catégories triangulées. D'après le lemme, le bifoncteur  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'}$  sur  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  passe au quotient par  $\mathcal{L}$  pour définir un bifoncteur sur  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . La proposition en résulte aussitôt. En effet, soit  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$   $K$ -plat, soit  $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  tel que  $L$  soit nul dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . On peut identifier  $L$  à un objet  $L'$  de  $C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  et cet objet  $L'$  appartient à la sous-catégorie triangulée  $\mathcal{L}$  de  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ . Le lemme montre que  $K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} L'$  appartient à  $\mathcal{L}$ , autrement dit,  $K$  étant  $K$ -plat, que  $K \otimes_{\mathcal{A}'} L'$  appartient à  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire que le complexe de faisceaux  $aK \otimes_{\mathcal{A}} L$  est acyclique, ce qui montre que  $aK \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est  $K$ -plat.

**COROLLAIRE 8.2.4.3.** *Avec les notations de la proposition 8.2.4.1, le foncteur  $\rho_{\mathcal{A}}$  qui à un complexe  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  associe  $a\rho_{\mathcal{A}'} K'$  où  $K'$  est le  $\mathcal{A}'$ -Module défini par  $K$  est un foncteur de résolution  $K$ -plate sur  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  vérifiant les conditions du théorème 8.2.1.1. Ainsi, on dispose d'un bifoncteur  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$  sur  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  et d'un isomorphisme bifonctoriel*

$$aK \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} aL \simeq a(K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}'} L)$$

dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  pour tous  $K$  et  $L$  dans  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ .

Avec l'énoncé de ce corollaire s'achève la démonstration du théorème 8.2.1.1.

### 8.3. Compléments.

#### 8.3.1. Homomorphismes internes.

**DÉFINITION 8.3.1.1.** Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. On note  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}$  le foncteur adjoint à droite du foncteur produit tensoriel  $\otimes_{\mathcal{A}}$  sur  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , c'est-à-dire que pour  $X, Y$  et  $Z$  des objets de  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{T}, \mathcal{A})}(X \otimes_{\mathcal{A}} Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{T}, \mathcal{A})}(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)) .$$

On rappelle qu'un objet  $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est  $K$ -injectif si pour tout complexe acyclique  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , le complexe de groupes abéliens  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(K, L)$  (complexe simple associé au complexe double  $(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^{-p}, L^q))_{p,q}$ ) est acyclique et qu'il existe des foncteurs de résolution  $K$ -injectives <sup>ix</sup>.

La proposition suivante, indiquée pour mémoire, est essentiellement triviale :

**PROPOSITION 8.3.1.2.** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}$  sur  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  admet un foncteur dérivé total à droite  $\mathbf{RHom}_{\mathcal{A}} : \mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})^{\text{opp}} \times \mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , adjoint à droite de  $\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}}$ . En outre, si  $K$  et  $L$  sont des objets de  $C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , avec  $L$   $K$ -injectif, alors le morphisme canonique*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L) \rightarrow \mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}(K, L)$$

*est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ ; si on suppose de plus que  $K$  est  $K$ -plat, alors  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)$  est  $K$ -injectif. Enfin, si  $K, L$  et  $M$  sont trois objets de  $\mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , on a un isomorphisme fonctoriel dans  $\mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  « cher à Cartan » :*

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}(K \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} L, M) \simeq \mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}(K, \mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}(L, M)).$$

### 8.3.2. Compatibilité aux images inverses.

**DÉFINITION 8.3.2.1.** Soit  $u : (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Le foncteur  $u^* : C(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  admet un foncteur dérivé total à gauche que l'on note  $Lu^*$  (construit en appliquant  $u^*$  à une résolution  $K$ -plate).

**PROPOSITION 8.3.2.2.** *Soit  $u : (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Alors, pour tout  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$   $K$ -plat,  $u^*K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est  $K$ -plat.*

Pour démontrer cette proposition, il est commode d'introduire une nouvelle définition :

**DÉFINITION 8.3.2.3.** Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . On dit que  $K$  est universellement acyclique si pour tout  $\mathcal{A}$ -module  $L$ , le complexe  $K \otimes_{\mathcal{A}} L$  est acyclique.

**LEMME 8.3.2.4.** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $K$  est universellement acyclique ;
- (i') pour tout  $L \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ , le complexe  $K \otimes_{\mathcal{A}} L$  est acyclique ;
- (ii)  $K$  est  $K$ -plat et acyclique.

L'équivalence entre (i) et (i') est facile : supposant (i), on montre d'abord que la condition énoncée dans (i') est vérifiée par les complexes  $L$  bornés (dévissage), puis par tous les complexes (passage à la limite inductive utilisant les troncatures bêtes et canoniques). L'implication (i)  $\implies$  (ii) est triviale. L'implication (ii)  $\implies$  (i) résulte aussitôt de la proposition 8.2.1.2.

De ce lemme, on déduit le suivant :

<sup>ix</sup>Ce résultat est énoncé dans [Spaltenstein, 1988, §4] dans le cadre des espaces topologiques annelés, mais la démonstration peut être étendue au cas des topos annelés. Le principe de la démonstration est similaire à celui utilisé par Grothendieck pour montrer l'existence de suffisamment d'injectifs dans les catégories de faisceaux dans [Grothendieck, 1957, §I.10]; dans le contexte de l'algèbre homotopique, cet argument est connu sous le nom de « raisonnement du petit objet ». On peut trouver une démonstration pour le cas qui nous intéresse dans [Hovey, 2001].



**LEMME 8.3.2.5.** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit  $K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Si  $K' \rightarrow K$  est un quasi-isomorphisme, avec  $K'$   $K$ -plat, alors  $K$  est  $K$ -plat si et seulement si le cône de  $K' \rightarrow K$  est universellement acyclique.*

**LEMME 8.3.2.6.** *Soit  $u: (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Si on note  $\rho_{\mathcal{A}'}$  « le » foncteur de résolution  $K$ -plate construit dans le paragraphe 8.2.4, alors pour tout  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ , l'objet  $u^* \rho_{\mathcal{A}'} K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est  $K$ -plat.*

Compte tenu du procédé de construction de  $\rho_{\mathcal{A}'}$  par extension aux complexes de faisceaux d'une construction pour les faisceaux par passage au complexe simple, on peut supposer que  $K$  est constitué d'une unique faisceau placé en degré 0. Il s'agit de montrer que pour tout  $\mathcal{A}'$ -Modules  $F$ , le complexe (borné supérieurement)  $u^* \rho_{\mathcal{A}'} F$  est constitué de  $\mathcal{A}$ -Modules plats. En revenant à la construction du lemme 8.2.2.1, on peut observer pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $(\rho_{\mathcal{A}'} F)^n$  est un faisceau de  $\mathcal{A}'$ -Modules libres sur un faisceau d'ensembles pointés ; cette propriété étant évidemment préservée après application de  $u^*$ , on obtient que  $(u^* \rho_{\mathcal{A}'} F)^n$  est un  $\mathcal{A}$ -Module plat.

Les lemmes précédents réduisent la proposition 8.3.2.2 au lemme suivant :

**LEMME 8.3.2.7.** *Soit  $u: (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Si  $K \in C(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  est universellement acyclique, alors  $u^* K \in C(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  est universellement acyclique.*

On peut démontrer ce lemme en suivant la méthode des limites inductives locales utilisée dans [SGA 4 v 8.2.9] ; en présence d'une famille conservative de foncteurs fibres, il est possible de faire plus simple.

**COROLLAIRE 8.3.2.8.** *Si  $u$  et  $v$  sont des morphismes composables de topos annelés en anneaux commutatifs, alors on a un isomorphisme de foncteurs  $Lv^* \circ Lu^* \xrightarrow{\sim} L(u \circ v)^*$ .*

**COROLLAIRE 8.3.2.9.** *Soit  $u: (\mathcal{T}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{T}', \mathcal{A}')$  un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Pour tous  $K$  et  $L$  objets de  $D(\mathcal{T}', \mathcal{A}')$ , on a un isomorphisme canonique*

$$Lu^* K \otimes_{\mathcal{A}}^L Lu^* L \simeq Lu^* (K \otimes_{\mathcal{A}'}^L L)$$

dans  $D(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ .

## 9. Complexes inversibles

**PROPOSITION 9.1.** *Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $X \in D(A)$ . Soit  $Y \in D(A)$ . Soit  $X \otimes_A^L Y \simeq A$  un isomorphisme dans  $D(A)$ . Alors, il existe une fonction localement constante  $k: \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbf{Z}$ , un  $A$ -module inversible  $L$  et des isomorphismes  $X \simeq L[k]$  et  $Y \simeq L^\vee[-k]$  (le foncteur de décalage  $[k]$  étant défini de façon évidente).*

Ce résultat apparaît dans [Hartshorne, 1966, lemma 3.3, Chapter V] sous des hypothèses supplémentaires disant que  $A$  est noethérien et que  $X$  et  $Y$  sont dans  $D_c^-(A)$ . Cette version implique évidemment une autre où on demande à  $A$  d'être noethérien et à  $X$  et  $Y$  d'être des complexes parfaits. Il est alors facile de supprimer l'hypothèse noethérienne (cf. [ÉGA IV 8]). Bref, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que dans les conditions de la proposition ci-dessus, le complexe  $X$  (et donc  $Y$  par symétrie des rôles) est un complexe parfait. On dit d'un

objet  $X$  de  $\mathbf{D}(A)$  qu'il est de présentation finie si le foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(X, -)$  de  $\mathbf{D}(A)$  vers la catégorie des groupes abéliens commute aux sommes directes (infinies). On peut montrer que  $X \in \mathbf{D}(A)$  est un complexe parfait si et seulement s'il est de présentation finie<sup>x</sup>. De l'isomorphisme  $X \otimes_A^{\mathbf{L}} Y \simeq A$ , on tire un isomorphisme de foncteurs  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, -) \simeq Y \otimes_A^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ . Comme le foncteur  $Y \otimes_A^{\mathbf{L}} -$  commute évidemment aux sommes directes, c'est aussi le cas du foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(X, -)$ , ce qui montre que  $X$  est de présentation finie : il s'agit d'un complexe parfait.

**PROPOSITION 9.2.** *Soit  $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$  un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit  $X \in \mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Soit  $Y \in \mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Soit  $X \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbf{L}} Y \simeq \mathcal{A}$  un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ . Alors, l'objet final de  $\mathcal{T}$  est recouvert par des objets  $U$  tels que  $X|_U$  et  $Y|_U$  puissent être induits par des complexes parfaits  $X'$  et  $Y'$  de  $\mathbf{D}(\mathcal{A}(U))$  et que l'on ait un isomorphisme  $X' \otimes_{\mathcal{A}(U)}^{\mathbf{L}} Y' \simeq \mathcal{A}(U)$  compatible à l'isomorphisme donné ; la forme des complexes  $X'$  et  $Y'$  est donc connue grâce à la proposition 9.1.*

Démontrons la proposition 9.2. On peut supposer que  $\mathcal{T}$  est le topos des faisceaux sur un site  $\mathcal{C}$ . Notons  $\mathcal{T}'$  le topos des préfaisceaux sur la catégorie sous-jacente au site  $\mathcal{C}$ , elle aussi notée  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{A}'$  le préfaisceau d'anneaux sur  $\mathcal{C}$  défini par  $\mathcal{A}$ . On peut identifier  $X \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbf{L}} Y$  au faisceau associé à  $\rho_{\mathcal{A}'} X \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} Y$  où  $\rho_{\mathcal{A}'}$  est le foncteur de résolution K-plate défini dans le paragraphe 8.2.3. Ainsi, l'isomorphisme donné  $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} X \otimes_{\mathcal{A}}^{\mathbf{L}} Y$  peut être représenté localement par un 0-cocycle  $s$  de  $(\rho_{\mathcal{A}'} X \otimes_{\mathcal{A}'} \rho_{\mathcal{A}'} Y)(U) = \rho_{\mathcal{A}(U)}(X(U)) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \rho_{\mathcal{A}(U)}(Y(U))$ . Soit  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$  sur lequel une telle description est possible. Par construction de  $\rho_{\mathcal{A}(U)}$ , il vient qu'il existe des sous-complexes bornés formés de  $\mathcal{A}(U)$ -modules libres de type fini  $X'$  de  $\rho_{\mathcal{A}(U)}(X(U))$  et  $Y'$  de  $\rho_{\mathcal{A}(U)}(Y(U))$  tel que  $X' \otimes_{\mathcal{A}(U)} Y'$  contienne  $s$ . Notons  $\mathcal{T}|_U$  le topos des faisceaux sur  $\mathcal{T}$  au-dessus de  $U$  (un site sous-jacent est donné par la catégorie  $\mathcal{C}/U$ ). On dispose d'un morphisme de topos annelés évident  $\pi$  de  $(\mathcal{T}|_U, \mathcal{A}|_U)$  vers le topos ponctuel muni de l'anneau  $\mathcal{A}(U)$ . Posons  $X'' = \pi^* X'$  et  $Y'' = \pi^* Y'$  : ce sont des complexes strictement parfaits sur  $\mathcal{T}|_U$ . On dispose de morphismes évidents  $X'' \rightarrow X|_U$  et  $Y'' \rightarrow Y|_U$  dans  $\mathbf{D}(\mathcal{T}|_U, \mathcal{A}|_U)$  et d'après ce qui précède, on a un morphisme  $\mathcal{A}|_U \rightarrow X'' \otimes_{\mathcal{A}|_U} Y''$  factorisant l'isomorphisme  $\mathcal{A}|_U \simeq X|_U \otimes_{\mathcal{A}|_U}^{\mathbf{L}} Y|_U$ . Bref,  $\mathcal{A}|_U \simeq X|_U \otimes_{\mathcal{A}|_U}^{\mathbf{L}} Y|_U$  est un facteur direct de  $X'' \otimes_{\mathcal{A}|_U} Y''$ . Par ailleurs, l'isomorphisme  $\mathcal{A}|_U \xrightarrow{\sim} X|_U \otimes_{\mathcal{A}|_U}^{\mathbf{L}} Y|_U$  se factorise aussi par  $X'' \otimes_{\mathcal{A}|_U} Y|_U$ , donc  $\mathcal{A}|_U$  est un facteur direct de  $X'' \otimes_{\mathcal{A}|_U} Y|_U$  ; en tensorisant ce fait avec  $X|_U$ , on obtient que  $X|_U$  est un facteur direct de  $X''$ . Soit  $p : X'' \rightarrow X''$  un projecteur dont l'image soit isomorphe à  $X|_U$ . Comme  $X'$  et  $Y'$  sont (strictement) parfaits, quitte à remplacer  $U$  par une famille d'objets le recouvrant, on peut supposer que  $p$  provient d'un projecteur  $\tilde{p}$  sur  $X'$  dans  $\mathbf{D}(\mathcal{A}(U))$ . L'image de  $\tilde{p}$  est un complexe parfait  $\tilde{X}$

<sup>x</sup>Il s'agit d'un bon exercice. Toutefois, on peut aussi obtenir ce critère en utilisant des principes généraux. L'objet  $A$  de  $\mathbf{D}(A)$  est un générateur de présentation finie (*i.e.* le foncteur cohomologique  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(A, -)$  commute aux sommes directes et est conservatif) ; la sous-catégorie triangulée de  $\mathbf{D}(A)$  formée des objets de présentation finie est donc l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie triangulée engendrée par  $A$ , c'est-à-dire la sous-catégorie des complexes parfaits : combiner [Neeman, 2001, proposition 8.4.1], [Neeman, 2001, lemma 4.4.5] et [Neeman, 2001, remark 4.2.6].

dans  $D(\mathcal{A}(U))$  induisant  $X|_U$ . De même, on peut supposer que  $Y|_U$  est induit par un complexe parfait de  $\mathcal{A}(U)$ -modules  $\tilde{Y}$ . Quitte à raffiner le recouvrement de  $U$ , on peut donc supposer que l'isomorphisme  $\mathcal{A}|_U \xrightarrow{\sim} X|_U \otimes_{\mathcal{A}|_U} Y|_U$  est induit par un morphisme  $\tilde{s}: \mathcal{A}(U) \rightarrow \tilde{X} \otimes_{\mathcal{A}(U)} \tilde{Y}$ . Notons  $C$  un cône de  $\tilde{s}$ . Le complexe  $C$  est parfait et vérifie  $\pi^*C \simeq 0$ . Il en résulte que quitte à raffiner le recouvrement de  $U$ , on peut supposer que  $C$  est acyclique, c'est-à-dire que  $\tilde{s}$  est un isomorphisme.

## 10. Coefficients universels

### 10.1. Énoncés pour $R\mathbf{Hom}$ .

**PROPOSITION 10.1.1.** *Soit  $Z$  un schéma noethérien. Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien. Soit  $X \in D_c^-(Z_{\text{ét}}, A)$ . Soit  $Y \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ . On suppose ou bien que  $A$  est un corps ou bien que  $R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . Alors, pour tout  $M \in D^+(A)$ , le morphisme canonique*

$$M \otimes_A^L R\mathbf{Hom}(X, Y) \rightarrow R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y)$$

*est un isomorphisme. En outre, si on est dans le cas où  $R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ , alors  $R\mathbf{Hom}(X, Y) \in D_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ .*

On note  $u_M: M \otimes_A^L R\mathbf{Hom}(X, Y) \rightarrow R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y)$  le morphisme canonique, pour tout  $M \in D^+(Z_{\text{ét}}, A)$ . L'hypothèse selon laquelle  $X \in D_c^-(Z_{\text{ét}}, A)$  implique que les foncteurs  $\mathbf{Ext}^q(X, -)$  commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux de  $A$ -modules sur  $Z$ . En particulier, le foncteur  $R\mathbf{Hom}(X, -)$  de la catégorie  $D^+(Z_{\text{ét}}, A)$  dans elle-même commute aux sommes directes représentables. On en déduit que  $u_M$  est un isomorphisme si  $M$  est un  $A$ -module libre. Par suite, si  $M$  est un complexe borné de  $A$ -modules libres, alors  $u_M$  est un isomorphisme ; si  $A$  est un corps, on peut conclure que  $u_M$  est un isomorphisme pour tout  $M \in D^+(Z_{\text{ét}}, A)$ .

On se place dorénavant dans le cas où  $R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . Soit  $M \in D^b(A)$ . Montrons que  $u_M$  est un isomorphisme. Pour tout entier relatif  $q$ , il existe un morphisme  $P \rightarrow M$  avec  $P$  un complexe borné de  $A$ -modules libres tel que si on note  $C$  un cône de ce morphisme, alors  $C \leq q$  (de telles inégalités sont à comprendre relativement à la  $t$ -structure canonique). On considère le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_A^L R\mathbf{Hom}(X, Y) & \xrightarrow[\sim]{u_P} & R\mathbf{Hom}(X, P \otimes_A^L Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_A^L R\mathbf{Hom}(X, Y) & \xrightarrow{u_M} & R\mathbf{Hom}(X, M \otimes_A^L Y) \end{array}$$

Notons  $N$  le plus petit entier naturel tel que  $R\mathbf{Hom}(X, V \otimes_A^L Y)$  soit  $\leq N$  pour tout  $A$ -module  $V$ . Par dévissage, on obtient que les cônes des flèches verticales du diagramme ci-dessus sont  $\leq q + N$ . Les deux flèches verticales induisent donc des isomorphismes sur les objets de cohomologie  $\mathcal{H}^i$  pour  $i \geq q + n + 2$ . La flèche du haut étant un isomorphisme, la flèche du bas induit des isomorphismes sur les  $\mathcal{H}^i$  pour  $i \geq q + n + 2$ . Ce fait étant vérifié pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ , le morphisme du bas est bien un isomorphisme.

On déduit aussitôt de ce qui précède que  $\mathbf{RHom}(X, Y) \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ . On sait par ailleurs que  $Y \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$  et que  $X \in \mathbf{D}^-(Z_{\text{ét}}, A)$ . Par conséquent, il existe un entier relatif  $N$  tel que si  $M \in \mathbf{D}^{\geq c}(A)$  pour un certain entier  $c$ , alors la source et le but de  $u_M$  sont  $\geq c + N$ . En raisonnant comme ci-dessus, on déduit du fait que  $u_M$  soit un isomorphisme pour tout  $M \in \mathbf{D}^b(A)$  que ce résultat vaut en fait pour tout  $M \in \mathbf{D}^+(A)$ .

**PROPOSITION 10.1.2.** *Soit  $Z$  un schéma. Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $Y \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ . Soit  $M$  un complexe pseudo-cohérent dans  $\mathbf{D}(A)$ . Soit  $N \in \mathbf{D}^+(A)$ . Alors, le morphisme canonique*

$$\mathbf{RHom}(M, N) \otimes_A^L Y \rightarrow \mathbf{RHom}(M, N \otimes_A^L Y)$$

*est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}^+(Z_{\text{ét}}, A)$ .*

Pour tout  $M \in \mathbf{D}(A)$ , notons  $v_M$  le morphisme canonique

$$\mathbf{RHom}(M, N) \otimes_A^L Y \rightarrow \mathbf{RHom}(M, N \otimes_A^L Y).$$

Bien entendu, si  $M \in \mathbf{D}(A)$  est un complexe parfait,  $v_M$  est un isomorphisme. Pour tout  $M \in \mathbf{D}(A)$  pseudo-cohérent et tout entier relatif  $q$ , il existe un morphisme  $P \rightarrow M$  avec  $P$  parfait dont le cône soit  $\leq q$ . Pour pouvoir déduire que  $v_M$  est un isomorphisme pour tout  $M \in \mathbf{D}(A)$  du cas particulier où  $M$  est supposé parfait, il suffit donc de montrer qu'il existe un entier relatif  $c$  tel que pour tout entier  $q$  et tout  $M \in \mathbf{D}^{\leq q}(A)$ , la source et le but de  $v_M$  soient  $\geq -q + c$ . Notons  $a$  un entier tel que  $N \geq a$  et  $b$  un entier tel que pour tout  $A$ -module  $V$ ,  $V \otimes_A^L Y \geq b$ . On vérifie aussitôt que  $c = a + b$  convient, ce qui achève la démonstration de la proposition.

**PROPOSITION 10.1.3.** *Soit  $Z$  un schéma noethérien. Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien. Soit  $X \in \mathbf{D}_c^-(Z_{\text{ét}}, A)$ . Soit  $Y \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ . On suppose ou bien que  $A$  est un corps ou bien que  $\mathbf{RHom}(X, N \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $N$ . Soit  $B$  une  $A$ -algèbre. Alors, pour tout complexe pseudo-cohérent  $M \in \mathbf{D}(B)$  et pour tout  $N \in \mathbf{D}^+(B)$ , le morphisme canonique*

$$\mathbf{RHom}_B(M, N) \otimes_A^L \mathbf{RHom}_A(X, Y) \rightarrow \mathbf{RHom}_B(M \otimes_A^L X, N \otimes_A^L Y)$$

*est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(Z_{\text{ét}}, B)$ .*

Les hypothèses font que  $\mathbf{RHom}_B(M, N)$  appartient à  $\mathbf{D}^+(B)$ . Si  $A$  n'est pas un corps, on peut appliquer le résultat de la proposition 10.1.2 en remplaçant respectivement  $A$ ,  $X$ ,  $M$  et  $N$  par  $B$ ,  $M$ ,  $N$  et  $B \otimes_A^L \mathbf{RHom}_A(X, Y)$  (on notera que  $\mathbf{RHom}_A(X, Y) \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$  d'après la proposition 10.1.1). On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathbf{RHom}_B(M, N) \otimes_A^L \mathbf{RHom}_A(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_B(M, N \otimes_A^L \mathbf{RHom}_A(X, Y)).$$

Si  $A$  est un corps, on établit cet isomorphisme par un argument similaire en se ramenant au cas où  $M$  est un complexe parfait de  $B$ -modules. En appliquant maintenant la proposition 10.1.1, on obtient un nouvel isomorphisme :

$$\mathbf{RHom}_B(M, N \otimes_A^L \mathbf{RHom}_A(X, Y)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_B(M, \mathbf{RHom}_A(X, N \otimes_A^L Y)).$$

Enfin, on utilise l'isomorphisme cher à Cartan :

$$\mathbf{R} \mathbf{Hom}_B(M, \mathbf{R} \mathbf{Hom}_A(X, N \otimes_A^L Y)) \simeq \mathbf{R} \mathbf{Hom}_B(M \otimes_A^L X, N \otimes_A^L Y).$$

L'isomorphisme voulu est l'isomorphisme obtenu en composant les différents isomorphismes canoniques ci-dessus.

### 10.2. Conséquences pour $\mathbf{R}j_*$ et $i^!$ .

**PROPOSITION 10.2.1.** *Soit  $j: U \rightarrow X$  une immersion ouverte entre schémas noethériens. Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien. Soit  $Y \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(U_{\text{ét}}, A)$ . On suppose ou bien que  $A$  est un corps ou bien que  $\mathbf{R}j_*(M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . Alors, pour tout  $M \in \mathbf{D}^+(A)$ , le morphisme canonique*

$$M \otimes_A^L \mathbf{R}j_* Y \rightarrow \mathbf{R}j_*(M \otimes_A^L Y)$$

*est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . Si  $\mathbf{R}j_*(M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ , alors  $\mathbf{R}j_* Y$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{ff}}^b(X_{\text{ét}}, A)$ .*

Ceci résulte de la proposition 10.1.1, compte tenu de la formule  $\mathbf{R}j_* Y \simeq \mathbf{R} \mathbf{Hom}(j_! A, j_! Y)$  pour tout  $Y \in \mathbf{D}(U_{\text{ét}}, A)$ .

**PROPOSITION 10.2.2.** *Soit  $i: Z \rightarrow X$  une immersion fermée entre schémas noethériens. Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien. Soit  $Y \in \mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ . On suppose ou bien que  $A$  est un corps ou bien que  $i^!(M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ . Alors, pour tout  $M \in \mathbf{D}^+(A)$ , le morphisme canonique*

$$M \otimes_A^L i^! Y \rightarrow i^!(M \otimes_A^L Y)$$

*est un isomorphisme dans  $\mathbf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ . Si  $i^!(M \otimes_A^L Y)$  est borné indépendamment du  $A$ -module  $M$ , alors  $i^! Y$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{ff}}^b(Z_{\text{ét}}, A)$ .*

Cette fois-ci, on utilise la formule  $i^! Y \simeq \mathbf{R} \mathbf{Hom}(i_* A, i_* Y)$ .

## 11. Modules ind-unipotents

**11.1. Définitions.** Soit  $G$  un groupe topologique. Soit  $A$  un anneau. On appellera ici  $A[G]$ -module un  $A[G]$ -module (à gauche) au sens où on l'entend usuellement en considérant  $G$  comme groupe discret. Un  $A[G]$ -module discret est un  $A[G]$ -module dans lequel le stabilisateur de tout élément est ouvert. Un  $A[G]$ -module est dit trivial si le groupe  $G$  agit trivialement sur lui ; un tel  $A[G]$ -module est discret. On note  $I_G$  l'idéal d'augmentation de  $A[G]$  ; un  $A[G]$ -module est trivial si et seulement s'il est annulé par  $I_G$ .

La catégorie des  $A[G]$ -modules discrets est une catégorie abélienne de Grothendieck ; le foncteur d'inclusion de cette catégorie dans celle des  $A[G]$ -modules est exact, commute aux limites inductives, mais en général pas aux limites projectives. La catégorie des  $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotient (mais en général pas par extensions) dans celle des  $A[G]$ -modules.

**DÉFINITION 11.1.1.** Un  $A[G]$ -module discret est unipotent s'il admet une filtration finie dont les quotients successifs sont des  $A[G]$ -modules triviaux. L'ordre d'unipotence d'un  $A[G]$ -module unipotent est la plus petite longueur d'une telle

filtration ; ainsi, un  $A[G]$ -module trivial non nul est unipotent d'ordre 1. Un  $A[G]$ -module discret est ind-unipotent si tous ses sous- $A[G]$ -modules de type fini sont unipotents.

**DÉFINITION 11.1.2.** Soit  $M$  un  $A[G]$ -module discret. On définit par récurrence une filtration croissante  $(\text{Fil}_n M)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $M$  par des sous  $A[G]$ -modules, de façon à ce que  $\text{Fil}_0 M = 0$  et que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on ait un isomorphisme canonique  $\text{Fil}_{n+1} M / \text{Fil}_n M \simeq H^0(G, M / \text{Fil}_n M) \subset M / \text{Fil}_n M$ .

La filtration  $\text{Fil}_\bullet M$  est évidemment fonctorielle en  $M$  au sens où si  $f: M \rightarrow M'$  est un morphisme de  $A[G]$ -modules,  $f(\text{Fil}_n M) \subset \text{Fil}_n(M')$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 11.2. Propriétés.

**PROPOSITION 11.2.1.** *Les notions d'unipotence et d'ind-unipotence des  $A[G]$ -modules discrets jouissent des propriétés suivantes :*

- (i) *Le caractère unipotent des  $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotients et extensions ; l'indice d'unipotence décroît par passage à un sous-quotient et est sous-additif vis-à-vis des extensions ;*
- (ii) *Le caractère ind-unipotent des  $A[G]$ -modules discrets est stable par sous-quotients, et, si  $G$  est profini, par extensions ;*
- (iii) *La catégorie des  $A[G]$ -modules discrets unipotents (resp. ind-unipotents) est abélienne, le foncteur d'inclusion dans celle des  $A[G]$ -modules discrets est exact ;*
- (iv) *Un  $A[G]$ -module discret  $M$  est unipotent si et seulement s'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $\text{Fil}_n M = M$  ; dans ce cas, l'indice d'unipotence de  $M$  est le plus petit de ces entiers  $n$  ;*
- (v) *Le caractère unipotent (resp. ind-unipotent) d'un  $A[G]$ -module discret ne dépend pas de l'anneau des coefficients  $A$  et cette notion n'est pas altérée non plus si on considère  $G$  comme groupe discret ;*
- (vi) *Pour tout entier naturel  $n$  et tout  $A[G]$ -module discret,  $\text{Fil}_n M$  est l'annulateur de  $I_G^n$  dans  $M$  ;*
- (vii) *Pour tout entier naturel  $n$ , un  $A[G]$ -module discret est unipotent d'ordre au plus  $n$  si et seulement s'il est annulé par l'idéal  $I_G^n$ . Un  $A[G]$ -module discret  $M$  est ind-unipotent si et seulement si tout élément de  $M$  est annulé par une puissance de  $I_G$ , c'est-à-dire que  $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}_n M$  ;*
- (viii) *Un  $A[G]$ -module unipotent est ind-unipotent ;*
- (ix) *Un  $A[G]$ -module de type fini est unipotent si et seulement s'il est ind-unipotent ;*
- (x) *Une somme directe (resp. une limite inductive) de  $A[G]$ -modules ind-unipotents est un  $A[G]$ -module ind-unipotent.*
- (xi) *Les  $A[G]$ -modules (discrets) ind-unipotents sont exactement les  $A[G]$ -modules limites inductives filtrantes de  $A[G]$ -modules (discrets) unipotents.*

Montrons (i). Si  $(M, F_\bullet M)$  est un  $A[G]$ -module discret filtré, tout sous-objet  $M'$  (resp. sous-quotient  $M''$ ) de  $M$  est naturellement muni d'une filtration  $F_\bullet M'$  (resp.  $F_\bullet M''$ ) telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le morphisme induit au niveau des gradués  $\text{Gr}_n M' \rightarrow \text{Gr}_n M$  (resp.  $\text{Gr}_n M \rightarrow \text{Gr}_n M''$ ) soit injectif (resp. surjectif) ; comme tout sous-quotient d'un  $A[G]$ -module trivial est trivial, il en résulte aussitôt que le caractère unipotent d'un  $A[G]$ -module est stable par sous-quotient et que l'indice d'unipotence décroît dans cette opération. Il est évident sur la définition que le caractère unipotent des  $A[G]$ -modules discrets est stable par extensions, et que l'indice est sous-additif vis-à-vis d'elles. (viii) est une conséquence triviale de (i).

Montrons la propriété (iv). Soit  $M$  un  $A[G]$ -module discret. Si  $\text{Fil}_n M = M$ , la filtration  $(\text{Fil}_i M)_{0 \leq i \leq n}$  est une filtration finie de  $M$  de longueur  $n$  dont les quotients successifs sont triviaux ; ainsi,  $M$  est unipotent d'ordre au plus  $n$ . Inversement, soit  $M$  un  $A[G]$ -module muni d'une filtration  $(F_i M)_{i \geq 0}$  telle que  $F_0 M = 0$  et dont les quotients successifs soient triviaux. Une récurrence évidente sur  $i \in \mathbf{N}$  montre que l'on a une inclusion  $F_i M \subset \text{Fil}_i M$ , de sorte que si un entier naturel  $n$  est tel que  $F_n M = M$ , alors  $\text{Fil}_n M = M$ .

Dans le cas unipotent, la propriété (v) est une conséquence de la propriété (iv) : la filtration  $\text{Fil}_\bullet M$  est la même que l'on considère  $M$  comme  $A[G]$ -module ou comme  $\mathbf{Z}[G]$ -module, et que l'on considère  $G$  comme un authentique groupe topologique ou comme un groupe discret. Quand ce ne sera pas pertinent, on ne précisera donc pas systématiquement dans la suite que les  $A[G]$ -modules sont discrets.

Concernant la propriété (vi), il est facile de montrer par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$  que  $\text{Fil}_n M$  est l'annulateur de  $I_G^n$  dans  $M$ .

Considérons (vii). On déduit trivialement de (iv) et (vi) qu'un  $A[G]$ -module discret est unipotent d'ordre au plus  $n$  si et seulement s'il est annulé par  $I_G^n$ . Montrons l'autre partie de (vii). Soit  $M$  un  $A[G]$ -module discret ind-unipotent. Pour tout  $m \in M$ , le sous- $A[G]$ -module de  $M$  engendré par  $m$  est unipotent, d'après ce qu'on vient de montrer, ce module est annulé par une puissance de  $I_G$ , en particulier,  $m$  est annulé par  $I_G^n$  pour un certain entier naturel  $n$ . Inversement, supposons que tout élément de  $M$  soit annulé par une puissance de  $I_G$ . Si on considère un sous- $A[G]$ -module de type fini  $N$  de  $M$ , en appliquant l'hypothèse aux éléments d'un ensemble fini de générateurs de  $N$ , on obtient que  $N$  est annulé par  $I_G^n$  pour un certain entier naturel  $n$ , et donc que  $N$  est unipotent. Ceci achève la démonstration de (vii). On sait donc qu'un  $A[G]$ -module discret  $M$  est ind-unipotent si et seulement si  $M = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \text{Fil}_n M$ . Comme la filtration  $\text{Fil}_n M$  ne dépend pas de la topologie de  $G$  ni de l'anneau des coefficients  $A$ , on peut obtenir (v). La propriété (ix) est une conséquence immédiate de (vii). La stabilité par sommes directes et sous-quotients du caractère ind-unipotent en résulte aussi, ce qui établit (x).

Supposons  $G$  profini et montrons la stabilité par extensions des  $A[G]$ -modules discrets ind-unipotents, ce qui achèvera la démonstration de (ii). D'après (v), on peut supposer que  $A = \mathbf{Z}$ . On se donne une suite exacte courte  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  de  $\mathbf{Z}[G]$ -modules discrets avec  $M'$  et  $M''$  ind-unipotents. Soit  $N$  un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de type fini de  $M$ . Il s'agit de montrer que  $N$  est unipotent. On peut considérer l'image  $N''$  de  $N$  dans  $M''$ , et  $N'$  le noyau de la projection  $N \rightarrow N''$ . Le  $\mathbf{Z}[G]$ -module  $N'$  (resp.  $N''$ ) est un sous- $\mathbf{Z}[G]$ -module de  $M'$  (resp.  $M''$ ). Par passage à des sous-objets,  $N'$  et  $N''$  sont ind-unipotents. Le groupe  $G$  étant profini et  $N$  un  $\mathbf{Z}[G]$ -module discret,  $N$  est un groupe abélien de type fini ; les groupes abéliens  $N'$  et  $N''$  qui en sont des sous-quotients sont eux aussi de type fini. D'après (ix),  $N'$  et  $N''$  sont unipotents ; d'après (i),  $N$  est unipotent, ce qui achève la démonstration de (ii).

(iii) résulte aussitôt de (i) et (ii). Enfin, (xi) découle de (vii), (viii) et (x).

**REMARQUE 11.2.2.** Si  $H \rightarrow G$  est un morphisme de groupes topologiques et  $M$  un  $A[G]$ -module unipotent (resp. ind-unipotent), alors, en tant que  $A[H]$ -module,  $M$  est unipotent (resp. ind-unipotent).

**11.3. Modules ind-unipotents pour un sous-groupe distingué.** Soit  $A$  un anneau. Soit  $G$  un groupe topologique. Soit  $H$  un sous-groupe distingué (fermé) de

G. Si  $M$  est un  $A[G]$ -module discret, on peut se demander si en tant que  $A[H]$ -module,  $M$  est unipotent (resp. ind-unipotent).

Dans cette situation, on note  $\text{Fil}_\bullet M$  la filtration de la définition 11.1.2 pour le groupe  $H$ . Le fait que  $H$  soit distingué dans  $G$  permet d'obtenir aussitôt que cette filtration  $\text{Fil}_\bullet M$  est constituée de sous- $A[G]$ -modules de  $M$ . De cette remarque et de la proposition 11.2.1 (iv), on tire :

**PROPOSITION 11.3.1.** *Soit  $M$  un  $A[G]$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *en tant que  $A[H]$ -module,  $M$  est unipotent ;*
- *il existe une filtration finie de  $M$  par des sous- $A[G]$ -modules telle que  $H$  agisse trivialement sur les quotients successifs.*

**PROPOSITION 11.3.2.** *Soit  $M$  un  $A[G]$ -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *en tant que  $A[H]$ -module,  $M$  est ind-unipotent ;*
- *tout sous- $A[G]$ -module de type fini de  $M$  est unipotent pour  $H$ .*

Il s'agit de montrer que si un sous- $A[H]$ -module  $N$  de  $M$  de type fini est unipotent, alors le sous- $A[G]$ -module (de type fini) de  $M$  engendré par  $N$  est unipotent. Il suffit en fait d'établir le lemme suivant :

**LEMME 11.3.3.** *Soit  $M$  un  $A[H]$ -module unipotent. En tant que  $A[H]$ -module,  $A[G] \otimes_{A[H]} M$  est unipotent.*

On peut conclure facilement en observant simplement que le  $A[H]$ -module  $A[G] \otimes_{A[H]} M$  s'identifie à une somme directe de copies de  $M$ .

Maintenant que les définitions d'unipotence et de ind-unipotence pour le sous-groupe distingué  $H$  sont clarifiées, on peut énoncer la proposition suivante :

**PROPOSITION 11.3.4.** *Les énoncés de la proposition 11.2.1 restent vrais si on remplace « unipotent » par « unipotent pour  $H$  », « ind-unipotent » par « ind-unipotent pour  $H$  » et  $I_G$  par  $I_H$ , et que, comme ci-dessus, on définit la filtration  $\text{Fil}_\bullet$  relativement au groupe  $H$ .*

Compte tenu des clarifications faites ci-dessus, c'est trivial.



## Cohomological dimension: First results

Luc Illusie

In this chapter we establish Gabber's bound on cohomological dimension stated in the introduction (in the comments on the proof of the finiteness theorem).

### 1. Statement of the main result and applications

**THEOREM 1.1** (Gabber). Let  $X$  be a strictly local, noetherian scheme of dimension  $d > 0$ , and let  $\ell$  be a prime number invertible on  $X$ . Then, for any open subset  $U$  of  $X$ , we have

$$(1.a) \quad \text{cd}_\ell(U) \leq 2d - 1.$$

Recall that, for a scheme  $S$ ,  $\text{cd}_\ell(S)$  ( $\ell$ -cohomological dimension of  $S$ ) denotes the infimum of the integers  $n$  such that for all  $\ell$ -torsion abelian sheaves  $F$  on  $S$ , and all  $i > n$ ,  $H^i(S, F) = 0$ .

**COROLLARY 1.2.** Let  $X = \text{Spec } A$  be as in **1.1**, and assume  $A$  is a domain, with fraction field  $K$ . Then

$$(1.a) \quad \text{cd}_\ell(K) \leq 2d - 1.$$

Indeed, it suffices to show that if  $F$  is a finitely generated  $\mathbb{F}_\ell$ -module over  $\eta = \text{Spec } K$ , then  $H^i(\eta, F) = 0$  for  $i > 2d - 1$ . But  $\eta$  is a filtering projective limit of affine open subsets  $U_\alpha$  of  $X$ ,  $F$  is induced from a locally constant constructible  $\mathbb{F}_\ell$ -sheaf  $F_{\alpha_0}$  on  $U_{\alpha_0}$ , and  $H^i(\eta, F) = \varinjlim H^i(U_\alpha, F_\alpha)$ , where  $F_\alpha = F_{\alpha_0}|_{U_\alpha}$  for  $\alpha \geq \alpha_0$  ([SGA 4 VII 5.7]).

**REMARK 1.3.** (a) The proof shows that if (1.a) holds for one  $X$ , and if  $X$  is integral, then (1.a) holds for  $X$ .

(b) If  $X$  is an integral noetherian scheme of dimension  $d$ , with generic point  $\text{Spec } K$ , and  $\ell$  is a prime number invertible on  $X$ , then  $\text{cd}_\ell(K) \geq d$  ([SGA 4 X 2.5]). Gabber can prove that under the assumptions of **1.2** one has  $\text{cd}_\ell(K) = d$ .

**COROLLARY 1.4.** Let  $Y$  be a noetherian scheme of finite dimension,  $f : X \rightarrow Y$  a morphism of finite type, and  $\ell$  a prime number invertible on  $Y$ . Then

$$\text{cd}_\ell(Rf_*) < \infty,$$

i. e. there exists an integer  $N$  such that for any  $\ell$ -torsion abelian sheaf  $F$  on  $X$ ,  $R^q f_* F = 0$  for  $q > N$ .

*Proof of 1.4.* We may assume  $Y$  affine. Covering  $X$  by finitely many open affine subsets  $U_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), and using the alternate Čech spectral sequence

$$E_1^{p,q} = \bigoplus R^q(f|_{U_{i_0 \dots i_p}})_*(F|_{U_{i_0 \dots i_p}}) \Rightarrow R^{p+q} f_* F,$$

where  $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ , we may assume  $f$  separated. Repeating the procedure, we may assume  $X$  affine. Choose an immersion  $X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n$ , and replace  $\mathbf{P}_Y^n$  by the closure of the image of  $X$ . We get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ \downarrow f & \searrow g & \\ Y & & \end{array}$$

with  $j$  open and  $g$  projective of relative dimension  $\leq n$ . By the proper base change theorem we have  $cd_\ell(Rg_*) \leq 2n$ . By the Leray spectral sequence  $R^p g_* R^q j_* F \Rightarrow R^{p+q} f_* F$  it thus suffices to prove **1.4** for  $j$ , in other words, we may assume that  $f$  is an open immersion. Let  $d$  be the dimension of  $Y$ . Let  $x$  be a geometric point of  $X$ , with image  $y = f(x)$  in  $Y$ , and let  $U = Y_{(y)} \times_Y X$  be the corresponding open subset of the strictly local scheme  $Y_{(y)}$  (of dimension  $\leq d$ , that we may assume to be  $> 0$ ). Then

$$R^i f_*(F)_y = H^i(U, F)$$

(where we still denote by  $F$  its inverse image on  $U$ ). The conclusion follows from **1.1**.

**REMARK 1.5.** (a) Under the assumptions of **1.1**, if  $X$  is quasi-excellent and  $U$  is affine, then by Gabber’s affine Lefschetz theorem (**XV-1.2.4**) we have  $cd_\ell(U) \leq d$ .

(b) Gabber can show that, under the assumptions of **1.1**, one has  $cd_\ell(U) \geq d$  if  $U$  is not empty and does not contain the closed point and that for each  $n$  such that  $d \leq n \leq 2d - 1$ , there exists a pair  $(X, U)$  as in **1.1**, with  $U$  affine, such that  $cd_\ell(U) = n$  (by (a), for  $n > d$ ,  $X$  is not quasi-excellent). These results, as well as the one mentioned in **1.3**, are proved in the second part of this chapter, *refinements et compléments*, by Fabrice Orgozo.

### 2. Proof of 1.1

**LEMMA 2.1.** Let  $X$  be as in **1.1**, and let  $\{x\}$  be the closed point of  $X$ . Then (1.a) holds for  $U = X - \{x\}$ .

*Proof.* It suffices to show that for any constructible  $F_\ell$ -sheaf  $F$  on  $U$ ,  $H^i(U, F) = 0$  for  $i \geq 2d$ . Let  $\hat{X}$  be the completion of  $X$  at  $\{x\}$  and set  $\hat{U} := \hat{X} \times_X U = \hat{X} - \{x\}$ . Let  $\hat{F}$  be the inverse image of  $F$  on  $\hat{U}$ . By Gabber’s formal base change theorem ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]), the natural map

$$H^i(U, F) \rightarrow H^i(\hat{U}, \hat{F})$$

is an isomorphism for all  $i$ . Therefore we may assume  $X$  complete, and in particular, excellent. Let  $(f_1, \dots, f_d)$  be a system of parameters of  $X$ , and let  $U_i = X_{f_i}$ , so that  $U = \cup_{1 \leq i \leq d} U_i$ . Consider the (alternate) Čech spectral sequence

$$E_1^{p,q} = \oplus H^q(U_{i_0 \dots i_p}, F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F),$$

with  $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$  as above. By definition,  $E_1^{p,q} = 0$  for  $p \geq d$ . On the other hand, as  $X$  is excellent, by Gabber’s affine Lefschetz theorem (**XV-1.2.4**), we have  $E_1^{p,q} = 0$  for  $q \geq d + 1$ . Therefore  $E_1^{p,q} = 0$  for  $p + q \geq 2d$ , hence  $H^i(U, F) = 0$  for  $i \geq 2d$ .

LEMMA 2.2. Let  $X$  be a noetherian scheme of finite dimension,  $Y$  a closed subset,  $\ell$  a prime number invertible on  $X$ . Then, for any  $\ell$ -torsion sheaf  $F$  on  $X$ ,

$$H_Y^i(X, F) = 0$$

for

$$i > \sup_{x \in Y} (\text{cd}_\ell(k(x)) + 2\dim \mathcal{O}_{X,x}).$$

In particular,

$$\text{cd}_\ell(X) \leq \sup_{x \in X} (\text{cd}_\ell(k(x)) + 2\dim \mathcal{O}_{X,x}).$$

*Proof.* For  $p \geq 0$ , let  $\Phi^p$  be the set of closed subsets of  $Y$  of codimension  $\geq p$  in  $X$ . We have  $\Phi^p = \emptyset$  for  $p > \text{codim}(Y)$ . Consider the (biregular) coniveau spectral sequence of the filtration  $(\Phi^p)$  cf. [Grothendieck, 1968, 10.1],

$$(2.a) \quad E_1^{p,q} = H_{\Phi^p/\Phi^{p+1}}^{p+q}(X, F) \Rightarrow H_Y^{p+q}(X, F).$$

We have

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in Y^{(p)}} H_{\{x\}}^{p+q}(X_x, F|_{X_x}),$$

where  $Y^{(p)}$  denotes the set of points of  $Y$  of codimension  $p$  in  $X$ , and  $X_x = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ . For  $x \in Y^{(p)}$  (i. e.  $\dim \mathcal{O}_{X,x} = p$ ), let  $\bar{x}$  be a geometric point above  $x$ . Consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} \{\bar{x}\} & \xrightarrow{i_{\bar{x}}} & X_{(\bar{x})} & \xleftarrow{\bar{j}} & \bar{U} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \xrightarrow{i_x} & X_x & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

where  $U = X - \{x\}$ ,  $\bar{U} = X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$ . We have

$$R\Gamma_{\{x\}}(X_x, F|_{X_x}) = R\Gamma(\{x\}, Ri_x^!(F|_{X_x})).$$

The stalk of  $Ri_x^!(F|_{X_x})$  at  $\bar{x}$  is

$$Ri_x^!(F|_{X_x})_{\bar{x}} = Ri_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}),$$

as  $(Rj_*(F|U))_{\bar{x}} = R\bar{j}_*(F|\bar{U})_{\bar{x}}$ . We thus have a spectral sequence

$$(2.b) \quad E_2^{rs} = H^r(k(x), R^s i_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}})) \Rightarrow H_{\{x\}}^{r+s}(X_x, F|_{X_x}),$$

It suffices to show that, in the initial term of (2.a),

$$(2.c) \quad H_{\{x\}}^{p+q}(X_x, F|_{X_x}) = 0$$

for  $p + q > \text{cd}_\ell(k(x)) + 2p$ . If  $p = 0$ , then  $Ri_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}) = F_{\bar{x}}$ , and, in (2.b),  $E_2^{rs} = 0$  for  $s > 0$ ,  $E_2^{r0} = 0$  for  $r > \text{cd}_\ell(k(x))$ , so (2.c) is true in this case. Assume  $p > 0$ . We have

$$(2.d) \quad R^s i_{\bar{x}}^! F = H^{s-1}(\bar{U}, F|\bar{U})$$

for  $s \geq 2$ , where, as above,  $\bar{U} = X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$ . By 2.1,  $H^{s-1}(\bar{U}, F|\bar{U}) = 0$  for  $s - 1 \geq 2p$ , hence, by (2.d),  $R^s i_{\bar{x}}^!(F|_{X_{(\bar{x})}}) = 0$  and  $E_2^{rs} = 0$  for  $s \geq 2p + 1$ . If  $r + s \geq \text{cd}_\ell(k(x)) + 2p + 1$  and  $s \leq 2p$ , then  $r > \text{cd}_\ell(k(x))$ , hence  $E_2^{rs} = 0$  as well. Therefore, by (2.b), (2.c) holds, which finishes the proof.

*Proof of 1.1.* We prove 1.1 by induction on  $d$ . For  $n \geq 0$  consider the assertion

$G_n$  : For every strictly local, noetherian scheme  $X$  of dimension  $n$ , all open subsets  $U$  of  $X$  and any prime number  $\ell$  invertible on  $X$ , we have  $\text{cd}_\ell(U) \leq \sup(0, 2n - 1)$ .

Let  $d > 0$ . Assume  $G_n$  holds for  $n < d$ , and let us prove  $G_d$ . Let  $X$  be as in **1.1**. If  $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$  are the reduced irreducible components of  $X$  and  $U_i = U \times_X X_i$ , we have  $cd_\ell(U) \leq \sup(cd_\ell(U_i))$ , hence we may assume  $X$  integral. Let  $x$  be the closed point of  $X$ , and  $U = X - \{x\}$  the punctured spectrum. Let  $j : V \rightarrow U$  be a nonempty open subset of  $U$ , and  $F$  be a constructible  $F_\ell$ -sheaf on  $V$ . As  $F = j_*j^!F$ , by **2.1** it suffices to show that, for any constructible  $F_\ell$ -sheaf  $L$  on  $U$ , the restriction map

$$(*) \quad H^i(U, L) \rightarrow H^i(V, j^*L)$$

is an isomorphism for  $i \geq 2d$ . Let  $Y = U - V$ . Consider the exact sequence

$$H_Y^i(U, L) \rightarrow H^i(U, L) \rightarrow H^i(V, j^*L) \rightarrow H_Y^{i+1}(U, L).$$

By **2.2**, we have  $H_Y^i(U, L) = 0$  for  $i > \sup_{y \in Y}(cd_\ell(k(y)) + 2\dim \mathcal{O}_{X,y})$ . For  $y \in Y$ , denote by  $Z$  the closed, integral subscheme of  $X$  defined by the closure of  $\{y\}$  in  $X$ . As  $X$  is integral and  $V$  nonempty,  $Z$  is a strictly local scheme of dimension  $n < d$ , with generic point  $y$ . By **1.3** (a) and  $G_n$  (inductive assumption), we have  $cd_\ell(k(y)) \leq 2n - 1$ . We have  $2n - 1 + 2\dim \mathcal{O}_{X,y} \leq 2d - 1$ . Hence, for  $i \geq 2d$ ,  $H_Y^i(U, L) = H_Y^{i+1}(U, L) = 0$ , and  $(*)$  is an isomorphism, which finishes the proof.

**REMARK 2.3.** Gabber has an alternate proof of **1.1**, based on the theory of Zariski-Riemann spaces. By **2.2**, it suffices to show **1.2**. Here is a sketch, pasted from an e-mail of Gabber to Illusie of 2007, Aug. 15 :

"For  $Y \rightarrow X$  proper birational with special fiber  $Y_0$ , consider  $i : Y_0 \rightarrow Y$  and  $j : \eta \rightarrow Y$ ,  $\eta$  the generic point. We have by proper base change a spectral sequence

$$H^p(Y_0, i^*R^qj_*F) \rightarrow H^{p+q}(\eta, F)$$

for  $F$  an  $\ell$ -torsion Galois module. We take the direct limit and get a spectral sequence involving cohomologies on the étale topos of  $ZRS_0$  defined as the limit of étale topoi of  $Y_0$  or viewing  $ZRS_0$  as a locally ringed topos and applying a universal construction in the book of M.Hakim. The limit of the  $R^qj_*F$  is  $R^q(\eta \rightarrow ZRS)_*F$ . By a classical result of Abhyankar, also proved in Appendix 2 of the book of Zariski-Samuel Vol. II, if  $R$  is a noetherian local domain of dimension  $d$  and  $V$  a valuation ring of  $\text{Frac}(R)$  dominating  $R$ , the sum of the rational rank and the residue transcendence degree is at most  $d$ . For a strictly henselian valuation ring  $V$  with residue characteristic exponent  $p$  and value group  $\Gamma$ , the absolute Galois group of  $\text{Frac}(V)$  is an extension of the tame part (product for  $\ell$  prime not equal to  $p$  of  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z}_\ell(1))$ ) by a  $p$ -group, so the  $\ell$ -cohomological dimension is the dimension of  $\Gamma$  tensored with the prime field  $F_\ell$ , which is at most the dimension of  $\Gamma$  tensored with the rationals. If  $A$  is an  $\ell$ -torsion sheaf on the étale topos of  $ZRS_0$ , let  $\delta(A)$  be the sup of transcendence degrees of points where the stalk is non-zero. I claim that  $H^n(ZRS_0, A)$  vanishes for  $n > 2\delta(A)$ . One reduces it to the finite type case (passage to the limit [**SGA 4** VI 8.7.4]) using that the  $\delta$  of the direct image of  $A$  to  $Y_0$  is at most  $\delta(A)$ . In  $Y_0$  the transcendence degrees over the closed point of  $X$  are at most  $d - 1$  by the dimension inequality. Summing up, for the limit spectral sequence the  $q$ -th direct image sheaf restricted to the special fiber has  $\delta$  at most  $\min(d - 1, d - q)$ , giving vanishing for certain  $E_2^{p,q}$  and the result."

## Dimension cohomologique : raffinements et compléments

Fabrice Orgogozo

Le premier objectif de cette seconde partie de l'exposé est de démontrer que pour tout nombre premier  $\ell$  il existe un ouvert *affine* d'un schéma noëthérien strictement hensélien régulier de dimension 2 dont la  $\ell$ -dimension cohomologique est égale à 3. Outre les ingrédients cohomologiques — pureté, morphisme de Gysin et comparaison à la complétion —, on utilise une construction dont le principe est dû à Nagata : utilisant des « dilatations formelles » construit un schéma noëthérien strictement hensélien  $X$  de dimension 2, de complété  $\widehat{X}$  régulier de dimension 2, et une courbe *irréductible*  $C$  dans  $X$  devenant le  $\ell$ -ième multiple d'un diviseur régulier dans  $\widehat{X}$ . Cette construction est ensuite étendue au cas, plus délicat, de la dimension supérieure. À partir de là, on construit aisément des schémas dont l'existence a été annoncée dans la première partie (XVIII-A-1.5). Pour vérifier que leur dimension cohomologique est bien celle attendue, on fait appel à une majoration assez générale établie sans hypothèse d'excellence. Enfin, on termine par une minoration de la dimension cohomologique d'un ouvert (non nécessairement affine) du spectre épointé d'un schéma noëthérien intègre strictement local.

### 1. Préliminaires

**1.1. Dilatations formelles.** Soient  $R$  un anneau,  $\pi$  un élément non diviseur de 0 et  $f$  un élément de la complétion  $\pi$ -adique  $\widehat{R}$  de  $R$ . Pour tout  $n \geq 0$ , choisissons un  $f_n \in R$  tel que  $f \equiv f_n$  modulo  $\pi^n$ .

**DÉFINITION 1.1.1.** On note  $\mathcal{D}il_\pi^f R$  la sous- $R$ -algèbre de  $R[\pi^{-1}, F]$ , où  $F$  est une indéterminée, colimite des  $R$ -algèbres  $R[\frac{F-f_n}{\pi^n}]$ .

On notera également  $F$  l'image de cette variable dans  $\mathcal{D}il_\pi^f R$ .

**REMARQUE 1.1.2.** Notons que les  $R$ -algèbres considérées sont toutes isomorphes à une algèbre de polynômes en une variable sur  $R$ .

**1.1.3.** On vérifie immédiatement les faits suivants :

- (i) la construction ne dépend pas des choix des  $f_n$ , et ne dépend de l'élément  $\pi$  qu'à travers l'idéal qu'il engendre ;
- (ii) les morphismes  $R \rightarrow \mathcal{D}il_\pi^f R$  et  $\mathcal{D}il_\pi^f R \rightarrow \widehat{R}, \frac{F-f_n}{\pi^n} \mapsto \frac{f-f_n}{\pi^n}$ , induisent des *isomorphismes* sur la complétion  $\pi$ -adique.

### 1.2. Platitude et noëthérianité.

**1.2.1.** Rappelons que si un morphisme  $A \rightarrow B$  est fidèlement plat,  $A$  est noëthérien si  $B$  l'est ([ÉGA IV<sub>2</sub> 2.2.14]). Pour vérifier la platitude, il est parfois commode d'utiliser le critère suivant ([Raynaud & Gruson, 1971, II.1.4.2.1]).

**PROPOSITION 1.2.2.** Soient  $M$  un  $R$ -module, et  $\pi \in R$ . On suppose que  $\pi$  n'est diviseur de zéro ni dans  $R$  ni dans  $M$ . Alors,  $M$  est plat sur  $R$  si et seulement si  $M/\pi$  l'est sur  $R/\pi$  et  $M[\pi^{-1}]$  l'est sur  $R[\pi^{-1}]$ .

**REMARQUE 1.2.3.** Pour démontrer la noéthérianité des anneaux considérés ci-après, on pourrait également utiliser le critère de Cohen rappelé en **XIX-3.2**, en vérifiant notamment que les idéaux de hauteur 1 sont principaux.

### 1.3. Gonflements.

**1.3.1.** Soit  $A$  un anneau local noéthérien, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . Suivant [AC, IX, appendice, §2], on note  $A[t]$  et on appelle « gonflement (élémentaire) » de  $A$  le localisé de l'anneau de polynômes  $A[t]$  en l'idéal premier  $\mathfrak{m}A[t]$ . C'est un anneau local noéthérien. (Il est noté  $A(t)$ , par analogie avec les fractions rationnelles, dans [Nagata, 1962, p. 17—18]; voir aussi [Matsumura, 1980b, p. 138].) Plus généralement, on peut considérer un ensemble arbitraire de variables  $t_{e \in E}$  et définir l'anneau  $A]t_e, e \in E[$ , localisé de  $A[t_e, e \in E]$  en l'idéal premier engendré par  $\mathfrak{m}$ . Rappelons le fait suivant ([AC, IX, appendice, prop. 2 et corollaire]).

**PROPOSITION 1.3.2.** L'anneau  $A]t_e, e \in E[$  est local noéthérien de même dimension que  $A$ .

**1.3.3.** Notons que le cas d'un nombre fini de variables est très élémentaire et que le cas général résulte du lemme [ÉGA 0<sub>III</sub> 10.3.1.3], reproduit en **XIX-3.1**, par passage à la (co)limite. Pour une autre démonstration, voir également [AC, III. §5, exercice 7].

**1.3.4.** Notons que si le corps résiduel de  $A$  est  $\kappa$ , celui de  $A]t_e, e \in E[$  est canoniquement isomorphe à son extension transcendante pure  $\kappa(t_e, e \in E)$ . De plus, on montre que si  $F$  est un sous-ensemble de  $E$ , le morphisme  $A]t_e, e \in F[ \rightarrow A]t_e, e \in E[$  est fidèlement plat. (Voir [AC, IX, appendice, prop. 2] pour une démonstration dans le cas  $F = \emptyset$ , auquel on se ramène immédiatement.)

## 2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique

### 2.1. Dilatation relativement à une série transcendante.

**2.1.1.** Soit  $W$  un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_W = (\pi)$ , corps résiduel  $k$ , corps des fractions  $K$  et de complété  $\widehat{W}$ . On note  $\widehat{K}$  le corps des fractions de  $\widehat{W}$ . Supposons qu'il existe un élément  $\varphi \in \widehat{W}$  transcendant sur  $K$ . C'est le cas si  $W$  est dénombrable ou, par exemple, lorsque  $W = k[[t]]$  auquel cas  $\varphi = \sum_n t^{n!}$  convient. Par translation, on peut supposer que  $\varphi$  appartient à l'idéal maximal de  $\widehat{W}$ .

**2.1.2.** Fixons un entier  $\ell \geq 1$  et considérons l'élément  $f = (y - \varphi)^\ell$  du complété  $\pi$ -adique  $\widehat{W}[y]$  de  $W[y]$ . Notons que ce complété s'injecte dans la complétion totale  $\widehat{W}[[y]]$  et que  $f$  appartient au sous-anneau  $\widehat{W}[y]$  de  $\widehat{W}[y]$  et  $\widehat{W}[[y]]$ . En conséquence, le morphisme canonique  $\mathcal{D}il_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$  se factorise en un morphisme  $\mathcal{D}il_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$ .

**PROPOSITION 2.1.3.** Le morphisme  $\mathcal{D}il_\pi^f W[y] \rightarrow \widehat{W}[y]$  est plat.

*Démonstration.* Notons pour simplifier  $\mathcal{D}$  la source de ce morphisme. D'après le critère de platitude rappelé ci-dessus, il suffit de montrer que le morphisme  $\mathcal{D}[\pi^{-1}] \rightarrow \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$  est plat car  $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{W}[y]$  induit visiblement un isomorphisme

modulo  $\pi$ . Or, lorsque l'on inverse  $\pi$ , les  $W[y]$ -algèbres dont  $\mathcal{D}$  est par définition la colimite sont toutes isomorphes à un anneau de polynômes  $K[y, F]$  où, rappelons-le,  $K$  est le corps des fractions  $W[\pi^{-1}]$  de  $W$ . Par conséquent, il nous faut montrer que le morphisme  $K[y, F] \rightarrow \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$ , composé des morphismes

$$\begin{cases} K[y, F] \rightarrow K[y, F'] \\ F \mapsto F'^\ell \end{cases} \quad \begin{cases} K[y, F'] \rightarrow \widehat{K}[y] \\ F' \mapsto y - \varphi \end{cases}$$

La platitude du premier est évidente. Pour le second, on se ramène par translation et changement de base à montrer que le morphisme  $K[F'] \rightarrow \widehat{K}, F' \mapsto \varphi$ , est plat. Il se factorise en le composé du passage aux fractions  $K[F'] \rightarrow K(F')$  avec l'injection  $K(F') \hookrightarrow \widehat{K}$  déduite de  $\varphi$ . Chacun de ces morphismes est plat.  $\square$

**REMARQUE 2.1.4.** La construction de l'anneau de dilatation  $\mathcal{D}il_\pi^f W[y]$  est inspirée de celle de [Nagata, 1958], qui considère le cas  $\ell = 2$ . (Voir aussi [Nagata, 1962, appendice, E4.1] et [Heinzer et al., 1997].)

**2.2. Le diviseur  $C = V(F)$ .**

**2.2.1.** On conserve les notations précédentes. Soit  $A$  le localisé de l'anneau de dilatation  $\mathcal{D}$  en l'idéal premier image inverse de l'idéal  $(\pi, y) \subseteq \widehat{W}[y]$ . C'est un anneau noëthérien par fidèle platitude, de corps résiduel  $k$ .

**LEMME 2.2.2.** *L'anneau  $A$  satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) *il est régulier et la suite  $(\pi, F)$  est régulière ;*
- (ii) *son quotient  $A/F$  est intègre ;*
- (iii) *l'intersection schématique du fermé  $V(F)$  avec le spectre époiné de  $A$  est un schéma régulier.*

*Démonstration.* (i) Il suffit d'établir les deux énoncés pour  $\mathcal{D}$ . Pour se faire, on peut compléter  $\pi$ -adiquement (cf. par exemple [AC, X, §4, n°2, cor. 3]). Le complété de  $\mathcal{D}$  est isomorphe à  $\widehat{W}[y]$  de sorte que la régularité de l'anneau et de la suite  $(\pi, F)$  — c'est-à-dire l'injectivité de la multiplication par  $\pi$ , et par  $F$  modulo  $\pi$  — sont évidents. (ii) Si on inverse  $\pi$ , l'anneau  $A$  devient une localisation de l'anneau de polynômes  $K[y, F]$ . La restriction du diviseur à cet ouvert est intègre. La multiplication par  $\pi$  dans le quotient  $A/F$  étant injective d'après (i), l'intégrité de  $A/F$  résulte de celle de  $A[\pi^{-1}]/F$ . Le quotient est non nul car  $F \in \mathfrak{m}_A$ . (iii) Sur l'ouvert complémentaire de  $V(\pi)$ , l'élément  $F$  est une indéterminée de sorte que le résultat est clair. D'autre part, l'intersection du complémentaire de  $V(y)$  avec le diviseur est contenu dans le complémentaire de  $V(\pi)$  car l'équation est — dans le complété  $\pi$ -adique — de la forme  $(y - \varphi)^\ell$ , avec  $\varphi \in (\pi)$ . Ceci suffit pour conclure.  $\square$

**2.2.3.** Notons le fait suivant, trivial mais crucial : par construction, le diviseur  $V(F)$  devient  $V((y - \varphi)^\ell)$  dans le complété  $\widehat{A}$  de  $A$  relativement à son idéal maximal.

**2.3. Hensélisation.** Pour simplifier les notations, on suppose dorénavant le corps  $k$  séparablement clos.

**2.3.1.** Soient  $A^{\text{hs}}$  le hensélisé de  $A$  en son point fermé,  $\widehat{A}$  le complété de  $A$  (ainsi que de  $A^{\text{hs}}$ ), et notons  $X = \text{Spec}(A^{\text{hs}})$  et  $\widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A})$  leurs spectres respectifs, ainsi que  $\star$  et  $\widehat{\star}$  les points fermés. Comme  $\text{Spec}(A)$ , le schéma  $X$  est intègre.

De plus, le diviseur  $C$  d'équation  $F = 0$  dans  $X$  est réduit, cette propriété étant également conservée par hensélisation.

**2.3.2.** Vérifions que le diviseur  $C$  est *irréductible*. D'après le théorème de comparaison de Elkik, le morphisme  $\pi_0(\widehat{C} - \widehat{\star}) \rightarrow \pi_0(C - \star)$  est une bijection. Or,  $\widehat{C} - \widehat{\star}$  est connexe : dans un anneau local régulier  $B$ , le spectre  $\text{Spec}(B/\mathfrak{g}^\ell)$  est irréductible pour tout  $\mathfrak{g} \in \mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_B^2$ . Ainsi, l'ouvert  $C - \star$  de  $C$  est connexe et, finalement,  $C$  est irréductible.

**2.4. Application cohomologique.** On suppose dorénavant l'entier  $\ell$  inversible sur  $X$ .

**2.4.1.** Notons pour simplifier  $G$  l'élément  $(y - \varphi)^\ell$  de  $\widehat{A}$ , de sorte que — par construction — on a l'égalité  $F = G^\ell$  dans  $\widehat{A}$ . Notons  $U$  l'ouvert affine  $X - C$  du schéma strictement local  $X$ . Soit  $j$  l'immersion ouverte de  $U$  dans le spectre époiné  $X - \star$  et  $i$  l'immersion fermée  $C - \star \hookrightarrow X - \star$ .

**2.4.2.** Le triangle

$$i_* i^! \rightarrow \text{Id} \rightarrow \mathbf{R}j_* j^*$$

sur  $X - \star$  induit la suite exacte

$$H_{C-\star}^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H^3(U, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H_{C-\star}^4(X-\star, \mathbf{Z}/\ell) = H^2(C-\star, i^! \mathbf{Z}/\ell[2]).$$

Par pureté (XVI-3.1.1), le faisceau de cohomologie locale  $i^! \mathbf{Z}/\ell$  est constant concentré en degré 2. Or le groupe de cohomologie  $H^2(C - \star, \mathbf{Z}/\ell)$  est nul : la cohomologie du corps des fractions d'un anneau  $B$  strictement local intègre de dimension 1 est nul en degré  $\geq 2$ . (On se ramène au cas bien connu d'un anneau de valuation discrète en observant que le normalisé de  $B$  dans son corps des fractions est un anneau noëthérien, de Dedekind, et strictement local car colimite locale d'anneaux strictement locaux.) Il en résulte que la flèche de restriction  $H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H^3(U, \mathbf{Z}/\ell)$  est surjective ; nous allons voir que c'est un isomorphisme.

**2.4.3.** Comme rappelé ci-dessus, le morphisme  $H_{C-\star}^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell)$  s'identifie, par pureté, au morphisme de Gysin  $\text{Gys}(f) : H^1(C - \star, \mathbf{Z}/\ell) \rightarrow H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell)$ . Il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(C - \star, \mathbf{Z}/\ell) & \xrightarrow{\text{Gys}(F)} & H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\widehat{C} - \star, \mathbf{Z}/\ell) & \xrightarrow{\text{Gys}(F) = \text{Gys}(G^\ell)} & H^3(\widehat{X} - \star, \mathbf{Z}/\ell), \end{array}$$

de l'égalité  $\text{Gys}(F) = \ell \cdot \text{Gys}(G)$  et enfin du fait que les flèches verticales sont des isomorphismes (comparaison à la complétion, [Fujiwara, 1995, 6.6.4]) que le morphisme  $\text{Gys}(F)$  est nul. (La commutativité du diagramme résulte par exemple de la définition XVI-2.3.1 et de XVI-2.2.3.1.) Ainsi, le morphisme de restriction induit un isomorphisme

$$H^3(X - \star, \mathbf{Z}/\ell) \xrightarrow{\sim} H^3(U, \mathbf{Z}/\ell).$$

Or le terme de gauche est non nul, à nouveau par pureté. Le schéma affine  $U$  est donc de dimension cohomologique  $> 2$ . CQFD.

### 3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique

On étend la construction précédente en dimension arbitraire  $\geq 2$ .



### 3.1. Une série formelle et sa décomposition.

3.1.1. Soit  $A$  un anneau commutatif. Rappelons que l'application  $A$ -linéaire

$$\sum_{i=1}^n A[x_{j \neq i}][[x_i]] \rightarrow A[[x_1, \dots, x_n]]$$

somme des injections canoniques est *surjective* : si  $G \in A[[x_1, \dots, x_n]]$ , on peut par exemple regrouper pour chaque  $i \in [1, n]$  les termes  $\alpha x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \in A[[x_1, \dots, x_n]]$  de  $G$  pour lesquels  $\beta_i = \max_{j \in [1, n]} \beta_j$  et  $\beta_1, \dots, \beta_{i-1} < \beta_i$ . (Cette dernière condition n'est là que pour définir  $i$  de façon non ambiguë ; tout autre choix conviendrait.) La somme  $g_i$  de ces termes appartient à  $A[x_{j \neq i}][[x_i]]$ , et  $G = g_1 + \cdots + g_n$ .

3.1.2. On fixe maintenant deux entiers non nuls  $n$  et  $\ell$  et on considère

$$S = \left( y + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{\infty} t_{i\alpha} x_i^\alpha \right)^\ell \in \mathbf{Z}[y, t_{i \in [1, n], \alpha \geq 1}] [[x_1, \dots, x_n]].$$

Il résulte de l'observation précédente que l'on peut écrire cette série sous la forme

$$y^\ell + f_1 + \cdots + f_n$$

où chaque  $f_i$  est une série formelle en  $x_i$ , à coefficients polynomiaux en les autres variables.

3.1.3. Afin que la proposition de platitude ci-dessous soit vraie, on procède de façon légèrement différente pour définir les séries formelles  $f_i \in \mathbf{Z}[y, t_{j\alpha}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$  telles que  $S - y^\ell = \sum_{i=1}^n f_i$ . Écrivons

$$S = y^\ell + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha \right)^\ell + (\text{élément de degré} < \ell \text{ en les } t_{j\beta}).$$

Soient  $i \in [1, n]$  et  $\alpha \geq 1$  des indices. On considère les termes  $\alpha x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$  de  $(\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell$  pour lesquels  $i$  est le plus grand indice tel que  $\beta_i \neq 0$ , c'est-à-dire les termes de  $(\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell$  qui sont dans  $\mathbf{Z}[t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}, x_1, \dots, x_i]$  mais pas dans  $\mathbf{Z}[t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}, x_1, \dots, x_{i-1}]$ . À  $i$  fixé, la somme sur  $\alpha$  de ces termes est un élément  $f_{i,=\ell}$  de  $\mathbf{Z}[t_{j\beta}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$ . Par construction, on a l'égalité  $\sum_{\alpha=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^n t_{i\alpha} x_i^\alpha)^\ell = \sum_{i=1}^n f_{i,=\ell}$ . Enfin, on décompose le terme restant,  $S - y^\ell - \sum_{i=1}^n f_{i,=\ell}$ , en une somme  $\sum_{i=1}^n f_{i,<\ell}$  où chaque  $f_{i,<\ell}$  appartient à  $\mathbf{Z}[y, t_{j\beta}, x_{k \neq i}] [[x_i]]$ , en procédant par exemple comme en 3.1.1. On pose alors  $f_i = f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$  ; chacun de ces éléments est de degré total en les  $t_{j\beta}$  inférieur ou égal à  $\ell$ , et appartient donc également à  $\mathbf{Z}[y, t_{j\beta \neq \alpha}] [[x_1, \dots, x_n]] [t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}]$  pour chaque  $\alpha \geq 1$ .

PROPOSITION 3.1.4. Fixons  $\alpha \geq 1$ . Notons  $T_i = t_{i\alpha}$  pour chaque  $i \in [1, n]$  et  $R_\alpha$  l'anneau  $\mathbf{Z}[y, t_{j\beta \neq \alpha}] [[x_1, \dots, x_n]]$ . Le morphisme

$$\begin{aligned} R_\alpha[F_1, \dots, F_n] &\rightarrow R_\alpha[T_1, \dots, T_n] \\ F_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

est libre, donc plat, au-dessus de l'ouvert  $x_1 \cdots x_n \neq 0$  de  $\text{Spec}(R)$ .

*Démonstration.* Par construction, chaque  $f_i$  est une somme  $f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$ , où  $f_{i,=\ell}$  (resp.  $f_{i,<\ell}$ ) est un polynôme dans  $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$  de degré total égal (resp. strictement inférieur) à  $\ell$ . De plus,  $f_{i,=\ell}$  est, comme polynôme en  $T_i$ , de la forme  $x_i^{\alpha\ell} T_i^\ell + \sum_{m < \ell} c_m T_i^m$  où les  $c_m$  appartiennent à  $R_\alpha[T_{j < i}]$ . Munissons les monômes de  $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$  de l'ordre lexicographique gradué suivant :  $T_1^{d_1} \cdots T_n^{d_n} \preceq T_1^{d'_1} \cdots T_n^{d'_n}$  si et seulement si  $\sum d_i < \sum d'_i$  ou  $\sum d_i = \sum d'_i$  et  $d_i < d'_i$  pour le plus grand  $i$  tel que

$d_i \neq d'_i$ . Il est clair que le terme de tête  $\text{in}_{\leq}(g)$  pour cet ordre d'un polynôme  $g = f_1^{q_1} \cdots f_n^{q_n}$  en les  $f_i$  est  $T_1^{q_1 \ell} \cdots T_n^{q_n \ell}$ , à multiplication près par un monôme en les  $x_i$ . Il en résulte immédiatement qu'en inversant les  $x_i$ , l'anneau  $R_\alpha[T_1, \dots, T_n]$  est libre sur  $R_\alpha[F_1, \dots, F_n]$  de base les monômes  $T_1^{r_1} \cdots T_d^{r_d}$ , avec  $0 \leq r_i < \ell$ .  $\square$

**3.1.5.** Soit  $A$  un anneau local noëthérien régulier de dimension  $n$  dont on note  $x_1, \dots, x_n$  un système régulier de paramètres. On pourra penser par exemple au localisé  $k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$  d'un anneau de polynômes sur un corps. On considère le gonflement  $A]_{\underline{t}}$  défini en 1.3, où  $\underline{t}$  est l'ensemble des variables  $\{t_{i\alpha} : i \in [1, \dots, n], \alpha \in \mathbf{N}_{\geq 1}\}$ .

**3.2. Construction d'un anneau local régulier pathologique.** Soit  $i \in [1, \dots, n]$ . Notons encore  $f_i$  l'image de la série formelle à coefficients entiers considérée en 3.1.3 dans le complété  $x_i$ -adique de  $A]_{\underline{t}}[y]$ , et  $\mathcal{D}_i$  l'anneau de dilatation  $\mathcal{D}il_{x_i}^{f_i} A]_{\underline{t}}[y]$ . Le produit tensoriel  $\mathcal{P}$  de ces  $A]_{\underline{t}}[y]$ -algèbres s'envoie naturellement dans le complété  $\widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$ , où la première complétion est faite relativement à l'idéal maximal  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $A]_{\underline{t}}$ . On note  $\mathcal{D}$  le localisé de  $\mathcal{P}$  en l'image de l'idéal maximal  $(x_1, \dots, x_n, y)$  de  $\text{Spec}(\widehat{A]_{\underline{t}}[[y]])$ .

**PROPOSITION 3.2.1.** *Le morphisme  $\mathcal{D} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$  est fidèlement plat.*

Il en résulte que l'anneau  $\mathcal{D}$  est local noëthérien, régulier.

**REMARQUE 3.2.2.** Notons qu'il est clair que  $\mathcal{D}$  est « quasi-régulier ». En effet, le gradué de  $\mathcal{D}$  relativement à l'idéal  $(x_1, \dots, x_n, y)$  est une algèbre symétrique : pour chaque entier  $r$ , le morphisme  $A]_{\underline{t}}[y] \rightarrow \mathcal{P}$  induit un isomorphisme modulo  $(x_1, \dots, x_n)^r$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que le morphisme  $\mathcal{P} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$  est plat. D'après le critère de platitude rappelé précédemment (1.2.2), il suffit de montrer la platitude sur l'ouvert  $x_1 \cdots x_n \neq 0$ . En effet, le cas où seuls certains  $x_i$  sont nuls se ramène à ce cas particulier : en tensorisant par  $A]_{\underline{t}}[y]/x_i$  le morphisme  $\mathcal{P} \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]}$ , on obtient une flèche du même type définie par l'anneau  $A/x_i$  de dimension  $n - 1$  et des séries qui coïncident avec l'évaluation en  $x_i = 0$  des  $f_1, \dots, \widehat{f_i}, \dots, f_n$ . Pour chaque  $i$ ,  $\mathcal{D}_i[x_i^{-1}]$  est une algèbre de polynômes  $A]_{\underline{t}}[y, F_i][x_i^{-1}]$  de sorte que le morphisme dont on souhaite montrer la platitude est

$$A]_{\underline{t}}[y, F_1, \dots, F_n] \left[ \frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right] \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}}[[y]]} \left[ \frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right],$$

$$F_i \mapsto f_i.$$

Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble fini  $\mathcal{T}$  des variables  $\underline{t}$ , le morphisme

$$A]_{\underline{t}} \in \mathcal{T} \left[ [y, F_1, \dots, F_n] \left[ \frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right] \rightarrow \widehat{A]_{\underline{t}} \in \mathcal{T} [[y]]} \left[ \frac{1}{x_1 \cdots x_n} \right] \right]$$

est plat. Quitte à agrandir un tel ensemble  $\mathcal{T}$ , on se ramène au cas où  $\mathcal{T}$  est cofini, de complémentaire des variables  $t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}$  pour un indice  $\alpha \geq 1$  quelconque. Posant alors  $R_\alpha = A]_{t_{i,\beta \neq \alpha}}$  et  $R' = A]_{\underline{t}}$ , il suffit de montrer que le morphisme  $R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \rightarrow R'[[y]]$  est plat au-dessus de l'ouvert  $x_1 \cdots x_n \neq 0$ . Un dernier dévissage nous ramène à montrer la platitude du morphisme  $R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \rightarrow$

$R_\alpha[y, t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}]$ , au-dessus du même ouvert. Ce dernier point résulte de la proposition 3.1.4.  $\square$

**PROPOSITION 3.2.3.** *Le diviseur  $C = V(y^\ell + F_1 + \dots + F_n)$  de  $\text{Spec}(\mathcal{D})$  est régulier hors du point fermé.*

Dans cet énoncé, on note abusivement  $F_i$  l'image dans  $\mathcal{D}$  de l'élément de  $\mathcal{D}_i$  correspondant à  $f_i$  (cf. 1.1).

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble strict  $E$  de  $[1, n]$ , l'intersection schématique de  $C$  avec le sous-schéma  $X_E = \{x_i = 0, i \in E; x_i \neq 0, i \notin E\}$  de  $\text{Spec}(\mathcal{D})$  est un diviseur régulier de  $X_E$ . Si  $E = \emptyset$ , cela résulte du fait que le schéma  $X_\emptyset$  est le localisé d'une algèbre de polynômes en les  $y, F_1, \dots, F_n$ . Le cas général se ramène aisément à ce cas particulier. (Remarquons que si  $x_i = 0$ , il en est de même de  $F_i$ .)  $\square$

**PROPOSITION 3.2.4.** *L'image inverse de  $C$  dans un localisé strict de  $\text{Spec}(\mathcal{D})$  est irréductible.*

*Démonstration.* Même argument qu'en dimension 2.  $\square$

**COROLLAIRE 3.2.5.** *Pour tout entier  $d \geq 1$ , il existe schéma noëthérien strictement local régulier  $X$  de dimension  $d$  et un ouvert affine  $U = D(f)$  de  $\ell$ -dimension cohomologique  $2d - 1$ .*

*Démonstration.* La même démonstration qu'en dimension 2 nous permet de minorer la dimension cohomologique par  $2d - 1$ . D'après XVIII-A-1.a, c'est une égalité.  $\square$

## 4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »

### 4.1. Énoncé.

**THÉORÈME 4.1.1.** *Soit  $R \rightarrow R'$  un morphisme local essentiellement de type fini d'anneaux noëthériens strictement locaux intègres. Notons  $K$  le corps des fractions de  $R$ . Alors, pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $R$ , on a la majoration*

$$\text{cd}_\ell(R' \otimes_R K) \leq \dim(R'),$$

où le terme de gauche désigne la  $\ell$ -dimension cohomologique étale du spectre de l'anneau  $R' \otimes_R K$  et le terme de droite désigne la dimension de Krull de  $R'$ .

**4.1.2.** Dans cet énoncé, l'hypothèse de finitude sur  $f$  signifie que ce morphisme est localement de la forme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ , avec  $B$  une colimite de  $A$ -algèbres de type fini à morphismes de transition étales.

**COROLLAIRE 4.1.3.** *Soit  $R$  un anneau strictement local noëthérien intègre de corps des fractions  $K$  et soit  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $R$ . Alors, on a la majoration*

$$\text{cd}_\ell(K) \leq \dim(R).$$

**REMARQUE 4.1.4.** Réciproquement, on peut montrer que si, sous les hypothèses du corollaire,  $U$  est un ouvert non vide strict de  $\text{Spec}(R)$ , alors  $\text{cd}_\ell(U) \geq \dim(R)$  et que, lorsque  $R' \otimes_R K \neq 0$ , la majoration du théorème est une égalité. Une façon de procéder, due à O. Gabber (non publié), est d'utiliser une variante de la méthode (également due à O. Gabber) exposée dans [Gabber & Orgogozo, 2008,

§6.1] et reposant sur une « astuce quadratique ». Pour une autre méthode, voir §6, *infra*. Rappelons que la minoration « limite »  $\mathrm{cd}_\ell(\mathbf{K}) \geq \dim(\mathbf{R})$  est élémentaire : on procède par spécialisations successives en codimension 1 (voir [SGA 4 X 2.4]).

#### 4.2. Démonstration.

4.2.1. On procède par récurrence sur  $d' = \dim(\mathbf{R}')$  et l'on se ramène au cas excellent.

4.2.2. Notons  $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ ,  $Y = \mathrm{Spec}(\mathbf{R}')$  et respectivement  $X^*$  et  $Y^*$  les spectres époutés. Considérons l'ouvert  $Y_* = Y \times_X X^*$  de  $Y^*$ ,  $V = \mathrm{Spec}(\mathbf{R}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K})$  la fibre générique de  $Y \rightarrow X$  et enfin  $j$  le morphisme  $V \hookrightarrow Y^*$ . Il résulte de l'hypothèse de récurrence que pour chaque faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Z}/\ell$ -modules sur  $V$ , le complexe  $\Phi_{\mathcal{F}} = \mathbf{R}j_*\mathcal{F}$  appartient à  $\mathbf{D}^{\leq \mathrm{cod}}(Y^*)$ , où  $\mathrm{cod}$  est la fonction de perversité  $y \mapsto \dim \mathcal{O}_{Y,y}$ . (Ceci est encore vrai avec  $y \mapsto d' - \dim \overline{\{y\}}$ .) On veut montrer que  $H^r(V, \mathcal{F}) = H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$  est nul pour  $r > d'$ . Fixons un tel  $r$  et une classe  $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$ .

4.2.3. On suppose  $d \geq 2$ , et on choisit un système de paramètres  $x_1, \dots, x_d$  pour l'anneau strictement local  $\mathbf{R}$ . Soit  $Z = Y\{t_1, \dots, t_{d-1}\}$  le « gonflement étale », hensélisé strict de  $\mathbf{A}_Y^{d-1} = Y[t_1, \dots, t_{d-1}]$  en un point générique géométrique de la fibre spéciale sur  $Y$ . L'« hyperplan »  $H = V(t_1x_1 + \dots + t_{d-1}x_{d-1} + x_d)$  de  $Z$  est de codimension 1, essentiellement lisse au-dessus de  $Y_*$ . Considérons le triangle distingué

$$\mathbf{R}\Gamma_{H_*}(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(Z_* - H_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow,$$

où l'on note  $Z_*$  le produit fibré  $Z \times_Y Y_*$  et, abusivement,  $\Phi_{\mathcal{F}}$  ses diverses images inverses. Soit  $i$  l'immersion fermée  $H_* \hookrightarrow Z_*$ , où  $H_* = H \times_Z Z_*$ . Le morphisme  $\mathbf{Z}/\ell \rightarrow i^!\mathbf{Z}/\ell(1)[2]$  de complexes sur  $H_*$  est un isomorphisme par pureté relative. On montre par dévissage qu'il en est de même de la flèche  $\Phi_{\mathcal{F}|H_*} \rightarrow i^!\Phi_{\mathcal{F}|Z_*}(1)[2]$  obtenue par tensorisation à partir de la précédente. On utilise ici le fait que la restriction de  $\Phi_{\mathcal{F}}$  à  $Z_*$  provient de la base  $Y_*$ . On en tire le morceau de suite exacte :

$$H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}})(-1) \rightarrow H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^r(Z_* - H_*, \Phi_{\mathcal{F}}).$$

Notons que  $Z_* - H_* = Z - H$  car  $H$  contient la fibre spéciale de  $Z \rightarrow X$ . Soient  $\widehat{Y}$  le complété ( $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}'}$ -adique) de  $Y$  et  $\widetilde{Z}$  un hensélisé strict du produit fibré  $Z \times_Y \widehat{Y}$ . Notons que le morphisme  $\widetilde{Z} \rightarrow Z$  est un morphisme local entre schémas strictement locaux induisant un isomorphisme sur la complétion le long de la fibre spéciale sur  $Y$ . Il résulte donc du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]) que le morphisme  $H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^r(\widetilde{Z}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$  est un *isomorphisme* pour chaque  $r$ . Il en est de même de  $H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^{r-2}(\widetilde{H}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$ , où  $\widetilde{H}_* = H_* \times_{Z_*} \widetilde{Z}_*$ . Le schéma  $\widetilde{Z}_* - \widetilde{H}_*$  est un ouvert affine, qui coïncide avec  $\widetilde{Z} - \widetilde{H}$ , d'un schéma strictement local essentiellement de type fini sur le schéma local noëthérien complet  $\widehat{Y}$ . Comme l'appartenance de  $\Phi_{\mathcal{F}}$  à  $\mathbf{D}^{\leq \mathrm{cod}}$  est préservée par complétion, il résulte du théorème de Lefschetz affine (XV-1.2.2), dans le cas excellent, que le groupe de cohomologie  $H^r(\widetilde{Z}_* - \widetilde{H}_*, \Phi_{\mathcal{F}})$  est nul pour chaque  $r > \dim(Z) = \dim(Y) = d'$ . En conséquence, le morphisme  $H^r(\widetilde{Z}_*, \Phi) \rightarrow H^r(\widetilde{Z}_* - \widetilde{H}_*, \Phi)$  est nul pour les mêmes  $r$ . De ce fait, des théorèmes de comparaisons susmentionnés et de la compatibilité du morphisme de Gysin à la complétion, il résulte formellement que toute classe  $c \in H^r(Z_*, \Phi_{\mathcal{F}})$  provient d'une classe dans  $H^{r-2}(H_*, \Phi_{\mathcal{F}})(-1)$  et est donc tuée par restriction à  $Z_* - H_*$ .

**4.2.4.** Il existe donc un voisinage étale  $e : W \rightarrow \mathbf{A}_Y^{d-1}$  dont l'image rencontre la fibre spéciale sur  $Y$  tel que la classe  $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$  soit tuée par restriction à  $W - H_W$ . Notons  $k'$  le corps résiduel de  $Y$ , et  $k$  celui de  $X$ . L'ensemble  $k^{d-1}$  est dense dans  $\mathbf{A}_{k'}^{d-1}$ , car  $k$  est infini. Il en résulte qu'il existe une section  $\sigma : Y \rightarrow \mathbf{A}_Y^{d-1}$ , correspondant à des spécialisations des  $t_i$  à valeurs dans  $R$ , telle que  $W_\sigma$  ait une fibre spéciale sur  $Y$  non vide. Le schéma  $Y$  étant strictement local, on relève cette section en  $Y \rightarrow W_\sigma \rightarrow W$ . La classe de cohomologie  $c$  est donc nulle sur  $Y - H_Y$ , où  $H_Y$  est maintenant une hypersurface d'équation  $x_d + t_1x_1 + \cdots + t_{d-1}x_{d-1}$  à coefficients  $t_i$  dans  $R$ . Cet ouvert affine  $Y - H_Y$  contient la fibre générique  $V = Y \otimes_R K$  car l'élément  $x_d + t_1x_1 + \cdots + t_{d-1}x_{d-1} \in R$  est non nul, les  $x_i$  constituant un système de paramètres de  $R$ . Finalement la restriction de  $c \in H^r(Y^*, \Phi_{\mathcal{F}})$  à  $H^r(V, \Phi_{\mathcal{F}}) = H^r(V, \mathcal{F})$ , qui est la classe dont on est parti, est nulle. CQFD.

## 5. Majoration : amélioration

### 5.1. Énoncé.

**5.1.1.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme entre espaces topologiques sobres non vides. On note

$$\dim.\text{cat}(f) = \sup \{n \in \mathbf{N} : \exists y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow y_n, f(y_0) \neq f(y_1) \neq \cdots \neq f(y_n)\} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$$

la *dimension caténaire* de  $f$ , où chaque  $y_i \rightsquigarrow y_{i+1}$  est une spécialisation.

**5.1.2.** Par construction,  $\dim.\text{cat}(f : Y \rightarrow X)$  est majorée par les dimensions de  $X$  et de  $Y$  avec égalité par exemple lorsque  $f$  est l'identité. Plus généralement, lorsque  $f$  est un morphisme *générant* ([ÉGA I' 3.9.1]) — comme c'est le cas d'un morphisme plat de schémas — la dimension caténaire coïncide avec la dimension de l'image.

**REMARQUE 5.1.3.** Si  $f$  est un morphisme dominant essentiellement de type fini (au sens du 4.1.2) entre schémas noëthériens intègres, on peut montrer que la dimension caténaire de  $f$  est la dimension de l'image d'une platification de  $f$ .

**THÉORÈME 5.1.4.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme essentiellement de type fini entre schémas noëthériens strictement locaux et soit  $V$  un ouvert affine de  $Y$ . Alors, pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$ , on a la majoration

$$\text{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \max(0, \dim.\text{cat}(f) - 1).$$

En particulier, si  $\dim(X) \geq 1$ ,  $\text{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \dim(X) - 1$ .

**COROLLAIRE 5.1.5.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme essentiellement de type fini entre schémas noëthériens strictement locaux, où  $\dim(X) \geq 1$ , et soit  $V$  un ouvert affine de  $Y$ . Alors, pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$ , on a la majoration

$$\text{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \dim(X) - 1.$$

**COROLLAIRE 5.1.6.** Soit  $d \geq 1$  un entier et soit  $n$  un entier dans l'intervalle fermé  $[d, 2d - 1]$ . Il existe un schéma noëthérien strictement local  $X$ , régulier de dimension  $d$ , et un ouvert affine  $U$  de ce schéma tel pour tout nombre premier  $\ell$  inversible sur  $X$  on ait l'égalité

$$\text{cd}_\ell(U) = n.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout entier  $d \geq 1$ , et tout entier  $r \geq 0$ , il existe un schéma noëthérien strictement local régulier  $Y$  de dimension  $d + r$  et un ouvert affine  $V$  de  $Y$  de  $\ell$ -dimension cohomologique égale

à  $2d + r - 1$ . Soient  $X$  et  $f$  comme en 3.2.5 : l'ouvert affine  $U = X[f^{-1}]$  est de dimension  $d$ ,  $\ell$ -dimension cohomologique  $\delta = 2d - 1$ . Plus précisément, il résulte de la démonstration qu'il existe une classe non nulle dans  $H^\delta(U, \mathbf{Z}/\ell)$ . Considérons maintenant  $Y = X[T]_{(0)}$  un hensélisé stricte de la droite affine sur  $X$  en l'origine de la fibre spéciale,  $g = fT \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$  et  $V$  l'ouvert affine  $Y[g^{-1}]$ . On a  $\dim(Y) = d + 1$ . Par pureté cohomologique, on vérifie immédiatement que le groupe de cohomologie  $H^{d+1}(V, \mathbf{Z}/\ell)$  est également non nul. Par récurrence, on obtient une paire  $(Y, V)$  comme ci-dessus telle que  $cd_\ell(V) \geq 2d + r - 1$ . D'après le corollaire précédent, on a également la majoration  $cd_\ell(V) \leq 2d + r - 1$ , d'où l'égalité.  $\square$

## 5.2. Démonstration.

5.2.1. On procède par récurrence sur la dimension caténaire de  $f$ .

5.2.2.  $\dim.\text{cat}(f) = 0$ . Cette égalité se produit si et seulement si  $Y$  est contenu dans la fibre spéciale. Le théorème est donc connu dans ce cas : on est sur un corps donc dans une situation excellente.

5.2.3.  $\dim.\text{cat}(f) = 1$ . On peut supposer les schémas  $X$  et  $Y$  réduits. Quitte à procéder par récurrence sur la dimension de  $Y$ , on peut également supposer  $Y$  irréductible : si  $Y$  est la réunion de deux fermés stricts  $Y_1$  et  $Y_2$ , considérer par exemple le morphisme  $\pi : Y_1 \amalg Y_2 \rightarrow Y$  et la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi^* \mathcal{F} \rightarrow i_* \mathcal{H} \rightarrow 0$ , où  $i$  est l'immersion fermée  $Y_1 \cap Y_2 \hookrightarrow Y$  et  $\mathcal{H}$  un faisceau sur cette intersection. Quitte à remplacer  $X$  par l'adhérence de l'image de  $f$ , on peut également supposer la base intègre et  $f$  dominant. Soit  $\eta$  (resp.  $s$ ) le point générique (resp. fermé) de  $X$  et  $\eta'$  (resp.  $s'$ ) le point générique (resp. fermé) de  $Y$ . Comme tout point  $y$  de  $Y$  s'insère dans une suite de spécialisations  $\eta' \rightsquigarrow y \rightsquigarrow s'$ , d'image  $\eta \rightsquigarrow f(y) \rightsquigarrow s$ , il résulte de l'hypothèse  $\dim.\text{cat}(f) = 1$  que  $f(y) = \eta$  ou  $f(y) = s$ . Soient  $\widehat{X}$  le complété de  $X$  et  $\widetilde{Y}$  un hensélisé strict du produit fibré  $Y \times_X \widehat{X}$ . C'est un schéma strictement local de dimension  $\dim(Y)$  et excellent car essentiellement de type fini sur le schéma local noëthérien complet — donc excellent —  $\widehat{X}$ . On note  $\widetilde{V}$  l'ouvert  $V \times_Y \widetilde{Y}$ . Il résulte de [SGA 4 $\frac{1}{2}$  [FINITUDE] 1.9] qu'au-dessus de  $\eta$ , et donc au-dessus de  $X - \{s\}$ , la formation des images directes par  $j : V \hookrightarrow Y$  commute au changement de base  $\widetilde{Y} \rightarrow Y$ . En d'autres termes, si  $V' = V \cup (Y - Y_s)$  et  $j'$  désigne l'immersion intermédiaire  $V \hookrightarrow V'$ , la formation de  $Rj'_*$  commute à  $\widetilde{Y} \rightarrow Y$ . Il en est de même pour  $j'' : V' \rightarrow Y$  d'après le théorème de comparaison à la complétion de Fujiwara-Gabber ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]). On utilise ici le fait que si  $F$  est un fermé de  $Y$  inclus dans la fibre spéciale alors les complétés de  $Y$  le long de  $F$  et celui de l'hensélisé de  $\widetilde{Y}$  (en le point correspondant au point fermé de  $Y$ ) sont naturellement isomorphes. Finalement, le foncteur  $R\Gamma(V) = R\Gamma(Y) \circ Rj_*$  s'identifie au foncteur  $R\Gamma(\widetilde{Y}) \circ R\widetilde{j}_* = R\Gamma(\widetilde{V})$ , appliqué à l'image inverse. Ainsi on a l'inégalité  $cd_\ell(V) \leq cd_\ell(\widetilde{V})$ . Le schéma  $\widetilde{Y}$  est quasi-excellent, le terme de droite est donc justiciable du théorème de Lefschetz affine. L'inégalité  $cd_\ell(V) \leq \dim(Y)$  résulte alors de l'égalité  $\dim(Y) = \dim(Y')$ .

REMARQUE 5.2.4. Lorsque  $\dim(R) = 1$ , on a vu en XIII-2.3 que le théorème peut également se démontrer par normalisation.

5.2.5.  $\dim.\text{cat}(f) > 1$ . Notons à nouveau  $j$  l'immersion ouverte  $V \hookrightarrow Y$ . Par restriction à la fibre générique, on a un isomorphisme  $R\Gamma(V_\eta, \mathcal{F}) = R\Gamma(Y_\eta, (Rj_* \mathcal{F})_{|Y_\eta})$ . Si  $y$  est un point géométrique de  $Y$  localisé en  $Y_\eta$ , la fibre  $(R^q j_* \mathcal{F})_y$  est nulle dès

lors que  $q > \dim(\mathcal{O}_{Y_\eta, y})$ . Cela résulte par passage à la limite du théorème d'Artin pour les schémas affines de type fini sur un corps et du fait trivial que  $Y_{(y)} \rightarrow Y$  se factorise à travers  $Y_\eta$ . Soient  $q \geq 0$  un entier,  $\mathcal{G}$  un sous-faisceau constructible de  $(R^q j_* \mathcal{F})_{|Y_\eta}$  et  $S$  l'adhérence dans  $Y$  de son support. D'après ce qui précède, on a la majoration  $\text{codim}(S_\eta, Y_\eta) \geq q$ . Il en résulte que  $\text{codim}(S, Y) \geq q$ , et ce sans hypothèse de caténarité sur les schémas. De la suite spectrale de composition des foncteurs et du théorème 4.1.1, on déduit que le groupe de cohomologie  $H^n(Y_\eta, \mathcal{G})$  est nul lorsque  $n > \dim(Y)$ .

Considérons la flèche d'adjonction  $\mathcal{F} \rightarrow k_* k^* \mathcal{F}$ , où  $k$  est l'immersion  $V_\eta \hookrightarrow V$ , et  $\mathcal{H}$  son noyau. Par construction, la restriction de  $\mathcal{H}$  à  $V_\eta$  est nulle. La dimension de l'adhérence du support de  $\mathcal{H}$  est donc au plus  $\dim(Y) - 1$ . Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que le résultat d'annulation désiré est connu pour  $\mathcal{H}$ . Procédant de même pour le conoyau de l'adjonction précédente, on se ramène à démontrer l'annulation du groupe  $H^p(V, R^0 k_* k^* \mathcal{F})$  pour  $p \geq \dim(Y) + \dim.\text{cat}(f) (> \dim(Y))$ . Compte tenu du résultat d'annulation précédemment établi pour  $R\Gamma(V_\eta, \mathcal{F}) = R\Gamma(V, Rk_* k^* \mathcal{F})$  et de la suite spectrale de Leray  $E_2^{p,q} = H^p(V, R^q k_* k^* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(V_\eta, \mathcal{F})$ , il suffit de montrer que pour chaque tel  $q$ , les groupes  $H^{p-q-1}(V, R^q k_* k^* \mathcal{F})$  sont nuls pour  $q > 0$ . Fixons  $q$ . Soit  $y$  un point géométrique de  $Y$  tel que la fibre de  $R^q k_* k^* \mathcal{F}$  en  $y$  soit non nulle et  $x$  le point image de  $Y$  dans  $X$ . Le schéma  $\eta \times_X X_{(x)}$  se décompose en un coproduit de spectres de corps  $\eta_\alpha$ ; de même, le produit fibré  $Y_{(y)} \times_X \eta$ , dont on considère la cohomologie, est isomorphe au coproduit des  $Y_{(y)} \times_{X_{(x)}} \eta_\alpha$ . D'après *op. cit.* (4.1.1), ces derniers n'ont de cohomologie qu'en degré  $q \leq \dim Y_{(y)} \leq \dim(Y) - \dim \overline{\{y\}}$ . Il en résulte que la dimension du support de chacun des sous-faisceaux constructibles de  $R^q k_* k^* \mathcal{F}$  est au plus  $\dim(Y) - q$ . De plus, la dimension caténaire du morphisme  $f$  restreint à un tel support est au plus  $\dim.\text{cat}(f) - 1$ . Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que les groupes  $H^{p-q-1}(V, R^q k_* k^* \mathcal{F})$  sont nuls lorsque  $p - q - 1 \geq (\dim(Y) - q) + (\dim.\text{cat}(f) - 1)$ . CQFD.

## 6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre épointé : minoration

**THÉORÈME 6.1.** *Soient  $X$  un schéma intègre strictement local noëthérien de dimension  $d$  et  $\Omega$  un ouvert non vide du spectre épointé. Alors, pour tout nombre entier  $n > 1$  inversible sur  $X$ , on a*

$$\text{cd}_n(\Omega) \geq d.$$

La démonstration occupe les paragraphes suivants.

### 6.2. Construction combinatoire locale.

**6.2.1. Notations.** Soit  $X$  un schéma strictement local noëthérien régulier de dimension  $d \geq 2$  et soit  $t_1, \dots, t_{d-1}, t_d$  un système régulier de paramètres. Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, on note également  $\pi$  l'élément  $t_d$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq d - 1$ , on note  $H_i$  le diviseur régulier  $V(t_i)$ ; pour  $i = d$ , on pose  $H_d = V(t_1 + \dots + t_{d-1} - \pi)$ . Enfin on note  $U$  l'ouvert affine  $X[\pi^{-1}]$ ,  $k$  l'immersion ouverte  $U \hookrightarrow X$  et  $j$  l'immersion ouverte  $U = \bigcup_{i=1}^d H_i \hookrightarrow U$ . On fixe un entier  $n$  inversible sur  $X$  et on pose  $\Lambda = \mathbf{Z}/n$ .

**6.2.2.** Soit  $P$  une partie de  $\{1, \dots, d\}$ . Notons  $H_P$  l'intersection  $\bigcap_{p \in P} H_p$ , et désignons par  $H'_p$  l'intersection  $H_p \cap U$ , ouverte dans  $X$  et  $H_p$  mais fermée dans  $U$ , et  $k_p$  l'immersion ouverte  $H'_p \hookrightarrow H_p$ . Pour chaque entier  $q$ , le groupe de cohomologie  $H^q(U, \Lambda_{H'_p})$  est isomorphe au groupe  $H^q(H_p, \Lambda_{H'_p})$ . Comme  $H_p - H'_p$  est le

diviseur régulier défini par  $\pi$  dans  $H_P$ , il résulte de la pureté cohomologique que  $H^q(U, \Lambda_{H'_P})$  est nul pour  $q > 1$ , isomorphe à  $\Lambda$  pour  $q = 0$  et de rang 1, engendré par la classe de Kummer de  $\pi$  pour  $q = 1$ . Ceci vaut également pour  $P = \emptyset$ , avec la convention évidente que  $H_\emptyset = X$  et  $H'_\emptyset = U$ .

**6.2.3.** Considérons maintenant le quasi-isomorphisme

$$j_! \Lambda \xrightarrow{\sim} \left( \Lambda \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq d} \Lambda_{H'_i} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{|P|=d-1} \Lambda_{H'_P} \rightarrow 0 \right)$$

de faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $U$ , où le premier terme du complexe de droite est placé en degré 0. (On utilise ici le fait que  $H'_P = \emptyset$  si  $|P| = d$  car  $H_P$  est alors le point fermé de  $X$ .) Les différentielles sont des sommes, avec des signes, de flèches de restriction. À cette résolution est associée — via la filtration « stupide » — la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(U, \bigoplus_{|P|=p} \Lambda_{H'_P}) \Rightarrow H^{p+q}(U, j_! \Lambda).$$

D'après les observations du paragraphe précédent, toute classe de  $E_1^{d-1,1} = \bigoplus_{|P|=d-1} H^1(U, \Lambda_{H'_P})$  n'appartenant pas à l'image de  $E_1^{d-2,1}$  survit dans l'aboutissement  $H^d(U, j_! \Lambda)$ .

**6.2.4.** De même que le faisceau  $j_! \Lambda$  est isomorphe au produit tensoriel

$$(U - H'_1 \hookrightarrow U)_! \Lambda \otimes \cdots \otimes (U - H'_d \hookrightarrow U)_! \Lambda,$$

le complexe quasi-isomorphe à  $j_! \Lambda$  ci-dessus est isomorphe au produit tensoriel des complexes  $(\Lambda \rightarrow \Lambda_{H'_i})$ ,  $1 \leq i \leq d$ , où la flèche est l'unité de l'adjonction, isomorphes respectivement aux  $(U - H'_i \hookrightarrow U)_! \Lambda$ . De cette observation, jointe à (6.2.2), on en déduit que le complexe  $E_1^{\bullet,1}$  est isomorphe à la troncation naïve  $\sigma_{\leq d-1}((\Lambda \xrightarrow{\text{Id}} \Lambda)^{\otimes d})$  obtenue en remplaçant le  $d$ -ième terme, isomorphe à  $\Lambda$ , par zéro. Il est bien connu que ce complexe (« de Koszul ») produit tensoriel est acyclique (avant troncation), cf. par exemple [ÉGA III<sub>1</sub> §1.1]. (L'exactitude résulte également du quasi-isomorphisme ci-dessus, appliqué à d'autres fermés.) En particulier, l'image de la différentielle  $E_1^{d-2,1} \rightarrow E_1^{d-1,1}$  est naturellement le noyau d'une forme linéaire non nulle (explicite) sur  $E_1^{d-1,1}$  et n'est donc pas  $E_1^{d-1,1}$  tout entier. Il existe donc des sommes directes de classes de Kummer de  $\pi$  qui survivent dans  $H^d(U, j_! \Lambda)$ .

### 6.3. Éclatement et normalisation partielle.

**6.3.1.** Soit maintenant  $X = \text{Spec}(R)$  un schéma strictement local noëthérien intègre de dimension  $d \geq 2$ , de point fermé  $\mathfrak{x}$ , et soit  $\Omega$  un ouvert non vide strict de  $X$ . Nous allons montrer qu'après éclatement et « normalisation partielle » l'ouvert  $\Omega$  est — localement et « modulo des nilpotents » — un schéma régulier du type du schéma  $U$  considéré ci-dessus. Ceci permet de produire une classe de cohomologie non nulle de degré  $d$  sur  $\Omega$ .

**6.3.2.** Soit  $Y = \widehat{\text{Écl}}_{\mathfrak{x}}(X)$ . Notons  $j$  l'immersion ouverte de  $Y - Y_{\mathfrak{x}}$  dans  $Y$ . On désigne par  $\widehat{X}$  le complété du schéma local  $X$ , par  $Y'$  le produit fibré  $Y \times_X \widehat{X}$  et par  $Y'_{\text{réd}}$  la réduction de  $Y'$ . Notons que le schéma  $Y'$  est excellent car  $\widehat{X}$  l'est.

**6.3.3.** Soit  $\mathcal{O}_Y^{\circledast}$  la normalisation de  $\mathcal{O}_Y$  dans  $j_* \mathcal{O}_{Y-Y_{\mathfrak{x}}}$ . On définit de même  $\mathcal{O}_{Y'}^{\circledast}$  et  $\mathcal{O}_{Y'_{\text{réd}}}^{\circledast}$ . La  $\mathcal{O}_Y$ -algèbre  $\mathcal{O}_Y^{\circledast}$  est colimite (filtrante) de ses sous- $\mathcal{O}_Y$ -algèbres de type fini  $\mathcal{A}_\lambda$ .



**PROPOSITION 6.3.4.** *Le foncteur envoyant une sous- $\mathcal{O}_Y$ -algèbre  $\mathcal{B}$  de  $j_*\mathcal{O}_{Y-Y_x}$  sur l'image de  $(Y' \rightarrow Y)^*\mathcal{B}$  par l'adjonction  $(Y' \rightarrow Y)^*j_*\mathcal{O}_{Y-Y_x} \rightarrow j'_*\mathcal{O}_{Y'-Y_x}$  induit une bijection entre les sous- $\mathcal{O}_Y$ -algèbres finies de  $j_*\mathcal{O}_{Y-Y_x}$  et les sous- $\mathcal{O}_{Y'}$ -algèbres finies de  $j'_*\mathcal{O}_{Y'-Y_x}$ . De plus, les algèbres  $\mathcal{O}_Y^\circledast$  et  $\mathcal{O}_{Y'}^\circledast$  se correspondent par ce foncteur.*

*Démonstration.* On se ramène au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  et  $Y_x = V(\mathfrak{t})$ . Il suffit de montrer que si  $A$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre intègre et  $A' = A \otimes_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbb{R}}$  alors le morphisme  $A[t^{-1}]/A \rightarrow A'[t^{-1}]/A'$  est un isomorphisme et que les normalisations se correspondent. Notons que les anneaux  $A$  et  $A'$  ont même complétion  $\mathfrak{t}$ -adique. Le premier point résulte alors du fait que si  $M$  est un  $A$ -module dont chaque élément est tué par une puissance de  $\mathfrak{t}$ , on a  $M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A A'$ . Enfin, soit  $(f'/\mathfrak{t}^r)^d + a'_1(f'/\mathfrak{t}^r)^{d-1} + \dots + a'_d = 0$  une relation de dépendance intégrale où  $f'$  et les  $a'_i$  appartiennent à  $A'$ . Soit  $N$  un entier assez grand. Écrivons  $f' = f + \mathfrak{t}^N g'$ ,  $a'_i = a_i + \mathfrak{t}^N b'_i$  où  $f$  et les  $a_i$  appartiennent à  $A$ . La relation précédente devient  $(f/\mathfrak{t}^r)^d + a_1(f/\mathfrak{t}^r)^{d-1} + \dots + a_d \in A' \cap A[t^{-1}] = A$ . Il en résulte que l'élément  $f'/\mathfrak{t}^r = f/\mathfrak{t}^r + \mathfrak{t}^{N-r} g'$  est, modulo un élément de  $A'$ , dans l'image de  $A^\circledast$ .  $\square$

**6.3.5.** Par excellence, l'algèbre  $\mathcal{O}_{Y'_{\text{réd}}}^\circledast$  est finie sur  $\mathcal{O}_{Y_{\text{réd}}}$ . L'anneau  $\mathcal{O}_{Y'}^\circledast$  en est l'« image inverse » par la surjection naturelle. De ces observations et de la proposition précédente, on déduit qu'il existe un indice  $\lambda$  tel que, si  $Z = \text{Spec}(\mathcal{A}_\lambda)$  et  $Z' = Z_{\widehat{X}}$ , alors  $Z'_{\text{réd}}$  est intégralement clos dans  $Z'_{\text{réd}} - E'_{\text{réd}}$ . Notons que  $Z$  et  $Y$  sont isomorphes hors de  $E$ .

**6.3.6.** Soit  $E$  une composante de dimension  $d - 1$  de  $Y_x$  et soit  $e$  un point maximal de  $E'_{\text{réd}}$  dans  $Z'_{\text{réd}}$ . Le localisé en  $e$  est un anneau de valuation discrète : c'est un anneau local réduit de dimension 1, intégralement clos dans le complémentaire du point fermé. Par excellence de  $Z'$  il existe un ouvert dense de  $E'_{\text{réd}}$  le long duquel  $Z'_{\text{réd}}$  est régulier. On peut également supposer que  $E'_{\text{réd}}$  est régulier sur cet ouvert. (Pour ce dernier point il suffit de constater que  $E'_{\text{réd}}$  est de type fini sur un corps.) Soit  $U'_{\text{réd}}$  un ouvert de  $Z'_{\text{réd}}$  induisant l'ouvert de  $E'_{\text{réd}}$  ci-dessus et  $U$  un ouvert de  $Z$  induisant l'ouvert correspondant de  $E$ . (Le morphisme  $Z' \rightarrow Z$  est un isomorphisme sur  $E$ .) On a  $U' \subseteq U \times_Z Z'$ . Ci-dessous, on s'autorise à rétrécir les ouverts  $U$  et  $U'$ , sous réserve qu'ils contiennent tous les points maximaux de  $E$ . On suppose de plus que  $U \cap Y_x = U \cap E$ .

**6.3.7.** On note  $\mathfrak{t}$  une équation de  $E$  dans  $U$  et  $\pi$  une équation de  $E'_{\text{réd}}$  dans  $U'_{\text{réd}}$  de sorte qu'il existe une unité  $u$  et un entier  $e$  tels que l'on ait l'égalité  $\mathfrak{t} = u \times \pi^e$  sur  $U'_{\text{réd}}$ . L'existence d'un relèvement montre que l'on peut supposer l'équation  $\pi$  définie sur  $U'$ . Vérifions que l'on peut également supposer  $\pi$  définie sur  $U$ . Les schémas  $Z'$  et  $Z$  ayant même complétion  $\mathfrak{t}$ -adique, il suffit d'observer que si  $a$  est une fonction sur  $U'$ , on a l'égalité d'idéaux  $(\pi) = (\pi + a\mathfrak{t}^2)$ , du moins lorsque  $1 + ua\pi^{2e-1} \in \mathbf{G}_m(U')$ , ce que l'on peut supposer quitte à restreindre  $U'$ .

**6.3.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $X - \{x\}$  (cf. 6.3.1). On note également  $\Omega$  ses images inverses dans  $Y$  et  $Z$ ; elles lui sont isomorphes. Sur un voisinage ouvert des points maximaux de  $E$ , l'ouvert  $\Omega$  coïncide avec le complémentaire de  $E$ . Génériquement sur  $E$ , on a donc  $\Omega = Z[\pi^{-1}]$ . Soit  $z$  un point fermé de  $Z$  appartenant à un tel ouvert ainsi qu'à l'ouvert  $U$ . Soient  $t_1, \dots, t_{d-1}$  des fonctions de  $\mathcal{O}_{Z'_{\text{réd}},z}$  constituant, avec  $\pi$ , un système régulier de paramètres. On peut supposer qu'elles s'étendent à  $U'_{\text{réd}}$ . Utilisant à nouveau le fait que le morphisme  $Z' \rightarrow Z$  est un isomorphisme au-dessus de  $E$ , on peut également supposer qu'elles proviennent de  $U$ , quitte à les changer modulo  $\pi$ . Pour chaque  $i < d$ , considérons

l'adhérence schématique  $H_i \subseteq Z$  de l'hypersurface  $V(t_i)$  dans  $U$  et  $H_d$  l'adhérence schématique de  $V(t_1 + \cdots + t_{d-1} - \pi)$ . On note  $H'_i = H_i \cap \Omega$ .

**6.3.9. Stratégie.** On va construire une classe non nulle dans le groupe de cohomologie  $H^d(\Omega, j_! \Lambda_{\Omega - \bigcup_1^d H'_i})$ , où  $j$  est l'immersion ouverte  $\Omega - \bigcup_1^d H'_i \hookrightarrow \Omega$  et  $\Lambda = \mathbf{Z}/n$  avec  $n$  inversible sur  $X$ . *Localement*, ces groupes de cohomologie sont invariants par passage à la complétion de la base  $X$  (et bien sûr au schéma réduit) de sorte que l'on va pouvoir utiliser les calculs de **6.2**. Il faut cependant prendre garde ici au fait que l'intersection  $\bigcap_1^d H'_i$  n'est pas nécessairement vide, contrairement au cas local précédemment étudié : l'analogie du complexe **6.2.3** a donc un terme de plus (en degré  $d$ ). Malgré tout, on va relever à  $\Omega$  une classe de degré  $d$  « locale » — c'est-à-dire du schéma  $\Omega \times_Z Z_{(\bar{z})}$  (ou plutôt l'analogie sur  $Z'_{\text{réd}}$ ) — à coefficients dans  $j_! \Lambda$ .

**6.3.10.** Considérons à nouveau la suite spectrale du **6.2.3** :

$$E_1^{p,q} = H^q(\Omega, \Lambda_p) \Rightarrow H^{p+q}(\Omega, j_! \Lambda),$$

où l'on note  $\Lambda_p$  la somme directe des  $\Lambda_{H'_P}$  avec  $|P| = p$ . Pour chaque  $P \subseteq [1, d]$  de cardinal  $d - 1$ , l'intersection  $H_P$  des hypersurfaces correspondantes de  $Z$  est propre sur  $X$ . Par construction, elle est aussi *quasi-finie* au voisinage du point fermé  $z$ . Il en résulte par le théorème de changement de base propre pour le  $\pi_0$  (ou le théorème principal de Zariski) — d'après lequel sa décomposition en composantes connexes se lit sur la fibre spéciale — que chaque  $H_P$  se décompose en le coproduit d'un schéma local fini sur  $X$  et d'un schéma ne rencontrant pas  $z$ . Ainsi,  $H^1(\Omega, \Lambda_{d-1})$  a un facteur direct isomorphe à  $H^1(Z_{(z)}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$  et, par comparaison à la complétion, à  $H^1(Z'_{\text{réd}(z)}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$ . De plus, la différentielle  $E_1^{d-1,1} \rightarrow E_1^{d,1}$  envoie ce facteur sur  $0$  dans  $H^1(\Omega, \Lambda_d)$  car l'intersection de  $H_{[1,d]}$  avec  $\Omega$  est vide au voisinage de  $z$ . En effet, si  $t_1 = t_2 = \cdots = t_{d-1} = t_1 + \cdots + t_{d-1} - \pi = 0$  alors  $\pi = 0$ ; d'autre part, au voisinage de  $z$ ,  $\Omega = Z[\pi^{-1}]$ . Ainsi, toute classe de cohomologie du facteur direct « local » induit une classe dans  $H^d(\Omega, j_! \Lambda)$  qui relève la classe correspondante dans  $H^d(Z'_{\text{réd}(z)}[\pi^{-1}], j_! \Lambda)$ . On a vu (**6.2.4**) qu'il existe de telles classes non nulles. En conséquence,  $H^d(\Omega, j_! \Lambda) \neq 0$  et finalement  $\text{cd}_n(\Omega) \geq d$ . CQFD.

## Exemples et contre-exemples

Yves Laszlo

### 1. Introduction

L'exposé est destiné à construire, suivant Gabber, un exemple d'immersion ouverte  $j : U \rightarrow X$  de schémas noethériens telle que  $R^1j_*\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ne soit pas constructible. Ceci montre que l'hypothèse de quasi-excellence du théorème de constructibilité de Gabber (XIII-1.1.1) est indispensable. D'un point de vue géométrique, la construction est intéressante :  $U$  est le complémentaire d'un diviseur  $D$  dans une surface régulière  $X$  mais possède une infinité de points doubles ordinaires ; en particulier, son lieu régulier n'est pas ouvert ce qui lui interdit d'être quasi-excellent. Ce diviseur est un exemple de diviseur dans une surface régulière localement à croisements normaux (au sens de de Jong) mais pas globalement (5.5).

### 2. La construction

On va construire une immersion ouverte  $j : U \hookrightarrow X$  de schémas noethériens tel que  $R^1j_*(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  ne soit pas constructible. En particulier,  $X$  n'est pas quasi-excellent d'après le théorème de constructibilité de Gabber (XIII-1.1.1). Cette dernière propriété est d'ailleurs évidente par construction puisque  $X$  contient un fermé intègre de dimension 1 ayant une infinités de points doubles ! Suivant SGA 4, on note ici  $k\{\underline{x}\}$  l'hensélisé à l'origine d'un anneau de polynômes  $k[\underline{x}]$ . On choisit un corps parfait  $k$  de caractéristique différente de 2, au plus dénombrable, qui a la propriété suivante : toute extension finie de  $k$  admet un élément qui n'est pas un carré. On note  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Par exemple, on peut prendre pour  $k$  un corps fini ou un corps de nombres. Dans la suite, on note  $\Lambda = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

On commence par regarder le plan  $\mathbf{A}^2 = \text{Spec}(k[x, y])$  privé des points génériques des courbes irréductibles ne coupant pas la droite  $\Delta = \text{Spec}(k[x])$  d'équation  $y = 0$ . Ces courbes sont exactement les courbes irréductibles d'équation  $u(1 + yg(x, y))$ ,  $u \in k^*$ . On pose donc

$$A_0 = (1 + yk[x, y])^{-1}k[x, y].$$

Le morphisme de localisation  $k[x, y] \rightarrow A_0$  identifie  $\text{Spec}(A_0)$  au sous-ensemble du plan  $\mathbf{A}^2 = \text{Spec}(k[x, y])$  cherché. Les points de  $\text{Spec}(A_0)$  sont de trois sortes

- Le point générique de  $\mathbf{A}^2$  ;
- Les points génériques des courbes irréductibles du plan qui rencontrent  $\Delta$  ;
- Les points de  $\text{Spec}(A_0)$  fermés dans  $\mathbf{A}^2$  (qui sont les points fermés de  $\Delta$  comme on va le voir).

Notons qu'un point générique d'une courbe  $C$  qui coupe  $\Delta$  se spécialise dans  $\text{Spec}(A_0)$  sur n'importe quel point fermé de  $C \cap \Delta$  et donc n'est pas fermé dans  $\text{Spec}(A_0)$ .

Par ailleurs, un point de  $\text{Specmax}(A_0)$  est donc défini par  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{k}$ . Si  $\bar{y}$  est non nul, étant algébrique sur  $k$ , son inverse est dans  $k[\bar{y}]$  ce qui entraîne  $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \text{Spec}(A_0)(\bar{k})$ . L'immersion fermée

$$\text{Spec}(k[x]) = \text{Spec}(A_0/yA_0) \hookrightarrow \text{Spec}(A_0)$$

induit donc un homéomorphisme  $\text{Specmax}(k[x]) \xrightarrow{\sim} \text{Specmax}(A_0)$ .

Si  $\xi \in \text{Specmax}(A_0)$ , on note  $\pi_\xi \in k[x]$  le générateur unitaire des polynômes nuls en  $\xi$  et on choisit une racine de  $\pi_\xi$  dans  $\bar{k}$  définissant un point géométrique  $\bar{\xi}$  au dessus de  $\xi$ . On le voit comme un élément de  $A_0$  via le plongement tautologique  $k[x] \hookrightarrow A_0$ . Le couple  $(\pi_\xi, y)$  est un système de coordonnées locales de  $A_0$  en  $\xi$ , *i.e.* on a un isomorphisme<sup>i</sup>

$$(2.a) \quad k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A_{0,\xi}^h.$$

Comme  $k$  est dénombrable,  $\text{Specmax}(A_0)$  est infini dénombrable comme  $\text{Specmax}(k[x])$ . Soit  $[i], i \geq 0$  la suite des idéaux maximaux de  $A_0$ .

**LEMME 2.1.** *Il existe une tour d'extensions quadratiques*

$$A_n \subset A_{n+1} = A_n[\sqrt{f_n}], \quad n \geq 0$$

et une suite de points  $\xi_n \in \text{Specmax}(A_n)$  d'images  $\zeta_n = \xi_n \cap A_0$  dans  $\text{Spec}(A_0)$  telle que

- Pour tout  $m \leq n$  et tout  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A_n)$  au dessus de  $[m]$ , l'image de  $f_n$  dans  $k(\mathfrak{m})$  n'est pas un carré.
- Pour tout  $m < n$  et tout  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A_n)$  au dessus de  $\xi_m$ , l'image de  $f_n$  dans  $k(\mathfrak{m})$  n'est pas un carré.
- L'extension  $A_n/A_0$  est étale en  $\xi_n$  et

$$f_n \equiv \pi_n^2 + y \pmod{\xi_n^3}$$

$$\text{où } \pi_n = \pi_{\zeta_n}.$$

*Démonstration.* Soit  $n \geq 0$ . Supposons construits  $A_m, f_m, \xi_m, \zeta_m, 0 \leq m < n$  vérifiant les propriétés précédentes et construisons  $f_n \in A_n$  et  $\xi_n \in \text{Spec}(A_n)$ . Si  $n > 0$ , on pose  $A_n = A_{n-1}[\sqrt{f_{n-1}}]$  (si  $n = 0$  l'anneau  $A_n$  est déjà construit).

Observons tout de suite que, la caractéristique de  $k$  étant différente de 2, l'extension  $A_n/A_0$  est génériquement étale. Comme elle est finie et que  $\text{Specmax}(A_0) = \text{Specmax}(k[x])$ , le lieu  $L_1$  des points de  $\text{Specmax}(A_n)$  où  $A_n/A_0$  n'est pas étale est de cardinal fini et de complémentaire  $L_1^c$  infini. De même, l'ensemble des points  $L_2$  de  $\text{Spec}(A_n)$  au dessus des  $[m], m \leq n$  et des  $\zeta_m, m < n$  est fini.

Choisissons alors  $\xi_n \in L_1^c - L_2$  et notons  $\zeta_n = \xi_n \cap A_0$  son image dans  $\text{Spec}(A_0)$ . Par construction, on a

$$\zeta_n \notin \{[m], m \leq n, \zeta_m, m < n\} \text{ et } A_n/A_0 \text{ est étale en } \xi_n.$$

Soit  $\mathfrak{m} \in L_2$ . Comme  $k(\mathfrak{m})$  est une extension finie de  $k$  (théorème des zéros), on peut choisir  $a_m \in k(\mathfrak{m})$  qui n'est pas un carré. Comme  $\xi_n \notin L_2$ , les idéaux de  $L_2 \cup \{\xi_n^3\}$  sont deux à deux étrangers. Le lemme chinois assure qu'il existe  $f_n \in A_n$  tel que

$$f_n \equiv a_m \pmod{\mathfrak{m}} \text{ pour tout } \mathfrak{m} \in L_2 \text{ et } f_n \equiv \pi_n^2 + y \pmod{\xi_n^3}.$$

De tels  $f_n, \xi_n, \zeta_n$  conviennent. □

<sup>i</sup>On devrait plutôt dire que le morphisme  $k[X, Y]_{(0,0)} \rightarrow A_{0,\xi}$  qui envoie  $X$  sur  $\pi_\xi$  et  $Y$  sur  $y$  induit un unique isomorphisme  $k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A_{0,\xi}^h$ .

On pose  $A = \text{colim } A_n$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Comme l'extension d'anneaux intègres  $A_n \hookrightarrow A$  est entière, on peut choisir un point géométrique  $\overline{\xi_{n,\infty}}$  de  $\text{Spec}(A)$  au dessus de  $\xi_n$ . Il définit donc des points géométriques  $\overline{\xi_n}$  (resp.  $\overline{\zeta_n}$ ) au dessus de  $\xi_n$  (resp.  $\zeta_n$ ).

Par construction, l'inclusion  $A_{n+1} \hookrightarrow A$  définit un isomorphisme (cf. la note i)

$$\overline{k}\{\pi_n, y, z\}/(z^2 - f_n) \xrightarrow{\sim} A_{\overline{\xi_{n,\infty}}}^{\text{hs}}$$

compatible à (2.a), *i.e.* tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{k}\{\pi_n, y, z\}/(z^2 - f_n) & \xrightarrow{\sim} & A_{\overline{\xi_{n,\infty}}}^{\text{hs}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{k}\{\pi_n, y\} & \xrightarrow{\sim} & A_{0, \overline{\zeta_n}}^{\text{hs}} \end{array}$$

commute (rappelons que l'hensélisation stricte commute aux limites inductives filtrantes, cf. [ÉGA IV 4]18.8.18).

Avec ces préparatifs, on peut énoncer le résultat principal.

**PROPOSITION 2.2.** *Soit  $j$  l'immersion ouverte  $\text{Spec}(A[1/y]) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  et  $\eta$  le point générique de  $D = V(y)$ .*

- *A est noethérien.*
- *La dimension (sur  $\mathbf{F}_2$ ) de  $(R^1j_*\Lambda)_{\overline{\xi_{n,\infty}}}$  est 2, alors que la dimension de  $(R^1j_*\Lambda)_{\overline{\eta}}$  est 1.*
- *En particulier,  $R^1j_*\Lambda$  n'est pas constructible.*

**REMARQUE 2.3.** Notons que le diviseur (intègre)  $D = V(y)$  de la surface régulière  $\text{Spec}(A)$  admet chaque  $\xi_{n,\infty}$  comme point double (ordinaire). Il n'est donc pas quasi-excellent puisque son lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) n'est pas ouvert. Quitte à éventuellement localiser  $A$ , on obtient alors un contre-exemple à la constructibilité avec un schéma ambiant régulier (mais certes pas excellent)!

Le point **iii** découle immédiatement des points 1) et 2). Passons à la preuve des deux premiers points. Le reste de l'exposé est destiné à prouver les points **i** et **ii**, seuls points restant à montrer.

### 3. Noethérianité de A

On va adapter (cf. proposition 3.4) à la situation (en l'utilisant) le critère usuel de noethérianité des limites inductives que l'on rappelle :

**THÉORÈME 3.1** ([ÉGA 0<sub>III</sub> 10.3.1.3]). *Soit  $(A_i, \mathfrak{m}_i)$  un système inductif filtrant d'anneaux locaux noethériens. On suppose que tous les  $A_i$  noethériens et que les morphismes de transitions sont locaux et plats. Alors, si pour tout  $i \leq j$ , on a  $\mathfrak{m}_i A_j = \mathfrak{m}_i$ , alors  $\text{colim } A_i$  est noethérien.*

On utilisera sans le rappeler ensuite le critère de noethérianité de Cohen ([Nagata, 1962, 3.4]) :

**PROPOSITION 3.2** (Cohen). *Un anneau est noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini.*

Soit  $A_i, i \geq 0$  un système inductif d'anneaux et  $A_\infty = \text{colim} A_i$ . On suppose que les morphismes  $A_i \rightarrow A_{i+1}$  sont finis et injectifs et que chaque  $A_i$  est noethérien (ou, ce qui revient au même, que  $A_0$  est noethérien). En particulier,  $\text{Spec}(A_{i+1}) \rightarrow \text{Spec}(A_i)$  est fini et surjectif et  $\text{Spec}(A_\infty) \rightarrow \text{Spec}(A_i)$  est entier et surjectif pour tout  $i$  ce qu'on utilisera sans plus de précaution. Leurs fibres sont de dimension nulle. Pour  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_0)$ , on note  $\tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{p}}$  la propriété

**Propriété  $\tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{p}}$**  : Il existe  $i$  tel que pour tout  $j \geq i$  et tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_j)$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ , l'idéal  $\mathfrak{q}A_\infty$  est premier.

**PROPOSITION 3.3.**  $A_\infty$  est noethérien si et seulement si  $A_0$  est noethérien et tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A_0$  vérifie la propriété  $\tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{p}}$ .

*Démonstration.* On note  $f : \text{Spec}(A_\infty) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ . Prouvons le premier point.

Suffisance. Soit  $\mathfrak{q}_\infty \in \text{Spec}(A_\infty)$  et  $\mathfrak{p}$  son image dans  $\text{Spec}(A_0)$ . Montrons que  $\mathfrak{q}_\infty$  est de type fini. Choisissons  $i$  comme dans  $\tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{p}}$  et soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_\infty \cap A_i$ . On a d'une part  $\mathfrak{q}A_\infty \subset \mathfrak{q}_\infty$  et, d'autre part

$$\mathfrak{q}_\infty \cap A_i \subset \mathfrak{q}A_\infty \subset \mathfrak{q}_\infty$$

ce qui assure l'égalité  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_\infty \cap A_0 = \mathfrak{q}A_\infty \cap A_0$  de sorte que  $\mathfrak{q}A_\infty$  se spécialise sur  $\mathfrak{q}_\infty$  dans  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  qui est de dimension 0. On a donc  $\mathfrak{q}_\infty = \mathfrak{q}A_\infty$  ce qui prouve que  $\mathfrak{q}_\infty$  est de type fini comme  $\mathfrak{q}$  et on invoque 3.2.

Nécessité. Supposons  $A_\infty$  noethérien et soit  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_0)$ . La fibre

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spec}(A_\infty \otimes_{A_0} \kappa(\mathfrak{p}))$$

est noethérienne de dimension nulle, donc de cardinal fini. Comme  $A_\infty$  est noethérien, on peut donc supposer que tous les idéaux premiers de  $f^{-1}(\mathfrak{p})$  sont engendrés par des éléments de  $A_i$  pour  $i$  convenable. Soit alors  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_j)$ ,  $j \geq i$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ . Soit  $\mathfrak{q}' \in \text{Spec}(A_\infty)$  au dessus de  $\mathfrak{q}$ . Comme  $\mathfrak{q}'$  est engendré par  $\mathfrak{q}' \cap A_i$ , il l'est par  $\mathfrak{q}' \cap A_j = \mathfrak{q}$ , de sorte  $\mathfrak{q}A_\infty = \mathfrak{q}'$  qui est donc premier.  $\square$

**PROPOSITION 3.4.** On garde les hypothèses et les notations de 3.3. Si de plus les extensions  $A_{i+1}/A_i$  sont plates,  $A_\infty$  est noethérien si et seulement si tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A_0$  vérifie la propriété  $\tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{m}}$ .

*Démonstration.* La nécessité découle du premier point. D'après 3.3, il suffit de prouver la suffisance. Soit donc  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_0)$  et montrons que  $\mathfrak{p}$  vérifie  $\star_{\mathfrak{p}}$ .

**LEMME 3.5.** Sous les conditions de la proposition, la propriété  $\star_{\mathfrak{p}}$  est équivalente à la **Propriété  $\star_{\mathfrak{p}}$**  : Il existe  $i$  tel que pour tout  $l \geq j \geq i$  et tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_j)$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ , l'idéal  $\mathfrak{q}A_l$  est premier.

*Démonstration.* Supposons  $\star_{\mathfrak{p}}$  vérifiée. Soit alors  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A_j)$  au dessus de  $\mathfrak{p}$ . On déduit déjà  $1 \notin \mathfrak{q}A_\infty$ . De plus, si  $xy \in \mathfrak{q}A_\infty$ , il existe  $l \geq j$ , tel que  $x, y \in A_l$ . Donc,  $xy \in \mathfrak{q}A_\infty \cap A_l = \mathfrak{q}A_l$  (fidèle platitude de  $A_\infty/A_l$ ) et donc par exemple  $x \in \mathfrak{q}A_l \subset \mathfrak{q}A_\infty$ . On a donc  $\star_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \tilde{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{p}}$ . L'autre implication est tautologique.  $\square$

La clef est de constater que la condition  $\star_{\mathfrak{p}}$  ne dépend que des fibres schématiques de  $f_i : \text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$  et donc est invariante par changement de base, ce qui va permettre de se ramener au cas local pour appliquer (3.1). Précisons.

**LEMME 3.6.** Soit  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_0)$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- La propriété  $\star_{\mathfrak{p}}$  est satisfaite.

- Il existe  $i$  tel que pour tout  $l \geq j \geq i$  le morphisme induit

$$\phi : f_l^{-1}(\mathfrak{p}) \rightarrow f_j^{-1}(\mathfrak{p})$$

entre les fibres schématiques soit bijectif à fibres réduites.

*Démonstration.* Supposons  $\star_p$  vérifiée et choisissons  $i \leq j \leq l$  comme dans  $\star_p$ . Soit  $\mathfrak{q} \in f_j^{-1}(\mathfrak{p})$  et posons  $A = A_j/\mathfrak{q}$  et  $B = A_l/\mathfrak{q}A_l$ . La fibre schématique  $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$  est le  $k(\mathfrak{q}) = \text{Frac}(A)$ -schéma  $\text{Spec}(B \otimes_A \text{Frac}(A))$ . Comme  $\mathfrak{q}A_l$  est premier,  $B$  est intègre et donc  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$  également (la tensorisation par  $\text{Frac}(A)$  est une localisation). Comme  $A_l/A_j$  est finie, l'extension  $B/A$  est finie de sorte que  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$  est à la fois de dimension finie sur  $\text{Frac}(A)$  et intègre, donc c'est un corps, ce qui entraîne la seconde condition.

Inversement, supposons que  $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$  soit le spectre d'un corps. Autrement dit, on suppose que  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$  est intègre et on veut montrer que  $B$  est intègre. Mais on a

**SOUS-LEMME 3.7.** Soient  $\phi : A \rightarrow B$  un morphisme plat d'anneaux noethériens. Supposons  $A$  intègre. Alors,  $B$  est intègre si et seulement si la fibre générique  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$  est intègre.

*Démonstration.* Seul la suffisance demande explication. Comme  $\phi$  est plat, il envoie idéaux associés (resp. minimaux) sur l'unique point associé de  $\text{Spec}(A)$ , son point générique ( $A$  est intègre). Comme la fibre générique  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$  est un localisé, les points associés de la fibre générique s'identifient par localisation aux points associés de  $\text{Spec}(B)$ . Comme cette fibre générique est intègre,  $\text{Spec}(B)$  n'a qu'un point générique  $\eta$  (ce qui assure l'irréductibilité de  $\text{Spec}(B)$ ), dont l'anneau local  $B_\eta$  est un localisé de  $B \otimes_A \text{Frac}(A)$ . Ainsi  $B$  est sans point immergé et génériquement réduit ( $S_1$  et  $R_0$ ) donc réduit d'où finalement intègre.  $\square$

$\square$

Choisissons  $\mathfrak{m}$  maximal dans  $A_0$  contenant  $\mathfrak{p}$  et choisissons  $i$  comme dans  $\star_m$ . Soit  $\mathfrak{m}_i \in \text{Specmax}(A_i)$  au dessus de  $\mathfrak{m}$  ( $\text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$  fini et surjectif) et relevons  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$  en  $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}_i$  dans  $A_i$  (platitude).

Par construction, l'idéal  $\mathfrak{m}_i A_j$  est premier pour tout  $j \geq i$ . Mais on a  $\mathfrak{m}_i A_j \cap A_i = \mathfrak{m}_i$  ( $A_j/A_i$  est fidèlement plate) de sorte que  $\mathfrak{m}_i A_j$  est maximal ( $A_j/A_i$  est finie). Soit alors  $A' = (A_i)_{\mathfrak{m}_i}$  et changeons de base par  $A_0 \rightarrow A'$ . La fibre spéciale du morphisme fini

$$\text{Spec}(A'_j) \rightarrow \text{Spec}(A'_i), j \geq i$$

est le spectre du corps  $A_j/\mathfrak{m}_i A_j = A_j/\mathfrak{m}_j$  de sorte que  $A'_j, i \geq j$  est local et que  $A'_i \rightarrow A'_j$  est local. Comme les fibres de  $\text{Spec}(A'_j) \rightarrow \text{Spec}(A'_0)$  sont des fibres de  $\text{Spec}(A_j) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ , le système inductif  $(A'_j)$  vérifie  $\star_{m'}$  pour tout  $m' \in \text{Specmax}(A'_0)$  (3.6) de sorte que  $\text{colim} A'_j$  est noethérien (3.1). D'après la proposition 3.3, la condition  $\star_{p'}$  est vérifiée pour tout  $p' \in \text{Spec}(A'_0)$ . Comme la condition  $\star$  ne dépend que des fibres (3.6), on déduit que  $\star_q$  est vérifiée pour tout  $q$  dans l'image de  $\text{Spec}(A'_i) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ . Or, par construction  $\mathfrak{p}$  est dans l'image, ce qui termine la preuve du point  $i$  de la proposition 2.2.  $\square$

#### 4. Étude des points doubles

Reste à prouver le point **ii** de la proposition **2.2**.

Comme au voisinage de  $\eta$  l'immersion fermée  $D = V(y) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  est une immersion d'un diviseur régulier dans un schéma régulier, le théorème de pureté (**XVI-3.1.3**) assure que la dimension de  $(R^1j_*\Lambda)_{\bar{\eta}}$  est 1.

Pour alléger les notations, on pose  $x = \pi_n$ ,  $f = f_n$  et  $R = \bar{k}\{x, y, z\}/(z^2 - f)$  et on rappelle la congruence

$$f = x^2 + y + O(3)$$

où  $O(n)$  désigne un polynôme de degré  $\geq n$ . On doit démontrer l'énoncé suivant

**PROPOSITION 4.1.** *La dimension de  $H^1(\text{Spec}(R[1/y], \Lambda)$  est 2.*

D'après le théorème de pureté, **XVI-3.1.3**, la proposition est conséquence du lemme géométrique bien connu suivant

**LEMME 4.2** (Lemme de Morse). *Il existe un système de coordonnées  $X, y, Z$  de  $\bar{k}\{x, y, z\}$  tel que  $z^2 - f = Z^2 - X^2 - y$ .*

*Démonstration.* On a

$$z^2 - f = z^2 - x^2 - y + O(3).$$

Posons  $x_1 = \sqrt{-1}x$ ,  $x_2$ . Dans ces coordonnées, on a

$$F := z^2 - f + y = \sum_{i,j} g_{i,j}x_i x_j$$

où  $(g_{i,j}) \in M_2(R)$  est une matrice symétrique de taille 2 à coefficients dans  $R$ . On a

$$g = (g_{i,j}) = \text{Id} + O(1).$$

Considérons alors  $M = \mathbf{A}^{\frac{2(2+1)}{2}}$  paramétrant les matrices carrées symétriques. La différentielle de

$$\mu: \begin{cases} M & \rightarrow M \\ P & \mapsto {}^tPP \end{cases}$$

en  $P = \text{Id}$  est le double de l'application identique, donc  $\mu$  est étale en ce point. Le point  $g \in M(R)$  se relève donc en  $P \in M(R)$ . Autrement dit, on peut écrire  $g = {}^tPP$ . Le morphisme  ${}^t(x_i) \mapsto P^t(x_i) = {}^t(y, X_1, Z_1)$  est étale et définit donc des coordonnées de  $\bar{k}\{x, y, z\}$ . Dans ces coordonnées, on a

$$Z^2 - f + y = X_1^2 + Z_1^2$$

et il suffit de poser  $X = \sqrt{-1}X_1$ ,  $Z = Z_1$  pour conclure.  $\square$

Rappelons que la caractéristique de  $k$  est différente de 2. Ceci termine la preuve de la proposition **2.2**.

#### 5. D est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux

Commençons par une définition. Dans cette section  $D$  désigne un diviseur effectif d'un schéma régulier  $X$  et  $j: U = X - D \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire.

**DÉFINITION 5.1.** On conserve les notations précédentes.



- On dit que  $D$  est localement un diviseur à croisements normaux (en abrégé, *localement dcn*) si pour tout  $x \in D$ , le localisé de Zariski  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{D,x})$  est un diviseur à croisements normaux de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .
- Supposons  $D$  localement dcn. On note  $\varepsilon(x)$  le nombre de branches analytiques de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{D,x})$  et  $\zeta(x)$  son nombre de composantes irréductibles. La fonction  $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$  (resp.  $\zeta : x \mapsto \zeta(x)$ ) est appelée fonction de comptage analytique (resp. fonction de comptage Zariski).

Avec les notations précédentes, si  $\bar{x}$  est un point géométrique au dessus de  $x \in D$  avec  $D$  localement à croisements normaux, l'hensélisé strict  $D_{(\bar{x})}$  est un diviseur à croisements normaux stricts de  $D_{(\bar{x})}$ . On a alors la caractérisation suivante :

**LEMME 5.2.** *Avec les notations précédentes, supposons de plus que  $D$  est localement dcn et  $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$  avec  $\ell$  un nombre premier inversible sur  $X$ . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes.*

- $R^1j_*\Lambda$  est constructible ;
- $Rj_*\Lambda$  est constructible ;
- la fonction de comptage analytique  $\varepsilon$  est constructible.

*Démonstration.* D'après le théorème de pureté (XVI-3.1.3), la fibre  $(Rj_*\Lambda)_{\bar{x}}$  est l'algèbre extérieure sur

$$(R^1j_*\Lambda)_{\bar{x}} = \Lambda^{\varepsilon(x)}.$$

Le lemme en découle immédiatement grâce à la caractérisation des faisceaux constructibles à fibres finies ([SGA 4 IX prop. 2.13 (iii)]).  $\square$

L'intérêt de ce lemme réside dans la proposition suivante.

**PROPOSITION 5.3.** *Avec les notations précédentes, supposons de plus que  $D$  est localement dcn. Alors,  $\varepsilon$  est constructible si et seulement si  $D$  est un diviseur à croisement normaux.*

*Démonstration.* Grâce au théorème de pureté (XVI-3.1.3) et au lemme précédent, il suffit de prouver la partie directe. Supposons donc  $\varepsilon$  constructible et montrons que  $D$  est à croisements normaux. Soit  $\bar{x}$  un point géométrique au dessus de  $x \in D$ . Puisque  $D_{(\bar{x})}$  est un diviseur à croisements normaux stricts, il existe un voisinage étale  $\pi : X' \rightarrow X$  de  $x$  dans  $X$ , tel que le diviseur  $D' = \pi^{-1}(D)$  est la somme de diviseurs  $D'_i$  qui sont réguliers en  $x$  et qui se coupent transversalement en  $x'$ , image de  $\bar{x}$  dans  $X'$ . La fonction de comptage analytique  $\varepsilon'$  de  $D'$  est la somme des fonctions de comptage analytiques  $\varepsilon'_i$ . Comme  $\varepsilon'$  ne dépend que de l'hensélisé strict, on a donc

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ \pi = \sum \varepsilon'_i.$$

En particulier,  $\varepsilon'$  est constructible comme  $\varepsilon$ . La fonction de comptage Zariski  $\zeta'$  de  $D'$  certainement constructible de sorte que la différence  $\varepsilon' - \zeta'$  l'est aussi. Par hypothèse,  $\varepsilon' - \zeta'$  s'annule sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})$ , donc sur l'ensemble des généralisations de  $x'$ . Comme elle est constructible, elle est nulle sur un voisinage ouvert  $U'$  (Zariski) de  $x'$ . Comme  $\varepsilon'_i \geq \zeta'_i$ , on a  $\varepsilon'_i = \zeta'_i$  sur  $U'$  de sorte que, quitte à restreindre  $U'$ , chaque diviseur  $D_i$  est régulier sur  $U'$ . En se restreignant au localisé strict de chaque point de  $U'$ , sur lequel on sait que  $D'$  est un diviseur à croisements normaux, on obtient que les  $D_i$  se coupent transversalement de sorte que la restriction de  $D'$  à  $U'$  est un diviseur à croisements normaux stricts.  $\square$

REMARQUE 5.4. L'argument précédent appliqué à  $\zeta$  assure que si le localisé Zariski de  $D$  en tout point est un diviseur à croisements normaux strict alors  $D$  est un diviseur à croisement normaux strict.

Avec les notations de la proposition 2.2 , on a donc obtenu le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.5. *Le diviseur  $D$  de la surface régulière  $\text{Spec}(A)$  est localement à croisements normaux mais pas globalement.*

## EXPOSÉ XX

### Rigidité

Yves Laszlo et Alban Moreau

#### 1. Introduction

Le but de cet exposé est de démontrer les deux résultats techniques **2.1.1** (comparaison des toseurs sur l'ouvert complémentaire  $\text{Spec } A - V(I)$  défini par un couple hensélien non nécessairement noethérien et l'ouvert correspondant du complété formel le long de  $V(I)$ ) et **5.3.1** (rigidité de la ramification). Ils permettront dans l'exposé suivant de montrer l'énoncé de finitude suivant (**XXI-1.4**) :

**THÉORÈME (Gabber).** *Soit  $A$  un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que  $A$  est normal, excellent, et on note  $X' = \text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$  son spectre époiné. Alors, pour tout groupe fini  $G$ , l'ensemble  $H^1(X'; G)$  est fini.*

Ce résultat est la clef pour démontrer le résultat de finitude général suivant (**XXI-1.2**) :

**THÉORÈME (Gabber).** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents. Soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers inversibles sur  $X$ . Pour tout faisceau constructible de groupes  $F$  sur  $Y_{\text{ét}}$  de  $\mathbb{L}$ -torsion, le faisceau  $R^1 f_*(F)$  sur  $X_{\text{ét}}$  est constructible.*

Par des techniques d'ultrafiltres, chères aux théoriciens des modèles, on est ramené à étudier des revêtements étales de spectres époinés d'anneaux *non noethériens*, ce qui explique qu'on soit contraint de démontrer les énoncés techniques hors de tout cadre noethérien.

**REMARQUE.** Soit  $X$  un schéma. On considérera des champs en groupoïdes  $\mathcal{C}$  sur  $X_{\text{ét}}$  (on dira simplement champs). En général, la catégorie fibrée  $\mathcal{C}$  n'est pas scindée de sorte que si  $x, y$  sont deux objets de  $\mathcal{C}(S)$  où  $S \rightarrow X$  est étale, il faut quelques précautions pour parler du faisceau  $\underline{\text{Hom}}(x, y)$  sur  $S_{\text{ét}}$ . Précisément, suivant [**Giraud, 1971**, I.2.6.3.1], on considère l'équivalence de catégories fibrées  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$  entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie libre  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  engendrée par  $\mathcal{C}$ , catégorie libre qui elle est scindée. On définit alors

$$\underline{\text{Hom}}(x, y)(S') = \text{Hom}_{\mathcal{L}\mathcal{C}(S')}(\mathcal{L}x', \mathcal{L}y')$$

où  $\mathcal{L}x', \mathcal{L}y'$  sont les images inverses par le morphisme étale  $S' \rightarrow S$  de  $\mathcal{L}x, \mathcal{L}y$  dans  $\mathcal{L}\mathcal{C}(S')$ . Bien entendu ([**Giraud, 1971**, I.2.6.3.2 (1)],  $\mathcal{L}$  induit une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(S)}(x, y) \xrightarrow{\sim} H^0(S, \underline{\text{Hom}}(x, y)).$$

Ces remarques justifient qu'on puisse si besoin supposer sans dommage que les champs que l'on considérera sont scindés.

## 2. Lemme de rigidité

Soit  $(A, I)$  un couple hensélien ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.5.5]) non nécessairement noethérien, avec  $I$  de type fini<sup>i</sup>. Soit  $U$  un ouvert de  $X = \text{Spec}(A)$  contenant  $\text{Spec}(A) - V(I)$ . On note  $\widehat{A}$  le complété<sup>ii</sup>  $I$ -adique de  $A$  et  $\widehat{U}$  l'image inverse de  $U$  par le morphisme de complétion  $\pi : \widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A}) \rightarrow X$ . On suppose pour simplifier  $U$  quasi-compact (cf. 2.1.4).

**2.1. Énoncés.** Rappelons [SGA 4 IX 1.5] qu'un faisceau en groupes  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est ind-fini si pour tout ouvert étale  $u : U \rightarrow X$  avec  $U$  quasi-compact, le groupe  $\mathcal{F}(u)$  est limite inductive filtrante de ses sous-groupes d'indice fini. On dit alors qu'un champ en groupoïdes  $\mathcal{C}$  sur  $X$  est ind-fini si pour tout si pour tout ouvert étale  $u : U \rightarrow X$  avec  $U$  quasi-compact et tout  $x_u \in \mathcal{C}(u)$ , le faisceau en groupes  $\pi_1(\mathcal{C}, x_u) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(x_u)$  est ind-fini.

Le but de cette de cette section est de démontrer le théorème de rigidité suivant.

**THÉORÈME 2.1.1** (Théorème de rigidité de Gabber). *Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau d'ensembles sur  $U_{\text{ét}}$ . Alors on a*

- i) *la flèche naturelle  $H^0(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{F})$  est bijective ;*
- ii) *si  $\mathcal{F}$  est de plus un faisceau en groupes ind-fini, la flèche naturelle  $H^1(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{F})$  est bijective.*

Les deux énoncés du théorème précédent sont conséquence du théorème suivant, apparemment plus fort, forme champêtre du théorème de rigidité<sup>iii</sup>.

**THÉORÈME 2.1.2** (Théorème de rigidité de Gabber, forme champêtre). *Soit  $\mathcal{C}$  un champ en groupoïdes ind-fini sur  $U_{\text{ét}}$ . Alors, la flèche naturelle  $\gamma(\mathcal{C}) : \Gamma(U, \mathcal{C}) \rightarrow \Gamma(\widehat{U}, \pi^* \mathcal{C})$  est une équivalence.*

**REMARQUE 2.1.3.** En fait, le théorème de rigidité 2.1.1 est *a priori* équivalent à la version champêtre 2.1.2. C'est ce qui ressort par exemple de l'énoncé 6.5.2. Mais, formellement, on n'a pas besoin de démontrer cela à ce stade.

**REMARQUE 2.1.4.** Les résultats précédents sont également valables lorsque  $U$  n'est pas nécessairement quasi-compact. Cela résulte du fait que la catégorie des sections d'un champ sur  $U$  est équivalente à la 2-limite projective des sections sur les ouverts quasi-compacts de  $U$  contenant  $\text{Spec}(A) - V(I)$ . L'hypothèse de quasi-compacité est utilisée dans un argument d'éclatement ci-dessous (cf. 2.4.2).

### 2.2. Réduction au cas constant.

Le résultat est le suivant

**PROPOSITION 2.2.1.** *Supposons que pour tout  $U$  comme plus haut,*

- i) *pour tout ensemble fini  $F$ , la flèche  $H^0(U, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}, F)$  est bijective. Alors, 2.1.1 i) est vrai, c'est-à-dire le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai pour les champs discrets.*
- ii) *pour tout groupe fini  $G$ , la flèche  $\text{Tors}(U, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}, G)$  est une équivalence et 2.1.1 i) est vrai. Alors le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai.*

<sup>i</sup>Cette hypothèse sera utilisée pour comparer les gradués  $I$ -adiques de  $A$  et de son complété  $\widehat{A}$  ([Bourbaki, A.C., III, §2, n°12])

<sup>ii</sup>On dira simplement complété pour séparé complété.

<sup>iii</sup>Les champs (ind-finis) en groupoïdes discrets s'identifient aux faisceaux d'ensembles : on dira parfois un *champ discret*.

*Démonstration.* D'après [SGA 4 XII prop.6.5] (resp. 6.5.2), il suffit pour prouver 2.1.1 i) (resp. 2.1.2) de prouver que pour tout  $U' \rightarrow U$  fini et tout ensemble fini  $F$  (resp. groupe fini  $G$ ), la flèche

$$(2.a) \quad H^0(U', F) \rightarrow H^0(\widehat{U}', F) \quad (\text{resp. } \text{Tors}(U', G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}', G))$$

est bijective (resp. une équivalence) où  $\widehat{U}' = \widehat{U} \times_U U'$ .

LEMME 2.2.2. *Il existe un schéma schéma affine  $\text{Spec}(B)$  et un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & \text{Spec}(B) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

où  $B$  est fini sur  $A$ . Le morphisme  $U' \rightarrow \text{Spec}(B)$  s'identifie à l'immersion ouverte  $U_B \hookrightarrow \text{Spec}(B)$ . De plus,  $U_B$  contient  $\text{Spec}(B) - V(IB)$ .

*Démonstration.* Comme  $U' \rightarrow U$  est fini, il est projectif ([ÉGA II 6.1.11]). Comme  $U$  est quasi-compact, l'immersion ouverte  $U \hookrightarrow X$  est quasi-affine ([ÉGA II 5.1.1]), donc quasi-projective de sorte que le composé  $f : U' \rightarrow U \rightarrow X$  est quasi-projectif ([ÉGA II 5.3.4]). Comme  $X = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{O}_X$  est certainement ample (cf. la définition ou [ÉGA II 5.1.2]). Les hypothèses du théorème principal de Zariski ([ÉGA IV<sub>3</sub> 8.12.8]) sont donc vérifiées. Il existe donc  $X' \rightarrow X$  fini de sorte que  $f$  se factorise en  $U' \hookrightarrow X' \rightarrow X$  où  $U' \hookrightarrow X'$  immersion ouverte et  $X' \rightarrow X$  fini. L'adhérence schématique de  $U'$  dans  $X'$  est fermée dans  $X'$  : elle s'écrit donc  $\text{Spec}(B)$  où  $B$  est fini sur  $A$ . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U' & \longrightarrow & U_B & \hookrightarrow & \text{Spec}(B) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & U & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

où les flèches non horizontales sont finies. La flèche  $U' \rightarrow U_B$  est donc propre. Comme c'est aussi une immersion ouverte d'image dense, c'est un isomorphisme. L'ouvert  $U$  contenant  $\text{Spec}(A) - V(I)$ , on déduit que  $U' = U_B$  contient  $\text{Spec}(B) - V(IB) = (\text{Spec}(A) - V(I))_B$ .  $\square$

D'après le lemme, la flèche (2.a) s'identifie à

$$(2.b) \quad H^0(U_B, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}_B, F) \quad (\text{resp. } \text{Tors}(U_B, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}_B, G))$$

(où  $?_B$  est l'extension des scalaires du  $A$ -schéma  $?$  à  $\text{Spec}(B)$ ). Il s'agit donc de montrer que (2.b) est bijectif (resp. une équivalence).

Par définition, on a

$$\widehat{U}_B = \pi_C^{-1}(U)$$

où  $\pi_C$  est la projection naturelle

$$\pi_C : \text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \text{avec } C = \widehat{A} \otimes_A B.$$

Dans le cas noethérien,  $C$  est le complété  $I_B$ -adique  $\widehat{B} = C$  de  $B$  ce qui prouve la proposition dans ce cas – appliquer l'hypothèse 2.2.1 i) à  $\mathcal{F}$  constant de valeur  $F$  sur  $U_B$  –. Dans le cas général, la flèche  $C \rightarrow \widehat{B}$  n'est pas en général un isomorphisme.

LEMME 2.2.3. Avec les notations précédentes, on a

- i) Soit  $(A_n, I_n)$  un système projectif de couples henséliens. Le couple  $(A_\infty, I_\infty) = (\varprojlim A_n, \varprojlim I_n)$  est hensélien.
- ii) Le complété I-adique de  $A$  est hensélien.
- iii) Les couples  $(B, IB)$  et  $(C, IC)$  sont henséliens et ont même complété I-adique.

*Démonstration.* Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $A_\infty[x]$  et  $\bar{a} \in A_\infty/I_\infty$  une racine simple (c'est-à-dire telle que  $P'(\bar{a})$  inversible dans  $A_\infty/I_\infty$ ). L'image  $\bar{a}_n$  de  $\bar{a}$  dans  $A_n/I_n$  est une racine simple de  $P$ . Elle se relève donc de façon unique en une racine  $a_n \in A_n$  de  $P$  d'après le lemme de Hensel. Comme  $I_{n+1}$  s'envoie dans  $I_n$ , par unicité des relèvements, l'image de  $a_{n+1}$  dans  $A_n$  est égale à  $a_n$  de sorte que la suite  $a = (a_n) \in A_\infty$  est le relèvement cherché de  $\bar{a}$  ce qui prouve i).

Puisque  $A \rightarrow A/I^n$  est notoirement entier, les couples  $(A/I^n, IA/I^n)$  sont henséliens de sorte que ii) découle de i).

Par associativité du produit tensoriel, le morphisme naturel  $B/I^n B \rightarrow C/I^n C$  s'identifie au morphisme naturel  $A/I^n A \rightarrow \hat{A}/I^n \hat{A}$ . Comme ce dernier est un isomorphisme ([Bourbaki, A.C., III, §2, n°2, prop. 15 et cor. 2]),  $B$  et  $C$  ont même complété I-adique. iii) suit alors de ii) car un couple fini sur un hensélien est hensélien.  $\square$

On a donc  $\widehat{U}_B = \widehat{U}_C$ . D'après le lemme précédent, sous les hypothèses de 2.2.1 i) (resp. ii)), la flèche naturelle

$$H^0(U_B, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}_B, F) = H^0(\widehat{U}_C, F) \leftarrow H^0(U_C, F) = H^0(\widehat{U}_B, F)$$

(resp.

$$\text{Tors}(U_B, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}_B, G) = \text{Tors}(\widehat{U}_C, G) \leftarrow \text{Tors}(U_C, G) = \text{Tors}(\widehat{U}_B, G))$$

est alors une bijection (resp. équivalence), ce qu'on voulait.  $\square$

**2.3. Réduction au cas strictement hensélien.** Résumons les notations dans le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U} & \xrightarrow{\pi} & U \\ \widehat{j} \downarrow & \square & \downarrow j \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

avec  $U$  quasi-compact contenant  $\text{Spec}(A) - V(I)$ . Montrons le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3.1. Supposons que pour tout  $U$  comme plus haut,

- i) pour tout ensemble fini  $F$ , la flèche  $H^0(U, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}, F)$  est bijective si  $A$  est de plus strictement local. Alors, 2.1.1 i) est vrai (que  $A$  soit strictement local ou non).
- ii) pour tout groupe fini  $G$ , la flèche  $\text{Tors}(U, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}, G)$  est une équivalence si  $A$  est de plus strictement hensélien et 2.1.1 i) est vrai. Alors, 2.1.2 est vrai (que  $A$  soit strictement local ou non).

*Démonstration.* Commençons par un lemme.

LEMME 2.3.2. Supposons que pour tout  $U$  comme plus haut,

i) pour tout ensemble fini  $F$ , la flèche  $H^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\mathcal{U}}, F)$  est bijective si  $A$  est de plus strictement local. Alors, la flèche de changement de base

$$\gamma : \pi^* j_* F \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* F = \widehat{j}_* F$$

est un isomorphisme (que  $A$  soit strictement local ou non).

ii) pour tout groupe fini  $G$ , la flèche  $\text{Tors}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{\mathcal{U}}, G)$  est une équivalence si  $A$  est de plus strictement hensélien et 2.1.1 i) est vrai. Alors, la flèche de changement de base

$$\gamma : \pi^* j_* \text{Tors}(\mathcal{U}, G) \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \text{Tors}(\mathcal{U}, G) = \widehat{j}_* \text{Tors}(\widehat{\mathcal{U}}, G),$$

où l'égalité résulte de [Giraud, 1971, III.2.1.5.7], est une équivalence (que  $A$  soit strictement local ou non).

*Démonstration.* Les formules  $j^* j_* = \text{Id}$  et  $\widehat{j}^* \widehat{j}_* = \text{Id}$  assurent qu'on a

$$\widehat{j}^* \pi^* j_* = \pi^* j^* j_* = \pi^* = \widehat{j}^* \widehat{j}_* \pi^*$$

de sorte que l'image inverse sur  $\widehat{\mathcal{U}}$  de la flèche de changement de base

$$(2.a) \quad \pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence pour tout champ en groupoïdes  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\widehat{x}$  un point géométrique de  $\widehat{X}$  d'image le point géométrique  $x = \pi \circ \widehat{x}$  de  $X$  et montrons que la fibre de la flèche de changement de base (2.a) en  $\widehat{x}$  est une équivalence. D'après ce qui précède, on peut supposer  $\widehat{x} \notin \widehat{\mathcal{U}}$ . En particulier,  $x \in V(I)$ .

Soit  $A^{\text{hs}}$  (resp.  $X_{(x)}$ ) l'hensélisé strict de  $A$  (resp.  $X$ ) en  $x$  et  $\widehat{A}^{\text{hs}}$  (resp.  $\widehat{X}_{(\widehat{x})}$ ) celui de  $\widehat{A}$  (resp.  $\widehat{X}$ ) en  $\widehat{x}$ . On a un diagramme commutatif où les flèches sont les flèches de functorialité, complétion ou stricte hensélisation

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{X}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & \widehat{X}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & \widehat{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{X}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & X_{(x)} & \longrightarrow & X \end{array}$$

On note alors

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{U}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{(x)} & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

l'image inverse du diagramme par l'immersion ouverte  $\mathcal{U} \rightarrow X$ . En particulier,  $\mathcal{U}_{(x)}$  (resp.  $\widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})}$ ) désigne l'image inverse de l'hensélisé strict  $X_{(x)}$  (resp.  $\widehat{X}_{(\widehat{x})}$ ) de  $X$  (resp.  $\widehat{X}$ ) en  $x$  (resp.  $\widehat{x}$ ) par  $j$  (resp.  $\widehat{j}$ ). Comme  $\mathcal{U}$  est quasi-compact, il en est de même des ouverts  $\mathcal{U}_{(x)}, \widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})}$  de  $X_{(x)}, \widehat{X}_{(\widehat{x})}$ .

Les morphismes  $j, \widehat{j}$  étant cohérents, dans le cas i), la fibre  $\gamma_{\widehat{x}}$  s'identifie à la flèche naturelle

$$H^0(\mathcal{U}_{(x)}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\mathcal{U}}_{(\widehat{x})}, F)$$

tandis que dans le cas ii) elle s'identifie à

$$\text{Tors}(\mathbf{U}_{(x)}, \mathbf{G}) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{\mathbf{U}}_{(\widehat{x})}, \mathbf{G}).$$

On déduit que les flèches naturelles

$$H^0(\mathbf{U}_{(x)}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\mathbf{U}}_{(x)}, F) \text{ et } H^0(\widehat{\mathbf{U}}_{(\widehat{x})}, F) \rightarrow H^0(\widehat{\widehat{\mathbf{U}}}_{(\widehat{\widehat{x})}}, F)$$

sont bijectives dans le cas i) et que les flèches

$$\text{Tors}(\mathbf{U}_{(x)}, \mathbf{G}) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{\mathbf{U}}_{(x)}, \mathbf{G}) \text{ et } \text{Tors}(\widehat{\mathbf{U}}_{(\widehat{x})}, \mathbf{G}) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{\widehat{\mathbf{U}}}_{(\widehat{\widehat{x})}}, \mathbf{G})$$

sont des équivalences dans le cas ii). Il suffit donc de voir que la flèche naturelle

(2.b) 
$$\widehat{\widehat{\mathbf{U}}}_{(\widehat{\widehat{x})}} \rightarrow \widehat{\mathbf{U}}_{(x)}$$

est bijective, ou encore que

$$A^{\text{hs}} \text{ et } \widehat{A}^{\text{hs}} \text{ ont même I-complété.}$$

Puisque l'anneau local  $\widehat{A}^{\text{hs}}$  est hensélien, il est a fortiori I-hensélien (exercice).

Utilisant (2.2.3), on constate que le I-complété  $\widehat{\widehat{A}^{\text{hs}}}$  est hensélien. Comme son corps résiduel est celui de  $A^{\text{hs}}$ , il est strictement hensélien. La flèche  $\widehat{A} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}$  induit donc une flèche  $\widehat{A}^{\text{hs}} \rightarrow \widehat{\widehat{A}^{\text{hs}}}$  et donc, par I-complétion, une flèche

(\*) 
$$\widehat{\widehat{A}^{\text{hs}}} \rightarrow \widehat{A}^{\text{hs}}.$$

Par ailleurs, la flèche de complétion  $A \rightarrow \widehat{A}$  induit par hensélisation stricte puis complétion une flèche

(\*\*) 
$$\widehat{A}^{\text{hs}} \rightarrow \widehat{\widehat{A}^{\text{hs}}}.$$

Les flèches (\*) et (\*\*) sont inverses l'une de l'autre, d'où le lemme. □

On a le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{U}} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{U} \\ \widehat{j} \downarrow & \square & \downarrow j \\ \widehat{\mathbf{X}} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{X} \\ \uparrow & \nearrow & \\ X_I = \text{Spec}(A/I) & & \end{array}$$

Comme on l'a observé, les paires  $(A, I)$  et  $(\widehat{A}, I\widehat{A})$  sont henséliennes. La flèche  $H^0(\widehat{\mathbf{X}}, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X_I, \mathcal{C}_{|X_I})$  est donc une équivalence pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$  sur  $X_{\text{ét}}$  d'après [Gabber, 1994, théorème 1'].

On déduit d'une part

$$H^0(\mathbf{U}, F) = H^0(\mathbf{X}, j_*F) = H^0(X_I, (j_*F)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$H^0(\widehat{\mathbf{U}}, F) = H^0(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{j}_*F) \stackrel{2.3.2}{=} H^0(\widehat{\mathbf{X}}, \pi^*j_*F) = H^0(X_I, (\pi^*j_*F)_{|X_I})$$



ce dernier n'étant autre que  $H^0(X_I, (j_*F)_{|X_I})$  (bien entendu l'isomorphisme induit

$$H^0(U, F) \xrightarrow{\sim} H^0(\widehat{U}, F)$$

est la restriction).

De même, on a

$$H^0(U, \underline{\text{Tors}}(U, G)) = H^0(X, j_*\underline{\text{Tors}}(U, G)) = H^0(X_I, j_*\underline{\text{Tors}}(U, G)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$\begin{aligned} H^0(\widehat{U}, \underline{\text{Tors}}(\widehat{U}, G)) &= H^0(\widehat{X}, \widehat{j}_*\underline{\text{Tors}}(\widehat{U}, G)) \\ &\stackrel{2.3.2}{=} H^0(\widehat{X}, \pi^*j_*\underline{\text{Tors}}(U, G)) \\ &= H^0(X_I, \pi^*j_*\underline{\text{Tors}}(U, G)_{|X_I}) \end{aligned}$$

ce dernier n'étant autre que  $H^0(X_I, j_*\underline{\text{Tors}}(U, G)_{|X_I})$  (bien entendu l'isomorphisme induisant

$$H^0(U, \underline{\text{Tors}}(U, G)) \xrightarrow{\sim} H^0(\widehat{U}, \underline{\text{Tors}}(\widehat{U}, G)).$$

Reste à invoquer **2.2.1**. □

**2.4. Fin de la preuve de 2.1.2.** D'après **2.3.1**, pour prouver **2.1.2**, il suffit de prouver l'énoncé suivant

**PROPOSITION 2.4.1.** *Supposons  $A$  strictement hensélien (et  $I \subset \text{rad}(A)$ ) et soit  $U$  comme plus haut.*

- i) *pour tout ensemble fini  $F$ , la flèche  $H^0(U, F) \rightarrow H^0(\widehat{U}, F)$  est bijective.*
- ii) *pour tout groupe fini  $G$ , la flèche  $\text{Tors}(U, G) \rightarrow \text{Tors}(\widehat{U}, G)$  est une équivalence.*

La formule  $\pi^*\underline{\text{Tors}}(U, G) = \underline{\text{Tors}}(\widehat{U}, G)$  ([Giraud, 1971], III.2.1.5.7) permet de réécrire **2.4.1** sous la forme suivante

**PROPOSITION 2.4.2.** *Supposons  $A$  strictement hensélien (et  $I \subset \text{rad}(A)$ ) et soit  $U$  comme plus haut. Désignons par  $\mathcal{C}$  le champ discret  $F_U$  ou bien  $\underline{\text{Tors}}(U, G)$ . Alors, la flèche  $H^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\widehat{U}, \pi^*\mathcal{C})$  est une équivalence.*

*Démonstration.* On va se ramener par éclatement au cas où l'idéal  $J$  définissant le complémentaire de  $U$  est principal.

Pour tout idéal  $\tilde{I}$  d'un anneau  $\tilde{A}$ , on note

$$\text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) = \text{Proj}(\oplus_{n \geq 0} \tilde{I}^n)$$

l'éclatement de  $\tilde{I}$  dans  $\text{Spec}(\tilde{A})$ . Si  $\tilde{I}$  est de type fini, le morphisme structural  $e : \text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{A})$  est projectif, en particulier propre. Si  $S$  est un  $\tilde{A}$ -schéma, on note  $\widehat{S}^J$  le complété de  $S$  le long de  $J$ .

On suppose donc  $A$  strictement hensélien de corps résiduel  $k$  et  $\mathcal{F} = F_U$  comme plus haut. On a déjà observé que  $\widehat{A}$  était aussi strictement hensélien. Il suit en particulier que l'ensemble des sections globales de tout faisceau étale sur  $X$  ou  $\widehat{X}$  s'identifie à sa fibre spéciale, ce qu'on utilisera sans plus de précaution.

Comme  $U$  est quasi-compact, il existe un idéal  $J$  de type fini tel que  $U = \text{Spec}(A) - V(J)$ . Comme  $U$  contient  $\text{Spec } A - V(I)$  et que  $I$  est de type fini, on peut supposer  $I \subset J$ . Soit

$$Y = \text{Écl}_J(A) \text{ et } Y' = \text{Écl}_J(\widehat{A}).$$

(On aurait dû écrire  $\text{Écl}_{J\widehat{A}}(\widehat{A})$  pour  $\text{Écl}_J(\widehat{A})$ ). Pour des raisons de cohérences, on notera simplement  $X'$  le complété  $\widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A})$  (resp.  $U'$  sa restriction  $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$  à  $U$ ).

**SOUS-LEMME 2.4.3.** Soient  $n, m$  des entiers  $\geq 0$ . Le morphisme de complétion définit des isomorphismes

$$A/I^m J^n \simeq \widehat{A}/I^m J^n \widehat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \widehat{A}/J^n \widehat{A}$$

induisant un isomorphisme

$$J^n/I^m J^n \simeq J^n \widehat{A}/I^m J^n \widehat{A}.$$

*Démonstration.* Comme  $I$  est de type fini, le morphisme de complétion induit des isomorphismes

$$A/I^{m+n} \simeq \widehat{A}/I^{m+n} \widehat{A} \text{ et } A/I^n \simeq \widehat{A}/I^n \widehat{A}$$

d'après [Bourbaki, A.C., III, §2, n°12, cor. 2 de la prop. 16]. Mais comme  $J$  contient  $I$ , on a

$$I^{m+n} \subset I^m J^n \text{ et } I^n \subset J^n,$$

de sorte que les changements de base

$$A/I^{m+n} \rightarrow A/I^m J^n \text{ et } A/I^n \rightarrow A/J^n$$

donnent alors des isomorphismes

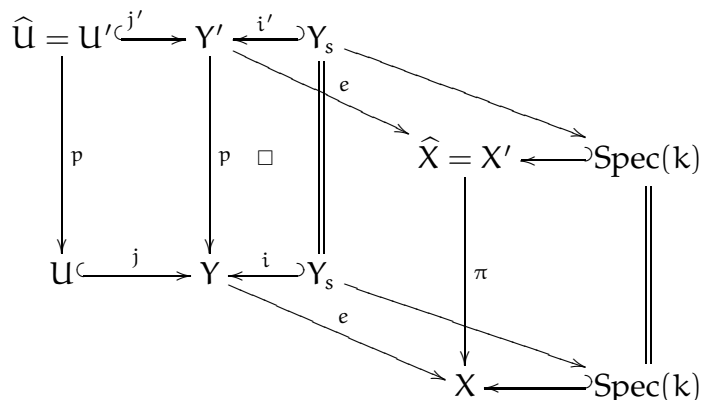
$$A/I^m J^n \simeq \widehat{A}/I^m J^n \widehat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \widehat{A}/J^n \widehat{A}$$

qui donnent **2.4.3.** □

La flèche naturelle  $Y' \rightarrow Y$  est donc un isomorphisme au dessus de  $\text{Spec}(A/I) \subset X$  car elle est induite par le morphisme gradué

$$\bigoplus J^n A/IJ^n A \rightarrow J^n \widehat{A}/IJ^n \widehat{A}$$

qui est un isomorphisme. On identifiera ces restrictions par la suite. En particulier, le morphisme  $p_s : Y'_s \rightarrow Y_s$  entre fibres spéciales (c'est-à-dire au dessus du point fermé de  $s \in \text{Spec}(A/I) \subset X$ ) est un isomorphisme grâce auquel nous les identifierons. Regardons le solide commutatif



Admettons pour un temps le résultat suivant.

LEMME 2.4.4. Soit  $\mathcal{C} = F_U$  (resp.  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(U, G)$ ). Alors, la flèche de changement de base

$$\gamma : p^*j_*\mathcal{C} \rightarrow j'_*p^*\mathcal{C}$$

est bijective (resp. une équivalence).

Déduisons alors l'isomorphisme cherché

$$H^0(U, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} H^0(U', \mathcal{C}) = H^0(U', p^*\mathcal{C})$$

grâce au théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck ([Giraud, 1971] dans le cas noethérien et théorème 7.1 dans le cas général) appliqué aux faces inférieure et supérieure du diagramme précédent. On a en effet un diagramme commutatif où toutes les flèches sont les flèches naturelles (obtenues par adjonction)

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(U, \mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y, j_*\mathcal{C}) & \xrightarrow{b} & H^0(Y_s, i^*j_*\mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y_s, i'^*p^*j_*\mathcal{C}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow a & & \downarrow & & \swarrow c \\ H^0(U', p^*\mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & H^0(Y', j'_*p^*\mathcal{C}) & \xrightarrow{d} & H^0(Y_s, i'^*j'_*p^*\mathcal{C}) & & \end{array}$$

Les flèches b, d sont bijectives grâce au théorème de changement de base propre (7.1) tandis que c une bijection grâce à (2.4.4). Il suit que a et  $\alpha$  sont des bijections.

Démonstration. Preuve du lemme 2.4.4 : Soit  $x'$  un point géométrique de  $Y'$  d'image  $x$  dans  $Y$ . On peut supposer  $x' \in V(J)$ . Soit  $B$  l'hensélisé (strict) de  $Y$  en  $x$  et  $B'$  celui de  $Y'$  en  $x$ . On doit étudier la flèche

$$(*) \quad H^0(\text{Spec}(B) - V(JB), \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\text{Spec}(B') - V(JB'), \mathcal{C})$$

Observons que par définition de l'éclatement,  $JB$  (resp.  $JB'$ ) est un idéal principal engendré par un élément non diviseur de zéro et non inversible  $t \in B$  (resp.  $t' \in B'$ ) (équation locale du diviseur exceptionnel). Par ailleurs, les couples  $(B, JB)$  et  $(B', JB')$  sont henséliens car  $B, B'$  sont locaux henséliens (exercice). Les isomorphismes

$$J^n A / J^{n+m} A \xrightarrow{\sim} J^n \widehat{A} / J^{n+m} \widehat{A}, n, m \geq 0$$

assurent que  $B$  et  $B'$  ont même complété  $J$ -adique  $\widehat{B} = \widehat{B}'$ .

On utilise alors les généralisations des résultats d'Elkik [Elkik, 1973b] – et donc de Ferrand-Raynaud pour le  $\pi_0$  – au cas principal non noethérien de [Gabber & Ramero, 2000]. Précisément, le théorème 5.4.37 appliqué au  $B[t^{-1}]$ -groupeïde discret  $F_B = \text{Spec}(B[t^{-1}]) \times F$  assure qu'on a

$$H^0(\text{Spec}(B[t^{-1}]), F) = \pi_0(F_B) = \pi_0(F_{\widehat{B}}) = H^0(\text{Spec}(\widehat{B}[t^{-1}]), F)$$

et de même en remplaçant  $B, t$  par  $B', t'$ . Comme  $B$  et  $B'$  ont même complété  $J$ -adique, on a donc

$$H^0(\text{Spec}(B[t^{-1}]), F) = H^0(\text{Spec}(B'[t'^{-1}]), F),$$

ce qu'on voulait. Dans le cas  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(U, G)$ , on déduit du cas discret que (\*) est pleinement fidèle. Soit alors  $\widehat{P}$  un revêtement galoisien de groupe  $G$  sur  $\widehat{U} =$

$\text{Spec}(\widehat{B}) - V(\widehat{J}\widehat{B})$ . D'après le théorème 5.4.53 de [Gabber & Ramero, 2003], il provient d'un (unique) revêtement  $P$  de  $U$ . La pleine fidélité de (\*) assure que le groupe d'automorphismes de  $P$  est  $G$ . Dire que  $P$  est galoisien de groupe  $G$ , c'est dire que la flèche canonique

$$\phi : P \times G \rightarrow P \times_U P$$

est un isomorphisme. On peut voir cette flèche comme un morphisme de revêtements étales de  $U$ . Après image inverse sur  $\widehat{U}$ , elle s'identifie à la flèche analogue

$$\widehat{P} \times G \rightarrow \widehat{P} \times_{\widehat{U}} \widehat{P}$$

qui est un isomorphisme (de revêtements étales de  $\widehat{P}$  donc de revêtements étales de  $\widehat{U}$ ) par hypothèse. La pleine fidélité de (\*) assure que  $\phi$  est un isomorphisme de sorte que  $P$  est bien galoisien de groupe  $G$ . On a donc obtenu que le foncteur naturel entre les catégories de  $G$ -revêtements galoisiens sur  $U$  et  $\widehat{U}$  sont équivalentes. Il en est donc de même pour le foncteur les catégories de  $G$ -revêtements galoisiens sur  $U'$  et  $\widehat{U}'$ . On conclut en se souvenant de l'égalité  $\widehat{U} = \widehat{U}'$ .  $\square$

$\square$

REMARQUES 2.4.5. Le théorème 2.1.2 entraîne immédiatement que la flèche de changement de base

$$\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence. En effet, on l'a déjà vu sur  $\widehat{U}$  (2.a). Si  $\widehat{x} \notin \widehat{U}$ , on a déjà observé dans la preuve de 2.3.2 que  $U_{(\widehat{x})}$  et  $\widehat{U}_{(\widehat{x})}$  avaient même complété I-adique de sorte que deux applications de 2.1.2 assurent que la fibre de

$$\pi^* j_* \mathcal{C} \rightarrow \widehat{j}_* \pi^* \mathcal{C}$$

en  $\widehat{x}$  est une équivalence.

### 3. Rigidité de la ramification

**3.1. La condition  $c_2$ .** Rappelons ([ÉGA IV<sub>4</sub> 18.6.7]) que l'hensélisé  $A^h$  d'un anneau semi-local  $A$  est le produit des hensélisés des localisés de  $A$  en ses idéaux maximaux. Pour tout anneau noethérien, on note  $A^\vee$  son normalisé, à savoir la clôture intégrale de  $A$  dans l'anneau total  $K(A)$  des fractions de  $A_{\text{réd}}$ . Puisque  $K(A)$  est le produit des  $K(A/\mathfrak{p})$  où  $\mathfrak{p}$  décrit les points maximaux de  $\text{Spec}(A)$ , le normalisé de  $A$  est le produit des normalisés des  $A/\mathfrak{p}$ . Si  $A^\vee$  n'est en général pas noethérien ([Nagata, 1962, exemple 5 de l'appendice]), il est en revanche quasi-fini sur  $A$  ([Nagata, 1962, V.33.10]). En particulier, si  $A$  est local,  $A^\vee$  est semi-local. Si  $A$  est local noethérien,  $A^\vee$  est semi-local de sorte que son hensélisé est bien défini. On a alors (comparer avec [Nagata, 1962, 43.20 et exercice 43.21])

LEMME 3.2. Soit  $A$  un anneau local noethérien.

- La flèche canonique  $A^h \rightarrow (A^\vee)^h$  induit un isomorphisme  $(A^h)^\vee \xrightarrow{\sim} (A^\vee)^h$ .
- Cette bijection induit une bijection canonique  $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^*$  entre les points maximaux  $\mathfrak{p}$  de  $\text{Spec}(A^h)$  et les points fermés  $\mathfrak{p}^*$  de  $\text{Spec}(A^\vee)$  de telle sorte que les anneaux intègres  $(A^h/\mathfrak{p})^\vee$  et  $(A^\vee_{\mathfrak{p}^*})^h$  sont (canoniquement) isomorphes.

*Démonstration.* D'après [ÉGA IV<sub>4</sub> 18.6.8], le morphisme canonique  $A^\vee \otimes_A A^h \rightarrow (A^\vee)^h$  est un isomorphisme. Le morphisme canonique  $A \rightarrow A^h$  étant ind-étale, il est normal. D'après [ÉGA IV<sub>2</sub> 6.14.4], le morphisme canonique  $A^h \rightarrow A^\vee \otimes_A A^h$  identifie  $A^\vee \otimes_A A^h$  à la fermeture intégrale de  $A^h$  dans  $A^h \otimes_A K(A)$ . Si maintenant,  $A \rightarrow B$  est étale, la fibre au point maximal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  s'identifie à  $\text{Spec}(K(B))$ . En passant à la limite, on déduit l'égalité  $A^h \otimes_A K(A) = K(A^h)$  de sorte que  $A^\vee \otimes_A A^h$  s'identifie à la fermeture intégrale de  $A^h$  dans  $A^h \otimes_A K(A) = K(A^h)$  et donc  $(A^h)^\vee \xrightarrow{\sim} A^\vee \otimes_A A^h$ . La composition

$$(A^h)^\vee \xrightarrow{\sim} A^\vee \otimes_A A^h \xrightarrow{\sim} (A^\vee)^h$$

est l'isomorphisme annoncé. Pour le second point, on observe d'une part que le spectre du normalisé de  $A^h$  est la somme disjointe des normalisés de ses composantes irréductibles

$$(3.a) \quad \text{Spec}((A^h)^\vee) = \coprod_{\mathfrak{p} \text{ point maximal}} \text{Spec}((A^h/\mathfrak{p})^\vee),$$

chaque fermé  $\text{Spec}((A^h/\mathfrak{p})^\vee)$  étant intègre (puisque local et normal) de sorte que 3.a est une la décomposition en composantes irréductibles de  $\text{Spec}((A^h)^\vee)$ . D'autre part, par définition de l'hensélisé d'un anneau semi-local, on a

$$(3.b) \quad \text{Spec}((A^\vee)^h) = \coprod_{\mathfrak{p}^* \text{ point fermé}} \text{Spec}((A_{\mathfrak{p}^*}^\vee)^h).$$

Or,  $(A_{\mathfrak{p}^*}^\vee)^h$  est local et normal (comme  $A_{\mathfrak{p}^*}^\vee$ ), donc intègre, prouvant que 3.b est la décomposition en composantes irréductibles de  $\text{Spec}((A^\vee)^h)$ . Le lemme suit.  $\square$

**PROPOSITION 3.3.** *Soit  $Z$  un sous-schéma fermé d'un schéma noethérien  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Soit  $\mathfrak{p} : X^\vee \rightarrow X$  le morphisme de normalisation. Alors,  $\mathfrak{p}^{-1}(Z)$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $X^\vee$ .*
- (ii) *Pour tout  $z \in Z$ , toutes les composantes irréductibles de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}^h)$  sont de dimension  $\geq 2$ .*
- (iibis) *Pour tout  $z \in Z$ , toutes les composantes irréductibles de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}^{hs})$  sont de dimension  $\geq 2$ .*
- (iii) *Pour tout  $z \in Z$ , toutes les composantes irréductibles de  $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X,z}})$  sont de dimension  $\geq 2$ .*

*Démonstration.* Notons  $A = \mathcal{O}_{X,z}$  pour  $z \in Z$ . Notons d'abord que le morphisme  $A^h \rightarrow A^{hs}$  est injectif, entier et fidèlement plat. Ceci prouve que le morphisme  $h : \text{Spec}(A^{hs}) \rightarrow \text{Spec}(A)$  vérifie  $\dim(\overline{h(\bar{x})}) = \dim(\bar{x})$  et induit une surjection au niveau des points maximaux, ce qui prouve l'équivalence de (ii) et (iibis).

Un anneau intègre et son normalisé ainsi qu'un anneau local et son hensélisé, ont même dimension. Conservant les notations de 3.2, on a donc

$$\dim A^h/\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}^*}^\vee.$$

Or, dire  $\text{codim } \mathfrak{p}^{-1}(Z) \geq 2$ , c'est dire  $\dim A_{\mathfrak{p}^*}^\vee \geq 2$  lorsque  $\mathfrak{p}^*$  décrit les points fermés de

$$\text{Spec}(A^\vee) = \mathfrak{p}^{-1}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}))$$

lorsque  $z$  décrit  $Z$ . Ceci revient donc à dire que toutes les composantes irréductibles  $\text{Spec}(A^h/\mathfrak{p})$  de  $\text{Spec}(A^h)$  sont de dimension  $\geq 2$  prouvant l'équivalence de (i) et (ii).

Pour montrer l'équivalence de (i) et (iii), on peut supposer que  $X = \text{Spec}(A)$  est local hensélien et que  $Z$  est réduit à son point fermé.

Prouvons d'abord que (iii) implique (ii). Soit  $Y$  une composante irréductible de  $X$ . Le morphisme de complétion  $c : \widehat{X} \rightarrow X$  étant fidèlement plat,  $\widehat{Y} = c^{-1}(Y)$  est une réunion de composantes irréductibles de  $\widehat{X}$  de sorte qu'on a  $\dim(\widehat{Y}) \geq 2$ . Comme  $Y$  est local noethérien, on a  $\dim(Y) = \dim(\widehat{Y}) \geq 2$ .

Prouvons la réciproque. Quitte à se restreindre à une composante irréductible (réduite), on peut supposer  $X$  intègre de dimension  $\geq 2$ . Soit  $\hat{x}$  (resp.  $x$ ) le point fermé de  $\widehat{X}$  (resp.  $X$ ) (ce n'est pas une composante irréductible de  $\widehat{X}$  qui est de dimension  $\geq 2$ ). Si une des composantes de  $\widehat{X}$  était de dimension  $\leq 1$ , elle serait de dimension 1 (car  $\{\hat{x}\}$  n'est pas une composante) et donc son point générique serait un point isolé de  $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$  de sorte que  $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$  serait disconnexe (étant de dimension  $\geq 2$ ). Or, d'après [Ferrand & Raynaud, 1970, corollaire 4.4], la flèche

$$\pi_0(\widehat{X} - \{\hat{x}\}) = \pi_0(c^{-1}(X - \{x\})) \rightarrow \pi_0(X - \{x\})$$

est bijective. Or, comme  $X$  est intègre de dimension  $\geq 2$ , l'ouvert  $X - \{x\}$  est intègre donc connexe.  $\square$

**DÉFINITION 3.4.** Avec les notations de 3.3, si  $Z$  vérifie les conditions équivalentes de 3.3, on dit que  $Z$  est  $c_2$  dans  $X$ .

**REMARQUE 3.5.** Si  $X$  est intègre et excellent,  $Z$  est  $c_2$  si et seulement si  $X - Z$  contient tous les points de codimension  $\leq 1$ . En effet, comme le morphisme de normalisation est fini et  $X, X^v$  caténaire, on a  $\dim \mathcal{O}_{X^v, z^v} = \dim \mathcal{O}_{X, p(z^v)}$  pour tout  $z^v \in p^{-1}(Z)$ .

**PROPOSITION 3.6.** Soit  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme plat de schémas noethériens et  $Z$  un fermé de  $X$ . Alors, si  $Z$  est  $c_2$  dans  $X$ , son image inverse  $Z' = f^{-1}(Z)$  est  $c_2$  dans  $X'$ . En particulier, la condition  $c_2$  est invariante par localisation Zariski ou étale.

*Démonstration.* Soit  $z' \in Z'$  d'image  $z = f(z') \in Z$ . On suppose donc (3.3) que toutes les composantes de  $A = \widehat{\mathcal{O}_{X, z}}$  sont de dimension  $\geq 2$  et on veut prouver que toutes les composantes de  $B = \widehat{\mathcal{O}_{X', z'}}$  sont de dimension  $\geq 2$ . On peut donc supposer que  $f$  est morphisme local de schémas noethériens, locaux et complets. Comme  $f$  est plat, toute composante de  $X'$  domine une composante  $X_0$  de  $X$  et est une composante de  $f^{-1}(X_0)$ . On peut donc supposer  $X$  intègre de dimension  $> 1$ , de point fermé  $z$ . D'après [SGA 2 VIII 2.3], le  $A$ -module  $\mathcal{O}(X - z)$  est de type fini. Comme  $B$  est plat sur  $A$ , on déduit que  $B \otimes_A \mathcal{O}(X - z) = \mathcal{O}(X' - f^{-1}(z))$  est de type fini sur  $B$ . Comme  $B$  est noethérien, le sous  $B$ -module  $\mathcal{O}(X' - z')$  de  $\mathcal{O}(X' - f^{-1}(z))$  est de type fini. Mais si une des composantes  $X'_0$  de  $X'$  était de dimension 1, le complémentaire  $X'_0 - z'$  serait réduit au point générique  $\eta$  de  $X'_0$  qui serait isolé dans  $X' - z'$  isolé de sorte que  $\mathcal{O}(X'_0 - z')$  serait un sous  $B$ -module de  $\mathcal{O}(X' - z')$ , donc de type fini ( $B$  est noethérien). A fortiori,  $\mathcal{O}(X'_0 - z')$  serait de type fini comme  $\mathcal{O}(X'_0)$ -module, ce qui contredit [SGA 2 VIII 2.3] puisque  $X'_0$  est de dimension 1.  $\square$

### 4. Théorème de rigidité de la ramification I : forme faible

Nous allons commencer par démontrer une variante du changement de base lisse qui est cruciale dans la preuve du théorème de rigidité 4.2.1.

**4.1. Variante du théorème de changement de base lisse.** Soit  $G$  un groupe fini. On va démontrer une variante du théorème de changement de base lisse [SGA 4 XVI 1.2] pour les faisceaux de  $G$ -torseurs sans hypothèse sur le cardinal de  $G$ , mais en se restreignant au cas d’immersions ouvertes.

THÉORÈME 4.1.1 (Gabber). *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Supposons  $X$  excellent normal,  $p : X' \rightarrow X$  lisse et  $j : U \rightarrow X$  immersion ouverte telle que  $U$  contient tous les points de codimension  $\leq 1$ . Alors, le morphisme de changement de base  $\Phi : p^*j_* \underline{\text{Tors}}(U, G) \rightarrow j'_* \underline{\text{Tors}}(U', G)$  est une équivalence.

*Démonstration.* D’après le théorème de changement de base lisse pour les faisceaux d’ensembles [SGA 4 XVI 1.2],  $\Phi$  est pleinement fidèle. Il suffit de prouver l’essentielle surjectivité. Soit  $x'$  un point géométrique de  $X'$  d’image  $x = p(x')$ . Passant aux fibres, on est ramené à prouver que la flèche d’image inverse des toseurs  $H^1(U_{(x)}, G) \rightarrow H^1(U'_{(x')}, G)$  est bijective, avec de plus  $x'$  fermé dans sa fibre [SGA 4 VIII 3.13 b)]. La stricte hensélisation préserve la normalité et la codimension (platitude). Les propriétés de permanence des anneaux excellents (cf. I-8) assurent donc qu’on peut supposer  $X = \text{Spec}(A), X' = \text{Spec}(A')$  avec  $A = \mathcal{O}_{X,x}^{\text{hs}}, A' = \mathcal{O}_{X',x'}^{\text{hs}}$  strictement locaux, normaux et excellents. Comme  $p$  est lisse, le choix de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  de  $X'$  en  $x'$  définit un  $A$ -isomorphisme  $A\{t_1, \dots, t_n\} \xrightarrow{\sim} A'$  où comme d’habitude  $A\{t_1, \dots, t_n\}$  désigne l’hensélisé strict de  $A[t_1, \dots, t_n]$  à l’origine. Une récurrence évidente permet de supposer  $n = 1$ . On s’est ramené à la situation

$$\left( \begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \left( \begin{array}{ccc} \sigma \downarrow p & \square & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array} \right) \sigma \end{array} \right)$$

avec  $A$  strictement local, normal et excellent et  $\sigma$  la section de  $p$  définie par l’immersion fermée d’équation  $t = 0$ . Comme  $X, X'$  sont locaux et normaux, ils sont intègres. Les ouverts non vides de  $X, X'$  sont donc intègres et donc connexes. Le composé

$$\pi_1(U) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_1(U') \xrightarrow{p_*} \pi_1(U)$$

étant l’identité, il suffit de prouver que  $\sigma_*$  est surjectif. Soit alors  $V'$  un revêtement étale connexe de  $U'$ . On doit prouver que sa restriction  $V \rightarrow U$  au fermé  $U \xrightarrow{\sigma} U'$  d’équation  $t = 0$  est connexe.

Comme  $X'$  est excellent, la clôture intégrale  $Y'$  de  $X'$  dans  $V'$  est finie sur  $X'$ , normale et intègre (comme  $X'$ ). Comme  $X'$  est hensélien, il en est de même de  $Y'$  qui est donc une union disjointe de ses composantes locales. Comme  $Y'$  est intègre,  $Y'$  est local. Soit  $D \subset Y'$  le diviseur de Cartier d’équation  $t = 0$  :  $D$  est connexe, puisque fermé dans un schéma local.

On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens et où les flèches verticales sont finies (et dominantes).

$$\begin{array}{ccccccc}
 V' & \hookrightarrow & Y' & \longleftarrow & D & \longleftarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U' & \hookrightarrow & X' & \xleftarrow{\sigma} & X & \longleftarrow & U
 \end{array}$$

Soit  $x'$  un point de  $D - V$ , d'image  $x$  dans  $X - U$ . Comme  $D \rightarrow X$  est fini, on a  $\dim \overline{\{x'\}} = \dim \overline{\{x\}}$  et  $\dim(D) = \dim(X)$ . Comme  $X$  et  $X'$  sont caténaire (ils sont même excellents), on en déduit l'égalité  $\dim \mathcal{O}_{D,x'} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$  ce qui assure que l'ouvert  $V$  dans  $D$  contient tous les points de codimension 1 dans  $D$  (de même que le complémentaire de  $U$  dans  $X$  contient tous les points de codimension 1 dans  $X$ ). D'après le lemme **XXI-4.4** appliqué au diviseur de Cartier connexe du schéma normal, excellent  $Y'$ , le schéma  $V$  est connexe.  $\square$

**4.2. Énoncé et réductions.**

**THÉORÈME 4.2.1** (Rigidité de la ramification). *Soient  $X, X'$  des schémas noethériens,  $Z \subset X$  un sous-schéma fermé,  $U \xrightarrow{\tilde{j}} X$  l'ouvert complémentaire et  $X' \xrightarrow{\pi} X$  un morphisme plat. Notons  $U' \xrightarrow{\tilde{j}'} X'$  l'immersion ouverte  $U' = \pi^{-1}(U) \hookrightarrow X'$ . On suppose que  $\pi$  est régulier au dessus de  $Z$ . Soit  $\mathcal{C}$  un champ en groupoïdes sur  $U_{\text{ét}}$ . Alors, la flèche de changement de base*

$$\phi(\mathcal{C}) : \pi^* \tilde{j}_* \mathcal{C} \rightarrow \tilde{j}'_* \pi^* \mathcal{C}$$

est une équivalence dans les deux cas suivants :

- (i)  $\mathcal{C}$  est discret (c'est-à-dire  $\mathcal{C}$  équivalent à un faisceau d'ensembles).
- (ii)  $Z$  est  $c_2$  et  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(U, G)$  avec  $G$  un groupe (ordinaire) fini.

En considérant les fibres, on peut supposer que  $\pi$  est un morphisme local de schémas strictement locaux (la condition  $c_2$  ne dépendant que des hensélisés stricts aux points de  $Z$ ).

Soient  $x, x'$  les points fermés respectifs de  $X, X'$ . Par récurrence sur la dimension de  $X'$ , on peut supposer que  $\phi(\mathcal{C})_{\tilde{y}'}$  est une équivalence en tout point géométrique  $\tilde{y}'$  de  $X' - \{x'\}$  et il suffit de prouver que  $\phi(\mathcal{C})_{x'}$  est une équivalence. On peut de plus supposer  $x \in Z$  (sinon  $U = X$  et c'est terminé). Par hypothèse, la fibre spéciale  $F = \pi^{-1}(x)$  de  $\pi$  est géométriquement régulière.

On a un diagramme commutatif à « carrés » cartésiens (avec des notations un peu abusives)

$$\begin{array}{ccc}
 U' & \longrightarrow & U \\
 \downarrow j' & & \downarrow j \\
 X' - F & \longrightarrow & X - \{x\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{\pi} & X
 \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, la flèche de changement de base associée au carré supérieur est une équivalence de sorte qu'on a une équivalence  $\pi^* j_* \mathcal{C} \xrightarrow{\sim}$



$j'_*\pi^*\mathcal{C}$  sur  $X' - F$ . Comme  $X, X'$  sont strictement henséliens, la flèche de changement de base  $\phi(j_*\mathcal{C})_{X'}$

$$\begin{aligned} H^0(X, \tilde{j}_*\mathcal{C}) &= H^0(X - \{x\}, j_*\mathcal{C}) \\ &\xrightarrow{\pi^*} H^0(X' - F, \pi^*j_*\mathcal{C}) \\ &= H^0(X' - F, j'_*\pi^*\mathcal{C}) \\ &= H^0(X', \tilde{j}'_*\pi^*\mathcal{C}) \end{aligned}$$

s'identifie à la flèche d'image inverse

(4.a)  $\pi^* : H^0(X - \{x\}, j_*\mathcal{C}) \rightarrow H^0(X' - F, \pi^*j_*\mathcal{C}).$

LEMME 4.2.2. *On peut supposer que  $\pi$  est un morphisme essentiellement lisse de schémas strictement locaux et excellents.*

*Démonstration.* Notons  $\widehat{X}$  le complété de  $X$  le long de son point fermé et  $\widehat{X}'$  le complété de  $X'$  le long de  $F$ . Pour tout  $S$ -espace  $\mathcal{E}$  sur  $S_{\text{ét}}$  avec  $S = X, X'$ , on note  $\widehat{\mathcal{E}}$  son image inverse sur  $\widehat{S}$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}' & \xrightarrow{\gamma'} & X' \\ \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \pi \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

où  $\gamma, \gamma'$  sont les morphismes de complétion, donc sont plats, et  $\hat{\pi}$  est plat comme  $\pi$  et est un morphisme local de schémas noethériens. Sa fibre spéciale est encore  $F$  de sorte qu'elle est géométriquement régulière. Ainsi,  $\hat{\pi}$  est formellement lisse ([ÉGA IV<sub>4</sub> 19.7.1]) et donc régulier ([André, 1974]) puisque  $\widehat{X}$  est local noethérien complet donc excellent. D'après 3.6,  $\widehat{Z} = \widehat{X} - \widehat{U}$  est encore  $c_2$ . D'après le théorème de rigidité de Gabber (2.1.2) appliqué aux paires henséliennes  $(X, x)$  et  $(X', F)$ , il suffit, pour prouver que le foncteur 4.a est une équivalence, de prouver que le foncteur

(4.b)  $\hat{\pi}^* : H^0(\widehat{X} - \{x\}, j_*\widehat{\mathcal{C}}) \rightarrow H^0(\widehat{X}' - F, \hat{\pi}^*j_*\widehat{\mathcal{C}})$

est une équivalence. Mais on a d'une part

$$j_*\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{j}_*\mathcal{C}$$

d'après la version faisceautique (2.4.5) du théorème de rigidité de Gabber, et, d'autre part

$$\widehat{\mathcal{C}} = \underline{\text{Tors}}(\widehat{U}, G)$$

d'après [Giraud, 1971, III.2.1.5.7]. Pour prouver que (4.a) est une équivalence, il suffit donc de prouver que (4.b) est une équivalence dans le cas où  $X$  est complet, donc excellent et  $\pi$  un morphisme local régulier.

D'après le théorème de Popescu ([Swan, 1998]), le morphisme régulier  $\pi$  est limite projective filtrante de morphismes locaux essentiellement lisses  $\pi_i : X'_i \rightarrow X$ . Notons que les  $X'_i$  sont strictement locaux et excellents comme  $X$ . Comme les  $X'_i$  sont cohérents, le foncteur section globale commute à la limite projective au sens de [SGA 4 VII 5.7] de sorte qu'il suffit de prouver le théorème pour les  $\pi_i$ .  $\square$

**4.3. Preuve de 4.2.1.** On suppose donc que  $\pi$  est un morphisme local essentiellement lisse de schémas excellents.

Si  $\mathcal{C}$  est discret, on invoque le théorème de changement de base par un morphisme (essentiellement) lisse pour conclure [SGA 4 XVI 1.2] : le (i) du théorème 4.2.1 est prouvé.

Supposons donc  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}, \mathbb{G})$ . On doit donc prouver pour conclure la preuve du théorème 4.2.1 la variante suivante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.1.1).

PROPOSITION 4.3.1. *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}' \hookrightarrow & \xrightarrow{j'} & \mathbb{X}' \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ \mathbb{U} \hookrightarrow & \xrightarrow{j} & \mathbb{X} \end{array}$$

où  $\pi$  est un morphisme essentiellement lisse de schémas excellents strictement locaux. On suppose que le fermé complémentaire  $Z = X - \mathbb{U}$  est  $c_2$  (c'est-à-dire sous ces hypothèses, que  $\mathbb{U}$  contient les points de codimension 1 (3.5)). Alors, le morphisme

$$\pi^* : H^0(X - \{x\}, j_* \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}, \mathbb{G})) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \pi^* j_* \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}, \mathbb{G}))$$

est une équivalence.

*Démonstration.* Comme  $X$  est excellent, le morphisme de normalisation  $p : X^\vee \rightarrow X$  est fini. Son image est donc fermée. Comme  $p$  est (ensemblément) dominant,  $p$  est surjectif. Comme  $p$  est surjectif, le foncteur

$$j_* \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}, \mathbb{G}) \rightarrow j_* p_* p^* \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}, \mathbb{G}) \stackrel{[\text{Giraud, 1971, III.2.1.5.7}]}{=} p_* j_*^\vee \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}^\vee, \mathbb{G})$$

est fidèle<sup>iv</sup>. D'après 6.4.1 et le théorème 4.2.1, (i), il suffit de prouver que la flèche

$$(4.a) \quad \pi^* : H^0(X - \{x\}, p_* j_*^\vee \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}^\vee, \mathbb{G})) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \pi^* p_* j_*^\vee \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}^\vee, \mathbb{G}))$$

est une équivalence.

Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'^\vee & \xrightarrow{\pi^\vee} & X^\vee \\ \downarrow p' & \square & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Comme  $p$  est fini (donc propre), on a  $\pi^* p_* = p'_* \pi^{\vee*}$  de sorte que 4.a s'identifie à la flèche d'image inverse

$$(4.b) \quad \pi^* : H^0(X^\vee - \{x\}^\vee, j_*^\vee \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}^\vee, \mathbb{G})) \rightarrow H^0(X'^\vee - (\pi^\vee)^{-1}\{x\}^\vee, \pi^{\vee*} j_*^\vee \underline{\text{Tors}}(\mathbb{U}^\vee, \mathbb{G})).$$

Notons que, la condition  $c_2$  ne dépendant que du normalisé, le complémentaire  $Z^\vee$  de  $\mathbb{U}^\vee$  est encore  $c_2$  dans  $X^\vee$ , et  $\mathbb{U}^\vee$  contient tous les points de codimension 1. On invoque alors le théorème de changement de base lisse de Gabber 4.1.1.  $\square$

<sup>iv</sup>On note  $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^\vee$  le foncteur d'image inverse par  $p$ .

#### 4.4. Comparaison à la complétion : cas des coefficients abéliens dans le cas non nécessairement noëthérien.

Le paragraphe suivant est une *esquisse* de démonstration de l'analogie du théorème 4.2.1 pour les coefficients abéliens. Le cas des schémas noëthériens est traité dans [Fujiwara, 1995]. Nous reproduisons ici fidèlement une lettre d'Ofer Gabber aux éditeurs (20 juin 2012).

Let  $(A, I) \rightarrow (A', I')$  be a map of henselian pairs with  $I$  finitely generated,  $I' = IA'$ ,  $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A'}$  ( $I$ -adic completions).  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $X' = \text{Spec}(A')$ ,  $\pi : X' \rightarrow X$ ,  $U = X - V(I)$ ,  $U' = X' - V(I')$ ,  $j : U \rightarrow X$ ,  $j' : U' \rightarrow X'$ .

**CTC** : For every torsion abelian sheaf  $F$  on  $U$ , the base change arrow  $\pi^* R^q j_* F \rightarrow R^q j'_* \pi^* F$  is an isomorphism for all  $q$ .

*Analogue of 4.2.1* (notations as there) : If  $F$  is a sheaf of  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules on  $U$  where  $n > 0$  is invertible on  $X$ , then  $\pi^* R^q j_* F \rightarrow R^q j'_* \pi^* F$  are isomorphisms.

This is reduced to CTC by the same argument.

*Sketch of proof of CTC using Zariski-Riemann spaces* : For comparing stalks we may assume  $A, A'$  strictly henselian and  $I$  a proper ideal, and we want

$$(*) \quad H^q(U, F) \xrightarrow{\sim} H^q(U', F).$$

We call a finitely generated ideal  $J \subset A$  containing a power of  $I$  *admissible*. We consider the admissible blow-ups  $\text{Bl}_J(X)$  which form a cofiltered category using  $X$ -scheme morphisms. In general there can be more than one  $X$ -morphism between two admissible blow-ups but if we restrict ourselves to  $J$ 's with  $V(J) = V(I)$  (set theoretically) (so that  $U$  is schematically dense in the blow-up), there is at most one. Define  $J \leq J'$  iff there is an  $X$ -morphism  $\text{Bl}_{J'}(X) \rightarrow \text{Bl}_J(X)$ . This is a filtered preorder. When  $V(J) \subset V(J')$ ,  $J \leq J'$  is equivalent to the condition that for some  $n > 0$  and ideal  $K$ ,  $J^n = JK$ . Thus we have an isomorphism of the preordered set of admissible  $J$ 's of full support in  $A$  and the corresponding set for  $A'$ . Let  $\text{ZRS}_I(X) = \varprojlim \text{Bl}_J(X)$  (a locally ringed space). For the closed point  $s$  of  $X$  we can consider the special fiber  $\text{ZRS}_I(X)_s$  and its étale topos, which for our purposes may be defined as the projective limit of the étale topoi  $(\text{Bl}_J(X)_s)_{\text{ét}}$  as in [SGA 4]. It has enough points by Deligne's theorem. The points are given by "geometric points" of  $\text{ZRS}_I(X)_s$  (i. e. a point and a choice of a separable closure of the residue field). For every admissible  $J$  we have

$$j_J : U \hookrightarrow \text{Bl}_J(X)$$

giving a spectral sequence (using proper base change)

$$(**) \quad H^p(\text{Bl}_J(X)_s, R^q j_{J*} F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F).$$

We pass to the limit using the general theory of [SGA 4 VI]. We get a spectral sequence  $(**)_{\text{lim}}$  involving cohomology on  $(\text{ZRS}_I(X)_s)_{\text{ét}}$ . Since the latter topos is the same for  $X'$ , to show  $(*)$  we use the morphism of the limit spectral sequence to reduce to stalks of the limits of the  $R^q j_{J*}$  sheaves.

Using the study in [Fujiwara, 1995] of the local rings of ZRS's and their henselizations, one reduces  $(*)$  to the case of local rings at geometric points of the special fibers of ZRS's. Thus we are reduced to the case  $A, A'$  are henselian and  $I$ -valuative. Say  $I = (\varphi)$ . Then  $A[\varphi^{-1}]$  is a henselian local ring with maximal ideal corresponding to  $\mathfrak{P} = \bigcap I^n$ , and  $A/\mathfrak{P}$  is a henselian valuation ring whose

valuation topology is the  $\varphi$ -adic one. In this case to prove  $(*)$  one reduces to the corresponding statement for  $\text{Frac}(A/P) \rightarrow \text{Frac}(A'/P')$ . In fact for  $K \rightarrow K'$  a dense embedding of henselian valued fields, if we choose separable closures  $K_{\text{sep}}, K'_{\text{sep}}$  and a map between them we have  $\text{Gal}(K'_{\text{sep}}/K') \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ , using forms of Krasner's lemma (cf. [Bourbaki, A.C., VI, §8, exercices 12, 14 a]).

Note : For admissible  $J, \text{Bl}_J(X') \rightarrow \text{Bl}_J(X)$  gives an isomorphism on  $I$ -adic completions (as in the discussion in the proof of 2.4.4) as for every  $m$  the map

$$\bigoplus_n J^n \rightarrow \bigoplus_n J^n A'$$

is an isomorphism mod  $I^m$ .

## 5. Rigidité de la ramification II : forme forte

**5.1. Générisations étales immédiates.** On note  $X_{(x)}, X_{(x)}^h$  et  $\widehat{X}_{(x)}$  les localisés, hensélisés et complétés respectivement de  $X$  en  $x$ . On note  $\overline{\{y\}}$  l'adhérence de  $y$  dans  $X$  munie de sa structure réduite. L'hensélisation et la complétion commutent aux immersions fermées de sorte que  $\overline{\{y\}}^h, \widehat{\overline{\{y\}}}$  respectivement coïncident avec l'image inverse de  $\overline{\{y\}}$  par les morphismes d'hensélisation, complétion respectivement. Rappelons (XIV-2.1.2) qu'une générisation  $y \in X$  d'un point  $x$  d'un schéma  $X$  est une *générisation étale immédiate* de  $x$  si l'hensélisé strict en  $\bar{x}$  de l'adhérence de  $y$  a une composante irréductible de dimension 1.

**LEMME 5.1.1.** *Soit  $y$  une générisation de  $x$ . Notons  $c : \widehat{X}_{(x)} \rightarrow X_{(x)}$  le morphisme de complétion. Alors,  $y$  est une générisation étale immédiate de  $x$  si et seulement si l'un des points maximaux de  $c^{-1}(y)$  est une générisation étale immédiate du point fermé de  $\widehat{X}_{(x)}$ .*

*Démonstration.* Notons pour simplifier  $Y = \overline{\{y\}}$ . Observons d'abord qu'un des trois schémas  $Y_{(x)}, Y_{(x)}^h$  et  $\widehat{Y}_{(x)}$  possède un point maximal de dimension nulle si et seulement si chacun est réduit (ensemblément) à son point fermé. On peut donc exclure ce cas. Le morphisme  $Y_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(x)}^h$  est fidèlement plat et entier. Donc, l'hensélisé strict possède un point maximal de dimension 1<sup>v</sup> si et seulement si l'hensélisé  $Y_{(x)}^h$  possède un point maximal de dimension 1. D'après (3.3),  $Y_{(x)}^h$  possède un point maximal de dimension 1 si et seulement si  $\widehat{Y}_{(x)}$  (3.3) possède un point maximal de dimension 1. Par platitude de  $c$ , il s'envoie nécessairement sur  $y$ , le point générique de  $Y$ .  $\square$

On peut caractériser agréablement les générisations étales immédiates.

**LEMME 5.1.2.** *Soit  $f : X_{(\bar{x})} \rightarrow X_{(x)}$  le morphisme d'hensélisation strict. Les générations étales immédiates de  $x$  sont les images  $y = f(y')$  des  $y' \in X_{(\bar{x})}$  tels que  $\dim \overline{\{y'\}} = 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $y' \in X_{(\bar{x})}$  tel que  $\dim \overline{\{y'\}} = 1$ . L'image  $y = f(y')$  est une générisation stricte de  $x$  (car par exemple les fibres de  $f$  sont discrètes). Pour cette même raison,  $\overline{\{y'\}}$  est une composante de  $f^{-1}(\overline{\{y\}}) = \overline{\{y'\}}_{(\bar{x})}$ . Inversement, si  $y$  est une générisation étale immédiate de  $x$ , le point générique  $y'$  d'une composante de dimension 1 de  $\overline{\{y\}}_{(\bar{x})}$  s'envoie sur  $y$  (platitude de  $f$ ) et son adhérence est de dimension 1.  $\square$

<sup>v</sup>On devrait plutôt dire point maximal dont l'adhérence est de dimension 1.

**EXEMPLE 5.1.3.** Prenons l'exemple du pincement de [ÉGA IV<sub>2</sub> 5.6.11]. En conservant les notations de *loc. cit.*, l'anneau pincé  $C$  est local noethérien de dimension 2 et son normalisé a deux idéaux maximaux de hauteur 1, 2 respectivement. D'après 3.2, l'hensélisé de  $C$  a deux composantes irréductibles de dimension 1 et 2 de points génériques  $c, c'$ . Comme dans la preuve de XIV-2.1.7, ceci assure l'existence de  $\bar{c}$  (au dessus de  $c$ ) dans l'hensélisé strict de  $C$  dont l'adhérence est de dimension 1 et donc que le point générique de  $\text{Spec}(C)$  est une générisation étale immédiate de son point fermé.

## 5.2. Couples associés et condition (\*). Commençons par une définition.

**DÉFINITION 5.2.1.** Soit  $x$  un point d'un schéma  $X$ . Choisissons une clôture séparable de  $k(x)$  définissant un point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ .

- (i) Soit  $G$  un schéma en groupes sur  $X$ . On définit les sections locales de  $G$  à support dans  $\bar{x}$  par la formule

$$H_{\bar{x}}^0(G) = \text{Ker}(H^0(X_{(\bar{x})}, G) \rightarrow H^0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}, G)).$$

- (ii) Soit  $\mathcal{C}$  un champ (en groupoïdes) sur  $X$  et  $p$  un nombre premier. On dit que  $(x, p)$  est associé de  $\mathcal{C}$  et on écrit  $(x, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$  si il existe  $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{x}}$  tel que  $H_{\bar{x}}^0(\underline{\text{Aut}}(\sigma))$  ait de la  $p$ -torsion.
- (iii) Soit  $\mathcal{C}$  un champ ind-fini (en groupoïdes) sur un ouvert  $U$  de  $X$ . On dit que  $\mathcal{C}$  vérifie la condition (\*) si pour tout  $x \in X - U$  de caractéristique  $p > 0$ , il n'existe pas de générisation étale immédiate  $y$  de  $x$  telle que  $(p, y) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ .

Remarquons que la condition  $(x, p)$  associé ne dépend pas du choix de la clôture séparable de  $k(x)$ .

**EXEMPLE 5.2.2.** Supposons  $X$  normal et  $G$  groupe fini. Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . Alors,  $(x, p)$  est associé de  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(U, G)$  si et seulement si  $p \mid \text{card}(G)$  et  $x$  est un point maximal de  $U$ . En effet, l'unique objet de  $\mathcal{C}_{\bar{x}}$  est le torseur trivial  $\sigma$  et  $\underline{\text{Aut}}(\sigma) = G$ . Or,  $X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$  est connexe (resp. vide) si  $x$  non maximal (resp. maximal). Ainsi, on a  $H_{\bar{x}}^0(\underline{\text{Aut}}(\sigma)) = \{1\}$  (resp.  $H_{\bar{x}}^0(\underline{\text{Aut}}(\sigma)) = G$ ). On déduit que  $\mathcal{C}$  vérifie (\*) si et seulement si  $U$  contient tous les points de codimension 1 dont la caractéristique divise l'ordre de  $G$ .

**LEMME 5.2.3.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme plat de schémas noethériens,  $x \in X$  d'image  $y = f(x)$  dans  $Y$  et  $\mathcal{C}$  un champ en groupoïdes sur  $Y$ . Alors,  $(x, p) \in \text{Ass}(f^*\mathcal{C})$  si et seulement si  $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$  et  $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$ .

*Démonstration.* Choisissons un point géométrique  $\bar{x}$  au dessus de  $x$ , qui définit  $\bar{y}$  au dessus de  $y$ .

Supposons  $(x, p) \in \text{Ass}(f^*\mathcal{C})$ . Comme la flèche  $(f^*\mathcal{C})_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{C}_{\bar{y}}$  est une équivalence, il existe  $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{y}}$  et  $g \in \text{Aut}(\sigma)$  tel que  $f^*g$  est d'ordre de  $p$  et de support  $\{\bar{x}\}$ . Notons  $F$  l'hensélisé strict de  $f^{-1}(y)$  en  $\bar{x}$ . C'est aussi la fibre de l'hensélisé  $\varphi : X_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$  de  $f$  au dessus de  $\bar{y}$ . Si  $F$  n'était pas réduit à  $\bar{x}$ , un des points de  $F$  ne serait pas dans le support de  $f^*g$  de sorte que  $f^*g$  serait l'identité en ce point. Mais  $f^*g$  est constant sur  $F = \varphi^{-1}(\bar{y})$  de sorte que  $f^*g$  serait l'identité également en  $\bar{x} \in F$ , ce qui n'est pas. Donc,  $F$  est réduit à  $\bar{x}$  de sorte que  $\dim \mathcal{O}_{f^{-1}(y), x} = 0$  (puisque un anneau local a même dimension que son hensélisé strict) et  $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$ . De plus,  $g$  est trivial sur  $\varphi(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}) = Y_{(\bar{y})} - \{\bar{y}\}$  (fidèle platitude de  $\varphi$ ) ce qui assure  $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$ .

Inversement, supposons  $(y, p) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$  et  $x \in \text{Max}(f^{-1}(y))$ . On a donc un automorphisme  $g$  d'ordre  $p$  de  $\sigma \in \mathcal{C}_{\bar{y}}$  de support  $\{\bar{y}\}$ . Le support de  $\varphi^*g$  est la fibre  $\phi^{-1}(\bar{y}) = f^{-1}(y)_{(\bar{x})}$ . Comme  $x$  est maximal dans  $f^{-1}(y)$ , on déduit (dimension) que le schéma local  $\phi^{-1}(\bar{y})$  est de dimension nulle donc réduit à  $\bar{x}$ , ce qu'on voulait.  $\square$

**COROLLAIRE 5.2.4.** *Soit  $(X, x)$  un schéma local noethérien hensélien,  $U = X - \{x\}$  l'ouvert complémentaire du point fermé et  $c : \widehat{X} \rightarrow X$  le morphisme de complétion. Alors, le champ en groupoïdes  $\mathcal{C}$  sur  $U$  vérifie (\*) si et seulement  $\widehat{\mathcal{C}} = c^*\mathcal{C}$  vérifie (\*).*

*Démonstration.* On note encore  $x$  le point fermé de  $\widehat{X}$  et on choisit un point géométrique  $\bar{x}$  au dessus de  $x$ .

Supposons que  $\widehat{\mathcal{C}}$  vérifie (\*). Soit  $(y, p = \text{car}(x)) \in \text{Ass}(\mathcal{C})$  et notons  $Y$  l'adhérence de  $y$  dans le localisé (Zariski) de  $X$  en  $x$ . Il s'agit de montrer que toutes les composantes de  $Y_{(\bar{x})}$  sont de dimension  $\geq 2$ , ou encore (3.3) que toutes les composantes de  $\widehat{Y} = \widehat{Y}_{(\bar{x})}^n$  sont dimension  $\geq 2$ , c'est-à-dire (3.3 à nouveau), que toutes les composantes de  $\widehat{Y}_{(x)}$  sont de dimension  $\geq 2$ . Mais c'est bien le cas car, d'après le lemme 5.2.3, on a  $(\hat{y}, p) \in \text{Ass}(\widehat{\mathcal{C}})$ .

Inversement, supposons que  $\mathcal{C}$  vérifie (\*). Soit donc  $(\hat{y}, p = \text{car}(x)) \in \text{Ass}(\widehat{\mathcal{C}})$  et soit  $y = c(\hat{y})$  et supposons que l'adhérence de  $\hat{y}$  est de dimension 1. Si une des composantes  $Y = \overline{\{y\}}$  était de dimension  $> 1$ , toutes les composantes de  $\widehat{Y} = c^{-1}(Y)$  seraient de dimension  $> 1$  (3.3). D'après le lemme 5.2.3, on sait que  $\hat{y}$  est maximal dans  $c^{-1}(y)$  donc dans  $\widehat{Y}$  de sorte que  $\dim \overline{\{\hat{y}\}} > 1$ , une contradiction.  $\square$

### 5.3. Le théorème de rigidité de la ramification.

**THÉORÈME 5.3.1** (Rigidité de la ramification II). *Soit  $\pi : X' \rightarrow X$  un morphisme plat de schémas noethériens, régulier au dessus d'un sous-schéma fermé  $Z \subset X$ . Soit  $j : U = X - Z \hookrightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire de  $Z$  et  $\mathcal{C}$  un champ ind-fini sur  $U$  vérifiant la condition (\*). Alors, la flèche de changement de base  $\pi^*j_*\mathcal{C} \rightarrow j'_*\pi'^*\mathcal{C}$  est une équivalence.*

*Démonstration.* D'après le théorème de rigidité de la ramification I (4.2.1), le théorème est vrai dans le cas discret de sorte que  $\pi^*j_*\mathcal{C} \rightarrow j'_*\pi'^*\mathcal{C}$  est toujours pleinement fidèle. Comme dans la preuve de 4.2.1, on peut supposer  $X, X'$  strictement locaux de point fermés  $x, x'$  et  $\pi$  morphisme local. Par récurrence sur la dimension de  $X$ , on peut supposer que le changement de base par  $\pi$  est une équivalence pour l'immersion  $U \hookrightarrow X - \{x\}$  de sorte qu'on peut supposer  $U = X - \{x\}$ . Comme dans la preuve de 4.2.1 et en utilisant l'invariance par complétion de la condition (\*) (5.2.4), on peut supposer de plus  $X$  complet et  $\pi$  morphisme essentiellement lisse et local et il s'agit de démontrer que la flèche

$$\pi^* : H^0(X - \{x\}, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathcal{C}')$$

est essentiellement surjective (puisque en tout point  $y' \neq x'$  la fibre du changement de base est une équivalence par hypothèse).

Soit donc  $\sigma'$  un objet de  $H^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathcal{C}')$ . La condition (\*) étant stable par passage aux sous-gerbes (maximales), on peut comme dans la preuve de 6.4.2 en considérant la sous-gerbe maximale de  $\mathcal{C}'$  engendrée par  $\sigma'$ , supposer de plus que  $\mathcal{C}$  est une gerbe. Comme  $\mathcal{C}$  est ind-finie, on peut supposer que  $\mathcal{C}$  est *construc-*

Pour tout point maximal  $y \in U$ , notons  $i_y$  le morphisme canonique

$$i_y : \text{Spec}(k(y)) \rightarrow U = X - \{x\}.$$

Soit

$$\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} := \prod_{y \in \text{Max}(U)} i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$$

le morphisme déduit des morphismes d'adjonction. La catégorie fibre de  $i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$  sur un ouvert étale  $V \rightarrow X$  s'identifie aux sections rationnelles de  $\mathcal{C}$  définies au voisinage (Zariski) des points maximaux de  $V$  au dessus de  $y$ . On déduit que  $\Psi$  est conservatif et couvrant (étale localement surjectif sur les flèches et les objets). Pour toute section  $\tau \in H^0(U, \mathcal{D})$  (vu comme un morphisme de  $U$ -espaces  $\tau : U \rightarrow \mathcal{D}$ ), le champ des relèvements  $K(\tau) = U \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$  associé est donc une gerbe ([Giraud, 1971, IV.2.5.4]), évidemment constructible.

Il suffit alors (exercice) de vérifier que la flèche de changement de base est essentiellement surjective pour

- 1) les gerbes  $\mathcal{G} = i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$  ;
- 2) la gerbe des relèvements  $K(\tau) = U \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$  associée à  $\tau \in H^0(U, \mathcal{D})$ .

**5.3.2. Premier cas : changement de base pour  $\mathcal{G} = i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$ .** Supposons donc  $\mathcal{G} = i_{y*} i_y^* \mathcal{C}$ . Quitte à changer  $X, U$  en  $\overline{\{y\}}, U \cap \overline{\{y\}}$ , on peut supposer que  $X$  est irréductible de point générique  $y$ .

Si la dimension de  $X$  est 1, on a  $U = \{y\}$  et  $\mathcal{G}_y = \underline{\text{Tors}}(\text{Spec}(\overline{k(y)}), G)$  avec  $p = \text{car}(y)$  ne divisant pas l'ordre de  $G$  (cf. l'argument dans l'exemple 5.2.2). On invoque alors le changement de base par un morphisme lisse usuel ([Giraud, 1971, VII.2.1.2]).

On suppose donc que la dimension de  $X$  est  $> 1$ .

Choisissons une clôture séparable  $k(y) \hookrightarrow k_y$  et notons  $j_y : \text{Spec}(k_y) \rightarrow U$  est le morphisme canonique. On a

$$j_y^* \mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(\text{Spec}(k_y), G)$$

où  $G$  est un groupe fini constant. Comme

$$i_{y*} i_y^* \mathcal{C} \rightarrow j_{y*} j_y^* \mathcal{C}$$

est fidèle, on peut (6.4.1) remplacer  $\mathcal{G}$  par  $j_{y*} j_y^* \mathcal{C} = j_{y*} \underline{\text{Tors}}(\text{Spec}(k_y), G)$ .

**LEMME 5.3.3.** *On a  $R^1 j_{y*} G = \{*\}$  et  $j_{y*} \underline{\text{Tors}}(\text{Spec}(k_y), G) = \underline{\text{Tors}}(U, j_{y*} G)$ .*

*Démonstration.* La seconde égalité découle de la première et de la formule ([Giraud, 1971, V.3.1.5])

$$\pi_0(j_{y*} \underline{\text{Tors}}(\text{Spec}(k_y), G)) = R^1 j_{y*} G.$$

Soit  $\tilde{A}$  l'hensélisé strict de  $X = \text{Spec}(A)$  en un point géométrique  $\bar{\xi}$  de  $X$ . C'est une limite inductive filtrante d'algèbres  $A_i$  de type finies qui sont génériquement étales. On déduit que  $j_y^{-1}(\text{Spec}(\tilde{A}))$  est le spectre de la limite inductive filtrante des algèbres étales  $B_i = k_y \otimes_{k(y)} A_i$  qui sont donc scindées puisque  $k_y$  est séparablement clos. Ainsi, les schémas considérés étant cohérents, on a

$$(R^1 j_{y*} G)_{\bar{\xi}} = H^1(j_y^{-1}(\text{Spec}(\tilde{A})), G) = \varinjlim H^1(\text{Spec}(B_i), G) = \{*\}.$$

□

En terme de module galoisien,  $j_{y*}G$  est l'induite (continue)  $\text{Hom}_c(\Gamma, G)$  où  $\Gamma$  est le groupe profini  $\text{Gal}(k_y/k(y))$ . En écrivant  $\Gamma = \text{colim Gal}(K_\alpha/k(y))$  où  $(K_\alpha/k(y))_\alpha$  est le système inductif des sous-extensions galoisiennes finies de  $k_y/k(y)$ , on trouve

$$j_{y*}G = \text{colim} j_{\alpha*}G$$

où  $j_\alpha : \text{Spec}(K_\alpha) \rightarrow \text{Spec}(k(y)) \rightarrow U$  est le morphisme canonique. Comme  $U, U'$  sont noethériens donc cohérents, on a

$$H^0(U, \underline{\text{Tors}}(U, \text{colim} j_{\alpha*}G)) = \text{colim} H^0(U, \underline{\text{Tors}}(U, j_{\alpha*}G))$$

et

$$H^0(U', \pi^* \underline{\text{Tors}}(U, \text{colim} j_{\alpha*}G)) = H^0(U', \underline{\text{Tors}}(U', \pi^* \text{colim} j_{\alpha*}G)) = \text{colim} H^0(U', \underline{\text{Tors}}(U', \pi^* j_{\alpha*}G))$$

de sorte qu'on est réduit pour le cas 1) à étudier le changement de base pour la gerbe  $\mathcal{G}_\alpha = \underline{\text{Tors}}(U, j_{\alpha*}G)$ .

Soit  $p : W \rightarrow X$  la normalisation de  $X$  dans  $\text{Spec}(K_\alpha) \rightarrow X$  : c'est un morphisme fini (car  $X$  est excellent) et surjectif de sorte que  $W$  est semi-local et hensélien (comme  $X$ ). On déduit que  $W$  est la réunion disjointe de ses hensélisés aux points fermés. Comme  $W$  est intègre,  $W$  est strictement local : on note  $w$  son point fermé  $w$ . De plus,  $W$  est normal, donc géométriquement unibranche de sorte que  $j_{\alpha*}G = p_*G_{|W-w}$ . Comme  $R^1p_*G$  est trivial ( $p$  est fini), on déduit l'égalité

$$\mathcal{G}_\alpha = p_* \underline{\text{Tors}}(W - \{w\}, G)$$

comme dans la preuve du lemme 6.5.3 *infra*.

En utilisant le changement de base propre pour  $p$ , on est ramené à prouver que la flèche

$$\text{Tors}(W - \{w\}, G) \rightarrow \text{Tors}(W' - \pi^{-1}\{w\}, G)$$

est une équivalence. Deux cas se présentent.

Rappelons qu'on a supposé que la dimension de  $X$  (ou  $W$ , c'est la même chose) est  $> 1$ . Dans ce cas,  $\{w\}$  est  $c_2$  dans  $W$  et on invoque la variante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.3.1).

**5.3.4. Deuxième cas : changement de base pour la gerbe des relèvements**  $K = K(\tau)$ . Comme le morphisme  $K(\tau) \rightarrow \mathcal{C}$  est visiblement fidèle ([Giraud, 1971, IV.2.5.2]), la gerbe des relèvements vérifie (\*) comme  $\mathcal{C}$ . Comme  $\Psi_{\bar{y}}$  est une équivalence pour tout point maximal  $\bar{y} \in U$ , on déduit que  $K_{\bar{y}}$  est la gerbe triviale (autrement dit équivalente au faisceau d'ensembles ponctuels) en tous ces points. Par hypothèse de récurrence, il suffit pour achever la preuve de prouver le lemme suivant.

**LEMME 5.3.5.** *Il existe une immersion fermée  $i : F \subset X$  nulle part dense telle que  $K = i_*i^*K$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver que pour tout  $y$  maximal, il existe un ouvert de Zariski contenant  $y$  sur lequel  $K$  est triviale. Par construction, il existe un voisinage étale  $V \rightarrow X$  de  $y$  et  $\sigma \in K(V)$ . Comme  $\underline{\text{Aut}}(\sigma)$  est un faisceau constructible de  $V_{\text{ét}}$ , l'isomorphisme

$$\{\text{Id}\}_{\bar{y}} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}(\sigma)_{\bar{y}}$$

provient d'un isomorphisme

$$\{\text{Id}\}_W \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}(\sigma)_W$$



sur un voisinage étale  $W \rightarrow V \rightarrow X$  de  $y$ . Quitte à localiser, on peut supposer que  $W \rightarrow X$  est un revêtement galoisien de son image  $U \subset X$ . La section  $\sigma$  descend sur  $U$  et n'a pas d'automorphisme par construction, ce qu'on voulait.  $\square$

$\square$

## 6. Appendice 1 : sorites champêtres

D'après 2.1.1 i), on sait déjà que le foncteur  $H^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(\widehat{U}, p^*\mathcal{C})$  est pleinement fidèle que  $\mathcal{C}$  soit ind-fini ou non.

Soit  $\mathcal{C}$  un champ ind-fini sur  $Y$ . On cherche des conditions assurant que l'hypothèse

**HYPOTHÈSE 6.1.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles  $\mathcal{F}$  sur  $Y$ , la flèche  $H^0(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{F})$  est bijective.

entraîne que la conclusion

**CONCLUSION 6.2.** La flèche  $\phi : H^0(Y, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{C})$  est une équivalence de catégories.

est vraie, autrement dit assurant que l'assertion

**ASSERTION 6.3.** On a l'implication 6.1  $\Rightarrow$  6.2.

est vraie. On sait déjà que 6.1 entraîne que  $\phi$  est pleinement fidèle (cf. 2.1).

**6.4. Premières réductions.** Commençons par un lemme formel :

**LEMME 6.4.1.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas et  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  un morphisme de champs sur  $Y$  qu'on suppose fidèle. Si 6.3 est vraie pour  $\mathcal{C}_2$ , alors 6.3 est vraie pour  $\mathcal{C}_1$ .

*Démonstration.* On a déjà observé (2.1) que  $\phi$  est pleinement fidèle. Soit donc

$$c_1^X \in H^0(X, f^*\mathcal{C}_1) = \text{Hom}_X(X, f^*\mathcal{C}_1)$$

dont on cherche un antécédent dans  $H^0(Y, \mathcal{C}_1)$ . Son image

$$c_2^X \in H^0(X, f^*\mathcal{C}_2)$$

a un antécédent (à isomorphisme près)

$$c_2^Y \in H^0(Y, \mathcal{C}_2).$$

Le couple  $(c_1^X, c_2^X = f^*c_2^Y)$  définit une section de la gerbe des relèvements

$$K(f^*c_2^X) = X \times_{f^*\mathcal{C}_1} f^*\mathcal{C}_2.$$

D'après [Giraud, 1971, V.1.4.3], la gerbe  $K(f^*c_2^X) = X \times_{f^*\mathcal{C}_1} f^*\mathcal{C}_2$  s'identifie à

$$f^*K(c_2^X) = f^*(Y \times_{\mathcal{C}_1} \mathcal{C}_2).$$

Or,  $K(c_2^X)$  est un faisceau d'ensembles car  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  est fidèle. Donc,  $(c_1^X, c_2^X = f^*c_2^Y) \in H^0(X, f^*K(c_2^X))$  a un unique antécédent de la forme  $(c_1^Y, c_2^Y)$  et  $c_1^Y$  est bien l'antécédent cherché.  $\square$

**LEMME 6.4.2.** Si 6.3 est vrai pour toute gerbe (resp. toute gerbe ind-finie), alors 6.3 est vrai pour tout champ (resp. tout champ ind-fini).

*Démonstration.* Soit  $t \in H^0(X, f^*\mathcal{C})$  et  $\gamma_t \subset f^*\mathcal{C}$  la sous-gerbe maximale engendrée par  $t$  dans  $f^*\mathcal{C}$  ([Giraud, 1971], III.2.1.3.2)<sup>vi</sup>. Ceci définit une section  $\tau \in \pi_0(f^*\mathcal{C})$  du faisceau d'ensembles  $\pi_0(f^*\mathcal{C})$  des sous-gerbes maximales de  $f^*\mathcal{C}$  (*loc. cit.*, 2.1.4). D'après *loc. cit.*, 2.1.5, la flèche naturelle

$$\pi_0(f^*\mathcal{C}) \rightarrow f^*\pi_0(\mathcal{C})$$

est bijective. Mais, par hypothèse, la flèche

$$H^0(Y, \pi_0(\mathcal{C})) \rightarrow H^0(X, f^*\pi_0(\mathcal{C})) = H^0(X, \pi_0(f^*\mathcal{C}))$$

est bijective de sorte qu'il existe une (unique) sous-gerbe (maximale)  $\gamma \subset \mathcal{C}$  telle que  $f^*\gamma = \gamma_t$ , qui sera ind-finie si  $\mathcal{C}$  l'est. L'image dans  $H^0(Y, \mathcal{C})$  de l'antécédent de  $t \in H^0(X, f^*\gamma)$  dans  $H^0(Y, \gamma)$  est l'antécédent cherché.  $\square$

### 6.5. Réduction au cas d'un champ de toiseurs sous un groupe fini constant.

Admettons pour un instant le résultat suivant, généralisation au cas des champs de la résolution flasque de Godement.

**LEMME 6.5.1** (Lemme d'effacement). *Soit  $\gamma$  une gerbe ind-finie sur un schéma cohérent  $X$ . Il existe un groupe ind-fini  $\mathcal{G}$  sur  $X$  et un foncteur fidèle  $\gamma \hookrightarrow \underline{\text{Tors}}(X, \mathcal{G})$ .*

On peut alors prouver le critère suivant

**PROPOSITION 6.5.2.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas cohérents. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles  $\mathcal{F}$  sur  $Y$ , la flèche  $H^0(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{F})$  est bijective (6.1). On suppose en outre que pour tout morphisme fini  $p : Y' \rightarrow Y$  induisant  $f' : X' = X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  et tout groupe fini constant  $G$ , la flèche  $\text{Tors}(Y', G) \rightarrow \text{Tors}(X', G)$  est une équivalence. Alors, pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$  sur  $Y$ , la flèche  $H^0(Y, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{C})$  est une équivalence.*

*Démonstration.* Seule l'essentielle surjectivité pose problème. Les lemmes d'effacement, 6.4.1 et 6.4.2 permettent de supposer que  $\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(Y, \mathcal{G})$  où  $\mathcal{G}$  est un groupe ind-fini sur  $Y$ . Comme  $X, Y$  sont cohérents, la cohomologie non abélienne commute aux limites inductives filtrantes [SGA 4 VII remarque VII.5.14]. Comme  $\mathcal{G}$  est ind-fini, il est limite inductive filtrante de faisceaux en groupes constructibles [SGA 4 IX 2.7.2] : on peut donc supposer  $\mathcal{G}$  constructible. Puisque  $Y$  est cohérent, il existe (*loc. cit.*, 2.14) une famille finie de morphismes finis  $p_i : Y_i \rightarrow Y$  et des groupes finis constants  $G_i$  tels que  $\mathcal{G}$  se plonge dans le produit  $\prod p_{i*}G_i$ . On a donc un morphisme fidèle

$$\underline{\text{Tors}}(Y, \mathcal{G}) \hookrightarrow \underline{\text{Tors}}(Y, \prod p_{i*}G_i) = \prod \underline{\text{Tors}}(Y, p_{i*}G_i)$$

grâce à [Giraud, 1971], III.2.4.4.

Utilisant à nouveau 6.4.1, on peut supposer

$$\mathcal{C} = \underline{\text{Tors}}(Y, p_*G)$$

avec  $G$  groupe fini constant et  $p : Y' \rightarrow Y$  fini.

**LEMME 6.5.3.** *On a  $\underline{\text{Tors}}(Y, p_*G) = p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)$ .*

*Démonstration.* Comme  $p$  est fini,  $R^1p_*G$  est trivial. Mais  $\pi_0(p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) = R^1p_*G$  ([Giraud, 1971], V.3.1.9.1) de sorte que  $p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)$  est une gerbe, visiblement neutre et vaut donc nécessairement  $\underline{\text{Tors}}(Y, p_*G)$ .  $\square$

<sup>vi</sup>Dans *loc. cit.*,  $\pi_0(\mathcal{C})$  est noté  $\text{Ger}(\mathcal{C})$ , qui n'est pas actuellement la notation standard.

Le théorème de changement de base propre pour les faisceaux (trivial dans ce cas) assure qu'on a  $f^*p_*G = p'_*f'^*G = p'_*G$ . La flèche

$$H^0(Y, p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \rightarrow H^0(X', f^*p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G))$$

s'identifie alors à la flèche naturelle

$$\begin{aligned} \text{Tors}(Y', G) &= H^0(Y, p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \\ &\rightarrow H^0(X, f^*p_*\underline{\text{Tors}}(Y', G)) \\ &= H^0(X, \underline{\text{Tors}}(X, f^*p_*G)) \quad (\text{d'après 6.5.3 et [Giraud, 1971, III.2.1.5.7]}) \\ &= H^0(X, \underline{\text{Tors}}(X, p'_*G)) \\ &= H^0(X', p'_*\underline{\text{Tors}}(X', G)) \\ &= H^0(X', \underline{\text{Tors}}(X', G)) \\ &= \text{Tors}(X', G) \end{aligned}$$

qui est bijective par hypothèse. □

### 6.6. Preuve du lemme d'effacement. Soit $X$ un schéma cohérent.

**LEMME 6.6.1.** *Il existe un schéma affine  $X'$ , un morphisme quasi-compact et surjectif  $f : X' \rightarrow X$  tel que pour tout  $x' \in X'$ , le corps résiduel  $k(x')$  est la clôture algébrique du corps résiduel  $k(f(x'))$ .*

*Démonstration.* Comme  $X$  est quasi-compact, on peut recouvrir  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines  $X_i$ . Le morphisme  $f : \sqcup X_i \rightarrow X$  est surjectif et quasi-compact ( $X$  est quasi-séparé). Comme toutes les extensions résiduelles sont des isomorphismes, on peut donc supposer  $X = \text{Spec}(A)$  affine quitte à changer  $X$  en  $\sqcup X_i$ .

**SOUS-LEMME 6.6.2.** Soient  $I$  l'ensemble des polynômes unitaires (non constants) de  $A[X]$  et

$$T'(A) = A[X_P, P \in I]/(P(X_P))$$

et

$$f : X' = \text{Spec } T'(A) \rightarrow X = \text{Spec } A.$$

Le morphisme  $f$  est surjectif et, pour tout  $\xi \in X'$ , le corps résiduel  $k(\xi)$  est la clôture algébrique de  $k(f(\xi))$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in X$  et  $\overline{k(x)}$  une clôture algébrique de  $k(x)$ . La fibre schématique  $f^{-1}(x)$  est le spectre de

$$B = k(x)[X_P, P \in I]/(\tilde{P}(X_P))$$

où  $\tilde{P}$  désigne l'image de  $P \in I$  par le morphisme de localisation des coefficients

$$A[X] \rightarrow k(x)[X].$$

Le choix de racines  $x_P \in \overline{k(x)}$  pour tous les polynômes  $P$  de  $I$  définit un point de  $f^{-1}(x)$  assurant la surjectivité de  $f$ .

Soit alors  $\xi \in f^{-1}(x)$  : c'est un point fermé car  $f$  est entier et  $k(\xi)$  est algébrique sur  $k(x)$ . Soit  $Q$  un polynôme unitaire de  $k(x)$  de degré  $d > 0$ . Il existe  $a \in A$  d'image  $a(x)$  non nulle dans  $k(x)$ , un polynôme unitaire  $P \in I$  et un entier  $n > 0$  tel que

$$s^{nd}Q(X) = P(s^nX).$$

On déduit que l'image  $X_P/s^n$  dans  $k(\xi)$  est une racine de  $Q$ . Comme  $k(\xi)$  est algébrique sur  $k(x)$ , ceci assure que  $k(\xi)$  est une clôture algébrique de  $k(x)$ . (C'est un exercice (facile) de théorie de Galois ou [Bourbaki, A., V, §10, exercice 20].) □

Comme  $f$  est quasi-compact puisqu'affine, le lemme est prouvé.  $\square$

Dans un second temps, rappelons la construction de la topologie constructible sur  $X$  (cf. [ÉGA IV<sub>3</sub>]).

REMARQUE 6.6.3. Pour notre propos, on ne l'utilisera en fait que pour le schéma affine  $X'$ .

On construit l'espace topologique  $X^{\text{cons}}$  dont l'ensemble sous-jacent coïncide avec l'ensemble sous-jacent  $|X|$  de  $X$  mais dont les ouverts (resp. fermés) sont les parties ind (resp. pro)-constructibles, à savoir les réunions (resp. intersections) de parties constructibles. Comme  $X$  est cohérent,  $X$  est un espace topologique compact, totalement discontinu ([ÉGA IV<sub>1</sub> 1.9.15]). De plus, la cohérence de  $X$  entraîne que les parties constructibles sont alors les réunions finies d'intersection  $U \cap (X - V)$  avec  $U, V$  ouverts quasi-compacts ([ÉGA III<sub>1</sub> 9.1.3] et [ÉGA IV<sub>1</sub> 1.2.7]). Le complémentaire de  $U \cap (X - V)$  étant  $(X - U) \cup V$ , il est donc également ouvert dans  $X^{\text{cons}}$  de sorte que  $X$  admet une base d'ouverts compacts.

L'identité de  $|X|$  induit une application continue  $X^{\text{cons}} \rightarrow X$  puisqu'un fermé est pro-constructible. Si  $X = \text{Spec}(A)$  est affine,  $X^{\text{cons}}$  est naturellement homéomorphe au spectre d'une certaine  $A$ -algèbre  $T(A)$  pour un certain endo-foncteur  $T$  de la catégorie des anneaux ([Olivier, 1968], proposition 5). Cet homéomorphisme est compatible à la localisation de sorte que ces structures schématiques se recollent munissant  $X^{\text{cons}}$  d'une structure naturelle de  $X$ -schéma relativement affine compatible avec l'application continue (identique!)  $X^{\text{cons}} \rightarrow X$ . Si  $x \in |X|$ , on a  $\mathcal{O}_x = k(x)$ .

On définit alors

$$f : X^c \rightarrow X$$

comme le composé

$$f : X^c = (X')^{\text{cons}} \rightarrow X' \rightarrow X.$$

Par construction,  $X^c$  est compact -en particulier cohérent- (réduit), totalement discontinu et admet une base de voisinages ouverts-compacts (qui sont donc ouverts-fermés puisque  $X^c$  est compact donc topologiquement séparé). Ses corps résiduels sont algébriquement clos et  $f$  est quasi-compact<sup>vii</sup> et surjective (comme composé de morphismes quasi-compacts).

Rappelons que le faisceau vide sur un espace topologique est le faisceau associé au préfaisceau de valeur constante  $\emptyset$ . L'ensemble de ses sections sur tout ouvert non vide est  $\emptyset$  et est réduit à un point sur l'ouvert vide.

LEMME 6.6.4. *Tout morphisme étale  $f : Y \rightarrow X^c$  est Zariski localement trivial. En particulier, le morphisme canonique de topos  $(\epsilon^{-1}, \epsilon_*) : X_{\text{ét}}^c \rightarrow X_{\text{Zar}}^c$  est une équivalence d'inverse  $(\epsilon^{-1}, \epsilon_*)$ . Tout faisceau ayant des sections localement à des sections globales. De plus, tout torseur sur  $X^c$  est trivial et toute gerbe est neutre.*

*Démonstration.* Soit  $y \in Y$  d'image  $x \in X^c$ . Comme  $f$  est quasi-fini et  $k(x)$  algébriquement clos, l'inclusion  $k(x) \hookrightarrow k(y)$  est une égalité. Le morphisme composé

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_x) = \text{Spec}(k(x)) = \text{Spec}(k(y)) \rightarrow Y$$

se prolonge au voisinage de  $f$  en une section locale de  $f$  ce qui prouve le premier point.

<sup>vii</sup>On appliquera ici cette construction à un ouvert (quasi-compact) d'un schéma affine, donc à un schéma séparé de sorte que  $f$  sera même affine dans ce cas.

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau (Zariski ou étale, c'est la même chose) sur  $X^c$ . Il est donc Zariski localement trivial. Comme  $X^c$  est compact, on peut trouver un recouvrement fini par des ouverts compacts  $U_i$  sur lesquels  $\mathcal{F}$  a une section. On montre par récurrence sur le nombre d'ouverts qu'on peut raffiner ce recouvrement en un recouvrement fini  $V_j$  par des ouverts compacts disjoints. Comme pour tout  $j$  il existe  $i$  tel que  $V_j \subset U_i$ , le faisceau  $\mathcal{F}$  a des sections locales sur chaque  $V_j$ . Ces ouverts étant disjoints, ces sections se recollent en une section globale. Le reste suit car tout torseur (resp. toute gerbe) sur  $X^c$  a des sections localement.  $\square$

La preuve du lemme d'effacement est alors facile. Soit  $\gamma$  une gerbe ind-finie sur  $X$ . Le foncteur d'adjonction

$$\gamma \rightarrow f_* f^* \gamma$$

est fidèle car  $f$  est surjectif. La gerbe  $f^* \gamma$  ([Giraud, 1971], III.2.1.5.6) est neutre et ind-finie (6.6.4) de sorte qu'elle est équivalente à  $\underline{\text{Tors}}(X^c, G^c)$  pour un ind-groupe  $G^c$  convenable. Par ailleurs, comme on a déjà vu ([Giraud, 1971], V.3.1.9.1), le faisceau des sous-gerbes maximales  $\pi_0(f_* \underline{\text{Tors}}(X^c, G^c))$  s'identifie à  $R^1 f_* G^c$ .

**LEMME 6.6.5.** *Le faisceau  $R^1 f_* G^c$  est trivial.*

*Démonstration.* Soit  $U \rightarrow X$  un morphisme étale. Comme dans la preuve de 6.6.4,  $X_U^c \rightarrow X^c$  est étale et donc un isomorphisme local pour la topologie de Zariski car les corps résiduels de  $X^c$  sont algébriquement clos. On en déduit que les topos étale et Zariski de  $X_U^c$  sont équivalents. Tout  $G^c$ -torseur étale sur  $X_U^c$  provient donc d'un tosseur Zariski. Comme  $X_U^c \rightarrow X^c$  est un isomorphisme local,  $X_U^c$  a une base d'ouverts-fermés et donc est séparé. Comme  $X_U^c$  est quasi-compact (puisque  $f$  est quasi-compact et  $U$  quasi-compact comme  $X$ ), l'espace topologique sous-jacent de  $X_U^c$  est de plus compact. On déduit comme dans 6.6.4 que tout tosseur sur  $X_U^c$  est trivial  $H^1(X_U^c, G^c) = \{*\}$ . En passant à la limite (on n'utilise pas ici la cohérence de  $f$ ), on trouve que les fibres de  $R^1 f_* G^c$  sont triviales.  $\square$

D'après le lemme,  $\pi_0(f_* \underline{\text{Tors}}(X^c, G^c))$  est le faisceau ponctuel ce qui assure que  $f_* \underline{\text{Tors}}(X^c, G^c)$  est une gerbe. Comme elle a une section, elle est neutre de groupe  $G = f_* G^c$  et s'identifie donc à  $\underline{\text{Tors}}(X, G)$ . Mais  $f$  est quasi-compact de sorte que  $G$  est ind-fini comme  $G^c$  [SGA 4 IX 1.6]. La preuve du lemme d'effacement est complète.

## 7. Appendice 2 : théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck pour les champs ind-finis sur des schémas non noethériens

On va prouver l'énoncé suivant

**THÉORÈME 7.1.** *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & \square & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec  $f$  propre. Alors, pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$ , la flèche de changement de base  $g^* f_* \mathcal{C} \rightarrow f'_* g'^* \mathcal{C}$  est une équivalence.

*Démonstration.* Notons que ce théorème est connu dans le cas discret [SGA 4 XII 5.1] et si  $Y$  est localement noethérien ([Giraud, 1971], VII.2.2.2). La preuve qui suit est une adaptation de la preuve de ce dernier énoncé.

*Preuve du théorème :* D'après [Giraud, 1971], VII.2.2.5, il suffit de prouver l'énoncé suivant : soit  $X$  propre sur  $S$  local hensélien et  $i : X_0 \hookrightarrow X$  l'immersion de la fibre fermée. Alors, pour tout champ ind-fini  $\mathcal{C}$  sur  $X$ , la flèche

$$\gamma : H^0(X, \mathcal{C}) \rightarrow H^0(X_0, i^*\mathcal{C})$$

est une équivalence. Notons que  $X/S$  étant propre, il est cohérent donc  $X$  est cohérent comme  $S$  [SGA 4 VI 2.5]. Ainsi,  $i$  est un morphisme cohérent de schémas cohérents. Si  $\mathcal{C}$  est discret, le théorème est une conséquence immédiate du théorème de changement de base propre pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 XII 5.1 (i)]. On en déduit que  $\gamma$  est pleinement fidèle. D'après 6.5.2, il suffit de montrer que pour tout morphisme fini  $X' \rightarrow X$  (induisant une immersion fermée  $X'_0 \hookrightarrow X'$ ) et tout groupe fini  $G$ , la flèche

$$(7.a) \quad \gamma : \text{Tors}(X', G) \rightarrow \text{Tors}(X'_0, G)$$

est une équivalence (et en fait est essentiellement surjective puisqu'on sait déjà qu'elle est pleinement fidèle). On applique alors [SGA 4 XII 5.5 (ii)] au morphisme propre  $X' \rightarrow S$  pour conclure.  $\square$

### 8. Appendice 3 : sorites sur les gerbes

On montre que toute gerbe ind-finie sur  $X$  noethérien est limite inductive filtrante de ses sous-gerbes constructibles (comparer avec [ÉGA IV<sub>3</sub> IX.2.9] et [ÉGA IV<sub>3</sub> IX.2.2]).

**8.1. Image d'un morphisme de champs.** Soit  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  un morphisme (cartésien) de champs sur  $X_{\text{ét}}$ . On définit l'image  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(\mathcal{C})$  comme la catégorie ayant pour objets ceux de  $\mathcal{C}$  et telles que  $\text{Hom}_{\varphi(\mathcal{C})}(g_1, g_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varphi(g_1), \varphi(g_2))$ , la structure de catégorie fibrée étant déduites des structures (compatibles) de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Notons que  $\text{Im}(\varphi)$  est naturellement équivalente à la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}'_{\varphi}$  de  $\mathcal{C}'$  dont les objets sont les images des objets de  $\mathcal{C}$ . On identifiera  $\varphi(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{C}'_{\varphi}$ .

**LEMME 8.1.1.** Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$  et  $f : W \rightarrow X$  un morphisme de schémas. Alors,

- la flèche naturelle  $\text{Im}(\varphi)_{\bar{x}} \rightarrow \text{Im}(\varphi_{\bar{x}})$  est une équivalence ;
- on a une équivalence de champs canoniques  $f^*\text{Im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f^*\varphi)$ .

*Démonstration.* Les objets de  $\text{Im}(\varphi)_{\bar{x}} \rightarrow \text{Im}(\varphi_{\bar{x}})$  coïncident avec ceux de  $\mathcal{C}_{\bar{x}}$  et la flèche naturelle est simplement l'identité. Construisons l'inverse de la flèche. Soit alors  $a, b \in \bar{\mathcal{C}}_{\bar{x}}$  et  $\psi \in \text{Hom}(\phi(a), \phi(b))$  qui provient de  $\Psi_S \in \text{Hom}_S(\phi(\alpha), \phi(\beta))$ . Mais  $\Psi_S$  peut-être vu comme une flèche de  $\text{Im}(\varphi)(S)$  : on prend son germe en  $\bar{x}$  pour définir l'inverse (qui ne dépend pas des choix). On vérifie que ceci définit l'inverse cherché.

Passons au second point et définissons la flèche. Par adjonction, on doit définir une flèche (cartésienne)

$$\text{Im}(\varphi) \rightarrow f_*\text{Im}(f^*\varphi).$$

Soit  $S \rightarrow X$  étale. Les objets du membre de gauche sont les objets de  $\mathcal{C}(S)$  tandis que ceux de droites sont ceux de  $f^*\mathcal{C}(f^{-1}(S)) = f_*f^*\mathcal{C}(S)$ . La flèche d'adjonction  $\mathcal{C} \rightarrow f_*f^*\mathcal{C}$  permet alors de définir la flèche  $x \mapsto f^*(x)$  cherchée au niveau des objets. Soient alors  $x, y$  des objets de  $\mathcal{C}(S)$  et

$$g \in \text{Hom}_S(\varphi(x), \varphi(y)) = \text{Hom}_{\text{Im}(\varphi)(S)}(x, y)$$

C'est donc une section sur  $S$  de  $\underline{\text{Hom}}(\varphi(x), \varphi(y))$  qui fournit (par image inverse) une section sur  $f^{-1}(S)$  de  $\underline{\text{Hom}}(f^*\varphi(x), f^*\varphi(y))$  ([Giraud, 1971, II.3.2.8.1 (4)], donc une flèche de

$$\text{Hom}_{f^{-1}(S)}(f^*\varphi(x), f^*\varphi(y)) = \text{Hom}_{f^{-1}(S)}((\varphi(f^*x), \varphi(f^*y))) = \text{Hom}_{f_*\text{Im}(f^*\varphi)(S)}(x, y).$$

Le foncteur ainsi défini est visiblement cartésien (comme  $\varphi$ ). Le premier point assure que les fibres de ce foncteur sont des équivalences, ce qui achève de prouver le lemme.  $\square$

**8.2. Groupoïdes libres.** Soit  $\Gamma = E \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{array} V$  un graphe orienté ( $E$  est l'ensemble des arêtes,  $V$  l'ensemble des sommets,  $b, s$  les applications « but, source »). On associe (voir [Berger, 1995]) le groupoïde libre  $L(\Gamma)$  qu'on peut décrire comme suit. Soit  $E^\pm$  l'ensemble  $E^\pm = \{e^\pm, e \in E\}$  union disjointe de deux copies de  $E$  : ses objets sont les sommets et les morphismes entre  $v, v' \in V$  sont les mots (réduits)

$$e_1^\pm \cdots e_n^\pm \text{ avec } b(e_i) = s(e_{i+1}) (i = 1, \dots, n-1), s(e_1) = v, b(e_n) = v'.$$

REMARQUE 8.2.1. Il est bien connu que  $L(\Gamma)$  est le groupoïde fondamental  $\Pi_1(\Gamma_{\mathbb{R}})$  de la réalisation géométrique  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  de  $\Gamma$ .

Par construction, les foncteurs de  $L(\Gamma)$  dans un groupoïde  $G$  s'identifient naturellement aux familles

$$(g_v) \in \text{Ob}(G)^V, (\gamma_e) \in \text{Fl}(G)^E \text{ telles que } \gamma_e \in \text{Hom}_G(g_{s(e)}, g_{b(e)}).$$

Si on préfère,  $L$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli Groupoïdes  $\rightarrow$  Graphes.

La construction se globalise de la manière suivante. Considérons un diagramme de  $X$ -schémas étales

$$\Gamma_X : E \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{array} V \\ \swarrow \quad \searrow \\ X$$

Par functorialité de la construction  $L$ , on définit un préchamp sur  $X_{\text{ét}}$  par la formule  $S \mapsto L(\Gamma_X(S))$  dont le champ associé est noté  $L(\Gamma_X)$  : c'est le groupoïde libre engendré par le graphe orienté. Par construction  $L(\Gamma_X)$  a des sections locales si et seulement si  $V \rightarrow X$  est surjectif. Les sections locales sont localement isomorphes si et seulement si pour tout point géométrique  $\bar{x} \rightarrow X$ , le graphe  $E_{\bar{x}} \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{array} V_{\bar{x}}$  est connexe. Par construction, on dispose de deux sections tautologiques

$$g \in \text{Ob}(\Gamma_X)(V), \gamma \in \text{Hom}_{(\Gamma_X)(E)}(s^*g, b^*g)$$

définies par l'identité de  $V$  et de  $E$  respectivement. Soit  $\mathcal{G}$  un groupoïde sur  $X_{\text{ét}}$ . On a alors la propriété d'adjonction suivante : la flèche qui à un foncteur cartésien

$$\varphi : L(\Gamma_X) \rightarrow \mathcal{G}$$

associe

$$\varphi(g) \in \mathcal{G}(V), \varphi(\gamma) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}(E)}(s^*\varphi(g), b^*\varphi(g))$$

est bijective.

**8.3. Constructibilité de sous-gerbes.** Considérons un hyper-recouvrement<sup>viii</sup> de  $X$ , à savoir un diagramme de  $X$ -schémas étales (de type fini)

$$H_X : \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & V \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

où les flèches  $V \rightarrow X$  et  $(s, b) : E \rightarrow V \times_X V$  sont surjectives. Pour tout point géométrique  $\bar{x} \rightarrow X$ , le graphe  $H_{\bar{x}}$  est connexe de sorte que  $L(H_X)$  est une gerbe. Soit

$$g \in \mathcal{G}(V), \gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{G}(E)}(s^*\varphi(g), b^*\varphi(g))$$

définissant un morphisme cartésien  $\varphi : L(H_X) \rightarrow \mathcal{G}$ .

**DÉFINITION 8.3.1.** Une gerbe  $\mathcal{G}$  sur  $X_{\text{ét}}$  est dite constructible si pour toute section locale  $\sigma \in \mathcal{G}(S), S \rightarrow X$  ouvert étale, le faisceau en groupes  $\underline{\text{Aut}}(\sigma)$  sur  $S_{\text{ét}}$  est constructible.

**LEMME 8.3.2.** Avec les notations précédentes, supposons  $\mathcal{G}$  ind-finie. Alors, l'image  $I = \text{Im}(\varphi)$  est constructible.

*Démonstration.* Comme la formation de l'image et de  $L$  commutent à l'image inverse, on peut procéder par récurrence noethérienne. Il suffit donc de prouver que  $I$  est constructible sur un ouvert non vide de  $X$ . La constructibilité se testant après n'importe quel changement de base surjectif localement de présentation finie, [SGA 4 IX 2.8], on peut supposer que  $V, E$  sont des revêtements étales de  $X$  complètement décomposés, autrement dit que  $H_X$  est un graphe constant  $\Gamma$  de sorte que  $\sigma$  s'identifie à  $n = \text{card}(V)$  sections  $\sigma_i \in \mathcal{G}(X)$  deux à deux isomorphes. Ainsi,  $L(H_X)$  est le champ en groupoïdes constant  $L(\Gamma)_X$ . Soit  $N$  le noyau du morphisme de groupoïdes (abstrait)

$$N = \text{Ker}(L(\Gamma) \rightarrow \mathcal{G}(X)).$$

Par adjonction,  $L(H_X) = L(\Gamma)_X \rightarrow \mathcal{G}$  se factorise à travers la projection  $L(\Gamma)_X \rightarrow (L(\Gamma)/N)_X$ . Mais, comme  $L(\Gamma)/N$  est un groupoïde fini, il est constructible de sorte que  $I$  l'est aussi, comme quotient de  $(L(\Gamma)/N)_X$ . □

**PROPOSITION 8.3.3.** Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas noethériens,  $\mathcal{G}$  une gerbe ind-finie sur  $Y_{\text{ét}}$  et  $\sigma \in H^0(X, \pi^*\mathcal{G})$ . Il existe une sous-gerbe constructible  $\mathcal{G}_1$  de  $\mathcal{G}$  telle que  $\sigma \in H^0(X, \pi^*\mathcal{G}_1) \subset H^0(X, \pi^*\mathcal{G})$ .

*Démonstration.* La formule  $\pi^*\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_{\pi(x)}$  assure que localement  $\sigma$  provient par image inverse d'une section locale de  $\mathcal{G}$ . Comme  $Y$  est quasi-compact, on peut trouver  $V \rightarrow Y$  étale (surjectif de type fini) et  $\tau \in \mathcal{G}(V)$  telles que  $\pi^*\tau$  et  $\sigma$  coïncident localement sur  $X$ . En considérant  $E \rightarrow V \times_Y V$  étale convenable définissant un isomorphisme  $\gamma : s^*\tau \rightarrow b^*\tau$ , il suffit d'après le lemme précédent de poser  $\mathcal{G}_1 = \text{Im}(L(V, E) \xrightarrow{(\tau, \gamma)} \mathcal{G})$ . □

<sup>viii</sup>La terminologie est abusive : manque la section diagonale  $V \rightarrow E$  pour avoir un hyper-recouvrement (tronqué).



REMARQUE 8.3.4. On contourne ici l'absence de sorites sur les limites inductives. L'énoncé devrait être en deux parties : d'abord qu'une gerbe ind-finie sur un schéma noethérien est limite inductive filtrante de ses sous gerbes constructibles, ce qui est pour l'essentiel le contenu du lemme précédent, ensuite que sur un schéma cohérent, le foncteur sections globales commute aux limites inductives filtrantes.



## Le théorème de finitude pour les coefficients non abéliens

Frédéric Déglise

À la mémoire de mon oncle Olivier.

### 1. Introduction

Le but de l'exposé est de démontrer les théorèmes suivants, qui généralisent le théorème d'Artin (cf [SGA 4 XIV th. 1.1]) dans le cas ensembliste et non abélien :

**THÉORÈME 1.1** (Gabber). *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini entre schémas noethériens.*

*Pour tout faisceau constructible  $F$  sur  $Y_{\text{ét}}$ , le faisceau  $f_*F$  est constructible.*

**THÉORÈME 1.2** (Gabber). *Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents.*

*Soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers inversibles sur  $X$ .*

*Pour tout faisceau constructible de groupes  $F$  sur  $Y_{\text{ét}}$  de  $\mathbb{L}$ -torsion, le faisceau  $R^1f_*(F)$  sur  $X_{\text{ét}}$  est constructible.*

**THÉORÈME 1.3** (Gabber). *Soit  $X$  un schéma normal excellent,  $Z \subset X$  une partie fermée de codimension supérieure à 2. Notons  $j : U \rightarrow X$  l'immersion ouverte du complémentaire.*

*Pour tout groupe fini  $G$ , le faisceau  $R^1j_*(G_U)$  est constructible.*

**THÉORÈME 1.4** (Gabber). *Soit  $A$  un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que  $A$  est normal, excellent, et on note  $X' = \text{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$  son spectre épointé. Alors, pour tout groupe fini  $G$ , l'ensemble  $H^1(X'; G)$  est fini.*

Le théorème 1.1 est prouvé dans la section 2. Ce théorème est utilisé par les suivants dans le cas où  $X$  est quasi-excellent. Ce cas est beaucoup plus simple, comme nous le dégageons dans la démonstration.

Le théorème 1.2 est réduit – en trois étapes – au théorème 1.3 dans la section 3. Toutefois, le lecteur attentif notera que ce dernier théorème n'est pas un simple cas particulier car il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse sur le cardinal du groupe  $G$ .

Le théorème 1.3 est réduit au théorème 1.4 dans la section 4. Cette réduction apparaît en 4.6 et utilise deux lemmes qui ont été établis auparavant (lemmes 3.6 et 4.5).

Le dernier théorème est bien un cas particulier de 1.3. Toutefois, nous avons choisi de le dégager dans cette introduction à la fois comme un résultat important et comme un point clé. Il est démontré dans la section 5 suivant un raisonnement par l'absurde qui utilise la méthode des ultrafiltres (voir 5.4.1 pour des rappels).

Notations et conventions.

- Quand une topologie sur un schéma est sous-entendue, il s'agit de la topologie étale.
- Étant donné un ensemble  $D$  (resp. un groupe  $G$ ), on notera parfois  $D$  (resp.  $G$ ) pour le faisceau étale constant induit sur un schéma  $X$  lorsque  $X$  est clair d'après le contexte. Si l'on veut préciser  $X$ , on note ce faisceau  $D_X$  (resp.  $G_X$ ), suivant l'usage.
- Quand on parle de la normalisation d'un schéma  $X$ , il s'agit du morphisme canonique

$$X' = \sqcup_{i \in I} X'_i \rightarrow X$$

où  $I$  désigne l'ensemble des composante irréductibles de  $X$  et  $X'_i$  désigne le schéma normalisé de la composante irréductible de  $X$  correspondant à  $i$ , munie de sa structure de sous-schéma réduit. On dit aussi que  $X'$  est le schéma normalisé associé à  $X$ .

## 2. Image directe de faisceaux d'ensembles constructibles

Dans le cas où  $X$  est quasi-excellent, la preuve est une application de résultats déjà connus (cf [SGA 4 IX]). Nous commençons par exposer la démonstration dans ce cas, puis dans le cas général. Toutefois, l'étape de réduction exposée dans la section qui suit est valable dans les deux cas.

**2.1. Réduction du théorème.** On commence par réduire le théorème 1.1 à l'assertion suivante :

( $\mathcal{P}$ ) Soit  $D$  un ensemble fini et  $j : U \rightarrow X$  une immersion ouverte entre schémas noethériens. Alors, le faisceau d'ensembles  $j_*(D_U)$  est constructible.

Considérons les hypothèses du théorème 1.1. D'après [SGA 4 IX 2.14], on peut trouver un monomorphisme

$$F \rightarrow \prod_{i=1}^n \pi_{i*}(C_i) = Q$$

pour des morphismes finis  $\pi_i : Y_i \rightarrow Y$  et des faisceaux constants finis  $C_i$  sur  $Y_i$ . Comme un sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible ([SGA 4 IX 2.9(ii)]), il suffit de montrer que  $f_*(Q)$  est constructible. On est donc ramené au cas de  $(f\pi_i)_*(C_i)$  pour tout  $i$ , ce qui montre qu'on peut supposer  $F = D_Y$  pour un ensemble fini  $D$ .

Notons que dans ce cas, le théorème est local en  $Y$ . En effet, si l'on se donne un recouvrement étale  $\pi : W \rightarrow Y$  ( $Y$  est noethérien), le morphisme d'adjonction

$$D_Y \rightarrow \pi_*\pi^*(D_Y) = \pi_*(D_W)$$

est un monomorphisme. En lui appliquant  $f_*$ , on en déduit un monomorphisme

$$f_*(D_Y) \rightarrow (f\pi)_*(D_W).$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite est constructible ([SGA 4 IX prop. 2.9(ii)] à nouveau). Notamment, on peut donc supposer que  $Y$  est affine.

Alors,  $f$  est séparé de type fini. On peut donc considérer une factorisation

$$Y \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{f} X$$

de  $f$  telle que  $j$  est une immersion ouverte et  $\bar{f}$  un morphisme propre. Le résultat est connu pour  $\bar{f}$  (cf [SGA 4 XIV th. 1.1]) donc on est réduit au cas de l'immersion ouverte  $j$ , c'est-à-dire à l'assertion ( $\mathcal{P}$ ).

**REMARQUE 2.2.** (i) Si l'on suppose que  $X$  est quasi-excellent, le schéma  $\bar{X}$  qui apparaît dans la réduction ci-dessus est encore excellent puisque  $\bar{f}$  est de type fini.

(ii) Dans cette réduction, on a vu que ( $\mathcal{P}$ ) est locale en  $U$ .

**2.3. Cas où  $X$  est quasi-excellent.** Notons le lemme facile suivant :

**LEMME 2.4.** *Considérons un carré cartésien de schémas noethériens*

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

tel que  $j$  est une immersion ouverte et  $p$  un morphisme fini surjectif. Alors, pour tout ensemble fini  $D$ , si  $l_*(D_V)$  est constructible,  $j'_*(D_{U'})$  est constructible.

*Démonstration.* Par hypothèse,  $q$  est surjectif. On en déduit que le morphisme d'adjonction

$$D_U \rightarrow q_* q^*(D_U) = q_*(D_{V'})$$

est un monomorphisme. Appliquant  $j_*$ , on en déduit un monomorphisme

$$j_*(D_U) \rightarrow p_*(j'_*(D_{U'})).$$

Puisque  $p$  est fini,  $p_*$  préserve la constructibilité d'après [SGA 4 IX prop. 2.14(i)]. Le lemme en résulte puisqu'un sous-faisceau d'un faisceau d'ensembles constructible est constructible ([SGA 4 IX 2.9(ii)]).  $\square$

Avant de passer à la preuve dans le cas général, notons que la démonstration du théorème 1.1 dans le cas où  $X$  est quasi-excellent est plus simple. Grâce à la remarque précédente, on se réduit à l'assertion ( $\mathcal{P}$ ) dans le cas où  $X$  est quasi-excellent. Puisque cette assertion est locale en  $X$ , on peut supposer que  $X$  est excellent. Dès lors, la normalisation  $p : X' \rightarrow X$  de  $X$  est finie. Ainsi, le lemme précédent appliqué au carré cartésien évident nous ramène au cas où  $X$  est normal.

Seul le cas où  $X$  est connexe nous intéresse. Alors, d'après [SGA 4 IX lem. 2.14.1],  $j_*(D_U) = D_X$ , ce qui conclut.

**2.5. Cas général.** Considérons les hypothèse de l'assertion ( $\mathcal{P}$ ).

Notons que cette assertion est triviale pour  $X = \emptyset$ . On peut donc raisonner par induction noethérienne sur  $X$ . On suppose plus précisément que l'hypothèse d'induction suivante est vérifiée :

( $\mathcal{H}$ ) Pour tout fermé strict  $Z$  de  $X$ , pour tout morphisme fini  $Z' \rightarrow Z$  et pour toute immersion ouverte  $l : V' \rightarrow Z'$ ,  $l_*(D_{V'})$  est constructible.

L'assertion étant locale en  $X$ , on peut supposer que  $X$  est le spectre d'un anneau noethérien réduit  $A$ . Utilisant le lemme 2.4 – en prenant pour  $X'$  la somme disjointe des composantes irréductibles de  $X$  – on peut supposer aussi que  $A$  est intègre. On a déjà vu que ( $\mathcal{P}$ ) est aussi locale en  $U$  (point ii de la remarque 2.2). On peut donc se ramener au cas où  $U = \text{Spec}(A_f)$  pour un élément  $f \in A$ .

Soit  $A'$  la clôture intégrale de  $A$  dans son corps des fractions. On pose  $X' = \text{Spec}(A')$ ,  $Z = \text{Spec}(A/(f))$  et on considère le diagramme formé de carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & Z'' \\
 & & & & \downarrow h \\
 U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\
 \downarrow q & & \downarrow p & & \downarrow r \\
 U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z
 \end{array} \Bigg) \pi$$

tel que  $i$  et  $j$  sont les immersions évidentes,  $p$  (resp.  $h$ ) est la normalisation de  $X$  (resp.  $Z'$ ).

*Première étape (fibres génériques de  $p$ ) :*

Considérons les points génériques  $z'_1, \dots, z'_n$  de  $Z'$ , et posons  $z_r = p(z'_r)$ . Bien que  $p$  ne soit pas nécessairement fini,  $p^{-1}(z_r)$  est fini et l'extension résiduelle  $\kappa(z'_r)/\kappa(z_r)$  est finie (voir [Nagata, 1962, chap. V, th. 33.10]). D'après le lemme 2.4, on peut toujours remplacer  $A$  par une extension finie  $A \subset B \subset A'$ . L'hypothèse  $(\mathcal{H})$  est en effet encore vérifiée pour  $Y = \text{Spec}(B)$ . Dès lors, on peut supposer que les conditions suivantes sont vérifiées :

- (h1) Pour tout indice  $r$ ,  $p^{-1}(\{z_r\}) = \{z'_r\}$ .
- (h2) Pour tout indice  $r$ ,  $\kappa(z'_r)/\kappa(z_r)$  est triviale.

Notons  $A_i$  (resp.  $A'_i$ ) l'anneau localisé de  $X$  en  $z_i$  (resp.  $X'$  en  $z'_i$ ). Alors,  $A'_i$  est un anneau de valuation discrète. Du fait que l'extension induite  $A'_i/A_i$  est entière, on déduit que  $A_i$  est de dimension 1, ce qui implique que  $z_i$  est un point générique du diviseur  $Z$  de  $X$ . Comme  $q$  est surjectif, on déduit de (h1) que  $z_1, \dots, z_n$  est l'ensemble des points génériques de  $Z$ .

*Deuxième étape (restriction à un ouvert de  $Z$ ) :*

Puisque trivialement  $j_*j_*(D_U) = D_U$ , il suffit de montrer que  $i^*j_*(D_U)$  est constructible. Notons les faits suivants :

- (i)  $q$  surjectif :  $D_U \rightarrow q_*q^*(D_U) = q_*(D_{U'})$  est un monomorphisme.
- (ii)  $X'$  normal,  $j'$  dominante :  $j'_*(D_{U'}) = D_{X'}$ .
- (iii)  $h$  surjectif :  $D_{Z'} \rightarrow h_*h^*(D_{Z'}) = h_*(D_{Z''})$  est un monomorphisme.

On déduit de i et ii un monomorphisme

$$j_*(D_U) \rightarrow j_*q_*(D_{U'}) = p_*(D_{X'}).$$

Notons que  $p$  est pro-fini. Le théorème de changement de base propre s'étend à ce cas, ce qui donne la relation :  $i^*p_* = r_*i'^*$ . Si on applique  $i^*$  au monomorphisme précédent, on déduit de cette relation et de iii un monomorphisme composé :

$$\sigma : i^*j_*(D_U) \rightarrow i^*p_*(D_{X'}) = r_*(D_{Z'}) \rightarrow \pi_*(D_{Z''}).$$

Considérons maintenant une immersion ouverte dense  $l : V \rightarrow Z$  ainsi que le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 Z'' & \xleftarrow{l'} & V'' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi_V \\
 Z & \xleftarrow{l} & V.
 \end{array}$$

<sup>i</sup>Comme on l'a déjà vu, c'est [SGA 4 IX lem. 2.14.1]

On en déduit un diagramme commutatif de faisceaux d'ensembles :

$$\begin{array}{ccc} i^*j_*(D_U) & \xrightarrow{\alpha} & l_*l^*i^*j_*(D_U) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow l_*l^*\sigma \\ \pi_*(D_{Z''}) & \xrightarrow{\beta} & l_*l^*\pi_*(D_{Z''}). \end{array}$$

Or le morphisme  $\beta$  – induit par le morphisme de coïunité l'adjonction  $(l^*, l_*)$  – est un isomorphisme. En effet,  $l$  étant une immersion ouverte  $l^*\pi_* = \pi_{V*}l'^*$  par changement de base. On obtient donc l'identification :  $l_*l^*\pi_*(D_{Z''}) = \pi_{V*}l'_*(D_{V''})$ . De plus, à travers cette identification, le morphisme  $\beta$  est l'image<sup>ii</sup> par  $\pi_*$  du morphisme de coïunité pour l'adjonction  $(l'^*, l'_*)$  :

$$D_{Z''} \rightarrow l'_*l'(D_{Z''}) = l'_*(D_{V''}).$$

Ce dernier est un isomorphisme puisque  $Z''$  est normal et  $l'$  dense (voir [SGA 4 IX lem. 2.14.1]). Puisque  $\sigma$  est un monomorphisme, on en déduit que  $\alpha$  est un monomorphisme.

Or, d'après ( $\mathcal{H}$ ), le faisceau d'ensembles  $l_*(D_V)$  est constructible. Pour conclure, il suffit donc (d'après [SGA 4 IX 2.9(ii)]) de trouver un ouvert  $V$  de  $Z$  tel que

(2.a) 
$$j_*(D_U)|_V = D_V.$$

Troisième étape (composantes immergées de  $Z$ ) :

Considérons la réunion  $T$  des composantes immergées de  $Z$  dans  $X$ . Alors, l'ouvert  $V = Z - T$  satisfait la relation (2.a).

Il s'agit de démontrer que pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $V$ , la fibre du morphisme canonique  $D_V \rightarrow j_*(D_U)|_V$  au point  $\bar{x}$  est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme induit

(2.b) 
$$\pi_0(X_{(\bar{x})}) \rightarrow \pi_0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\})$$

est un isomorphisme.

Soit  $x$  le point de  $X = \text{Spec } A$  correspondant à  $\bar{x}$ . Si  $x$  n'est pas un point générique, puisque  $V$  n'a pas de composante immergée,

$$\text{Prof}_x(A/(f)) \geq 1 \Rightarrow \text{Prof}_x(A) \geq 2.$$

D'après le théorème de Hartshorne ([SGA 2 III 3.6]), le morphisme (2.b) est donc un isomorphisme.

Supposons que  $x$  est un point générique. D'après (h1), il existe un indice  $i$  tel que  $x = z_i$ . Or, d'après (h2), le morphisme entier birationnel

$$X'_{(z'_i)} = \text{Spec}(A'_i) \rightarrow \text{Spec}(A_i) = X_{(z_i)}$$

est radiciel. C'est donc un homéomorphisme universel. On en déduit que le morphisme  $X'_{(z'_i)} \rightarrow X_{(z_i)}$  est encore un homéomorphisme, où  $\bar{z}'_i$  est le point géométrique correspondant à la clôture séparable de  $\kappa(z_i)$  définie par  $\bar{z}_i$ . Dès lors, (2.b) est un isomorphisme puisque la propriété correspondante est vraie pour le schéma normal  $X'_{(z'_i)}$ . Ceci conclut.

<sup>ii</sup>On le vérifie facilement en revenant à la définition du morphisme de changement de base à l'aide des adjonctions  $(l, l_*)$  et  $(l'^*, l'_*)$  et en utilisant que la composée suivante de morphismes unités/coïunités est l'identité :

$$l_* \rightarrow l_*l^*l_* \rightarrow l_*.$$

**3. Image directe dérivée de faisceaux de groupes constructibles**

**3.1. Réduction au cas d'un faisceau constant.**

LEMME 3.2. Soit  $f : Y \rightarrow X$  une morphisme de type fini et  $u : F \rightarrow F'$  un monomorphisme de faisceaux en groupes constructibles sur  $Y_{\text{ét}}$ .

Alors,  $R^1 f_*(F')$  constructible implique  $R^1 f_*(F)$  constructible.

Démonstration. Posons  $C = F'/F$  vu comme faisceau pointé, constructible sur  $Y_{\text{ét}}$  par hypothèse. On considère la suite exacte de faisceaux pointés (cf [SGA 4 XII 3.1])

$$f_*(F') \rightarrow f_*(C) \rightarrow R^1 f_*(F) \xrightarrow{v} R^1 f_*(F').$$

Supposant que  $R^1 f_*(F')$  est constructible, on peut trouver une famille génératrice de sections locales  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $R^1 f_*(F')$ . Soit  $\Phi_i$  le faisceau fibre de  $v$  en  $e_i$ , défini par le diagramme cartésien de faisceaux sur  $X_{\text{ét}}$  :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_i & \longrightarrow & V_i \\ \downarrow & & \downarrow e_i \\ R^1 f_*(F) & \xrightarrow{v} & R^1 f_*(F'). \end{array}$$

Utilisant le critère de constructibilité par les fibres et les spécialisations (cf [SGA 4 IX prop. 2.13(ii)]), on voit aisément qu'il suffit de montrer que le faisceau  $\Phi_i$  est constructible pour tout  $i$ .

Pour montrer cela, il suffit de se rappeler de l'interprétation de  $\Phi_i$  en termes de  $F$ -objets tordus. Soit  $x$  un point de  $X_{\text{ét}}$ . Il existe un voisinage étale  $V$  de  $x$  dans  $X$  et une section  $e$  de  $\Phi_i$  sur  $V/X$ . Quitte à restreindre le voisinage  $V$ ,  $e$  provient d'un  $F$ -torseur sur  $V \times_Y X$ . On peut alors tordre par  $e$  la suite exacte ci-dessus restreinte à  $V$ , chaque faisceau étant muni d'une action de  $f_*(F)$  :

$$f_*(F')^e \rightarrow f_*(C)^e \rightarrow R^1 f_*(F)^e \xrightarrow{v^e} R^1 f_*(F')^e.$$

La suite obtenue est encore exacte et  $\Phi_i|_V$  s'identifie avec le noyau de  $v^e$ . On en déduit  $\Phi_i|_V \simeq f_*(C)^e / f_*(F')^e$ . Or ce faisceau est constructible d'après le théorème 1.1. □

Considérons les hypothèses du théorème 1.2. D'après [SGA 4 IX prop. 2.14], on peut trouver un monomorphisme de groupes

$$F \rightarrow F' = \prod_{i=1}^r \pi_{i*}(G_i)$$

pour des morphismes finis  $\pi_i : U_i \rightarrow U$  et des groupes finis  $G_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ . D'après le lemme précédent, on est réduit au cas de  $F'$ . Puisque  $\pi_{i*}$  est exact, on est donc ramené au cas du morphisme  $f \circ \pi_i$  et du faisceau constant sur  $U_i$  de groupe  $G_i$  pour chaque indice  $i$ .

**3.3. Réduction au cas d'une immersion ouverte.** Le lemme clé dans cette étape de réduction est le suivant :

LEMME 3.4. Soit  $G$  un groupe fini. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ h \nearrow & & \searrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

de morphismes de type fini. Les conditions suivantes sont vérifiées :



- (i) Si  $h$  est surjectif,  $R^1 f_*(G_Y)$  constructible implique  $R^1 g_*(G_{Y'})$  constructible.
- (ii) Si  $g$  est propre,  $R^1 h_*(G_Y)$  constructible implique  $R^1 f_*(G_Y)$  constructible.

*Démonstration.* Rappelons que l'on dispose de la suite exacte de faisceaux d'ensembles sur  $X_{\text{ét}}$  (cf [SGA 4 XII prop. 3.2]) :

$$* \rightarrow R^1 g_*(h_* G_Y) \xrightarrow{u} R^1 f_*(G_Y) \xrightarrow{v} g_* R^1 h_*(G_Y).$$

Considérons l'assertion (i). Puisque  $h$  est surjectif, le morphisme d'adjonction

$$G_{Y'} \rightarrow h_* h^* G_{Y'} = h_* G_Y$$

est un monomorphisme. Appliquant le lemme 3.2, il suffit de montrer que  $R^1 g_*(h_* G_Y)$  est constructible. On peut alors conclure puisque le morphisme  $u : R^1 g_*(h_* G_Y) \rightarrow R^1 f_*(G_Y)$  est un monomorphisme.

Considérons maintenant l'assertion (ii). Puisque  $g$  est propre, le théorème de changement de base propre [SGA 4 XIV th. 1.1] conjugué avec le théorème 1.1 montre que la source de  $u$  est constructible. Par hypothèse et une nouvelle application du théorème 1.1, le but de  $v$  est constructible.

Il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration de 3.2 sur les fibres du morphisme  $v$  associées à une famille finie de sections locales de  $g_* R^1 h_*(G_Y)$  qui est génératrice. Chacune de ses fibres est localement vide ou isomorphe au faisceau tordu  $R^1 g_*((h_* G_Y)^e)$  pour une de ces sections locales  $e$ . Comme ce faisceau est toujours constructible, on peut conclure.  $\square$

Considérons maintenant les hypothèses du théorème 1.2, dans le cas  $F = G_Y$ . Puisque  $Y$  est noethérien, il existe un recouvrement Zariski  $\pi : W \rightarrow Y$  tel que  $W$  est affine. D'après l'assertion (i) du lemme ci-dessus, il suffit de montrer le théorème pour  $f \circ \pi$ . On peut donc supposer que  $Y$  est affine.

Le morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est alors quasi-projectif. On peut donc considérer une factorisation  $Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{g} X$  de  $f$  tel que  $g$  est projectif et  $j$  est une immersion ouverte. D'après l'assertion (ii) du lemme ci-dessus, nous sommes réduit au cas de l'immersion ouverte  $j$ .

**3.5. Réduction au théorème 1.3 (i.e. la codimension 2).** Grâce aux deux étapes de réduction précédentes, nous sommes ramenés au cas d'une immersion ouverte  $j : U \rightarrow X$  et d'un faisceau constant sur  $U$  de groupe  $G$ . Dans cette étape de réduction, on considère la codimension du complémentaire  $Z$  de  $U$  dans  $X$ .

Pour montrer que  $R^1 j_*(G_U)$  est constructible on peut raisonner localement sur  $X$ . On peut donc supposer que  $X$  est excellent. Considérons la normalisation  $p : X' \rightarrow X$  de  $X$  ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Puisque  $q$  est surjectif, le morphisme d'adjonction  $G_U \rightarrow q_* q^*(G_U)$  est un monomorphisme. D'après le lemme 3.2, il suffit donc de montrer que  $R^1 j_*(q_* G_{U'})$  est constructible. Or  $p$  et  $q$  étant finis,  $R^1 j_*(q_* G_{U'}) = p_* R^1 j'_*(G_{U'})$ . On peut donc supposer que  $X$  est normal.

Dès lors,  $X$  est somme disjointe de ses composantes irréductibles, et on peut donc le supposer intègre. Notons  $K$  son corps des fonctions. Pour une extension finie  $L/K$ , on peut considérer le schéma normalisé  $X'$  de  $X$  dans  $L$ , ainsi que le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Par adjonction, on obtient un morphisme canonique

$$\phi_{U/X}^{(L)} : R^1 j_* (G_U) \rightarrow p_* R^1 j'_* (G_{U'})$$

induit par le morphisme qui à un  $G$ -revêtement d'un schéma étale  $V/U$  associe son pullback sur  $V' = V \times_U U'$ .

**LEMME 3.6.** *Considérons les hypothèses et notations précédentes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $R^1 j_* (G_U)$  est constructible.
- (ii) Il existe une extension finie séparable  $L/K$  telle que  $\phi_{U/X}^{(L)}$  est trivial.

*Démonstration.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) : Soit  $L/K$  une extension finie telle que  $\phi_{U/X}^{(L)}$  est trivial. Avec les notations qui précèdent, on pose  $C = q_*(G_{U'})/G_U$ , faisceau sur  $U_{\text{ét}}$  pointé de manière évidente. On peut alors former la suite exacte de faisceaux pointés (cf [SGA 4 XII 3.2]) :

$$j_* q_*(G_{U'}) \rightarrow j_*(C) \rightarrow R^1 j_*(G_U) \xrightarrow{(1)} R^1 j_*(q_*(G_{U'})).$$

Notons que, puisque  $p$  est fini,  $R^1 j_*(q_*(G_{U'})) = p_* R^1 j'_*(G_{U'})$  et le morphisme (1) s'identifie au morphisme  $\phi_{U/X}^{(L)}$ . Par hypothèse, la suite exacte ci-dessus implique donc que  $R^1 j_*(G) = j_*(C)/j_* q_*(G_{U'})$  ce qui conclut d'après le théorème 1.1.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Considérons une famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de sections de  $R^1 j_*(G_U)$  qui soit génératrice. Pour tout indice  $i$ ,  $e_i$  correspond à un revêtement  $P_i \rightarrow V_i \times_X U$  pour un schéma étale  $V_i/X$ . On peut supposer que  $P_i$  est connexe de corps des fonctions  $L_i$ . Le morphisme  $P_i \rightarrow X$  correspond donc à une extension finie séparable  $L_i/K$ . On considère la clôture normale  $L$  d'une extension de  $K$  composée des  $L_i/K$ . Par définition,  $\phi_{U/X}^{(L)}(e_i) = *$  pour tout entier  $i$  et le résultat suit puisque  $(e_1, \dots, e_n)$  est génératrice.  $\square$

**REMARQUE 3.7.** Considérons les notations qui précèdent le lemme. En termes de  $G$ -revêtements, la trivialité du morphisme  $\phi_{U/X}^{(L)}$  s'interprète comme suit :

- (i) Pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $Z$  et pour tout  $G$ -revêtement  $\pi : P \rightarrow X_{(\bar{s})}^h - Z_{(\bar{s})}^h$ , le revêtement  $\phi_{U/X,s}^{(L)}(P)$  est trivial.
- (ii) Pour tout schéma étale  $V/X$  et tout  $G$ -revêtement  $\pi : P \rightarrow V - Z_V$ , il existe un recouvrement étale  $W/V'$  tel que  $\pi|_{W-Z_W}$  s'étend à  $W$  (l'extension est alors unique puisque  $X$  est normal).

Dans le cas des immersions ouvertes, on peut renforcer le lemme 3.4 comme suit :

LEMME 3.8. *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ h \nearrow & & \searrow k \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

*d'immersions ouvertes tel que  $X$  est intègre normal et  $h$  est dominante. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Si  $R^1j_*(G)$  est constructible, alors  $R^1k_*(G)$  est constructible.*
- (ii) *Si  $R^1h_*(G)$  est constructible et pour tout morphisme fini surjectif  $X' \rightarrow X, j' = j \times_X X',$  le faisceau  $R^1j'_*(G)$  est constructible, alors  $R^1j_*(G)$  est constructible.*

*Démonstration.* Remarquons que l'hypothèse sur  $h$  et  $V$  entraîne que  $h_*(G_U) = G_V$  (cf [SGA 4 IX lem. 2.14.1]).

L'assertion (i) résulte donc simplement du fait que le morphisme canonique  $R^1k_*(G_V) \rightarrow R^1j_*(G_U)$  est toujours un monomorphisme.

Considérons les hypothèses de l'assertion (ii). D'après le lemme précédent appliqué à  $h$ , on peut trouver une extension finie  $L/K$  telle que  $\phi_{U/V}^{(L)} = *$ . Soit  $X'$  le schéma normalisé de  $X$  dans  $L/K, k' : V' \rightarrow X'$  le pullback de  $k$  sur  $X'$ . Appliquant le lemme précédent à  $k'$ , on peut trouver une extension finie  $E/L$  telle que  $\phi_{V'/X'}^{(E)} = *$ .

On note  $X''$  le normalisé de  $X$  dans  $E/K, X'' \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{p} X$  les morphismes canoniques. On note  $h', j', k'$  (resp.  $h'', j'', k''$ ) les pullback respectifs de  $h, j, k$  sur  $X'$  (resp.  $X''$ ). On peut alors conclure grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & R^1j_*(G) & \longrightarrow & k_*R^1h_*(G) & \\ & \swarrow \text{---} & & \downarrow k_*\phi_{U/V}^{(L)} & \\ & p_*R^1k'_*(G) & \longrightarrow & p_*R^1j'_*(G) & \longrightarrow & (pk')_*R^1h'_*(G) \\ & \downarrow p_*\phi_{V'/X'}^{(E)} & & \downarrow p_*\phi_{U'/X'}^{(E)} & & \\ (pp')_*R^1k''_*(G) & \longrightarrow & & (pp')_*R^1j''_*(G) & \end{array}$$

La flèche pointillée existe du fait de l'exactitude de la suite horizontale du milieu et de  $\phi_{U/V}^{(L)} = *$ . On conclut puisque  $\phi_{U/X}^{(E)} = (p_*\phi_{U'/X'}^{(E)}) \circ \phi_{U/X}^{(L)}$ . □

LEMME 3.9. *Soit  $X$  un schéma régulier et  $Z$  un sous-schéma fermé régulier de  $X$ . Notons  $j : U \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire.*

*Soit  $n$  l'ordre de  $G$ . Alors, si  $n$  est inversible sur  $X, R^1j_*(G_U)$  est constructible.*

*Démonstration.* L'assertion est évidemment locale en  $X_{\text{ét}}$ . On peut donc supposer que  $X$  est local strictement hensélien et régulier, spectre d'un anneau noté  $A$ .

Si  $Z$  est de codimension supérieure à 2 dans  $X$ , il résulte du théorème de pureté de Zariski-Nagata (cf [SGA 1 X 3.1, 3.3]) que  $R^1j_*(G) = *$ .

En codimension 1,  $Z$  admet un paramètre régulier  $f \in A$ . On considère le schéma strictement local

$$X' = \text{Spec}(A[t]/t^n - f).$$

Le lemme d'Abhyankar absolu (cf [SGA 1 XIII prop. 5.2]) montre alors précisément que pour tout revêtement  $E \xrightarrow{\pi} U$  principal galoisien de groupe  $G$ , le revêtement  $\pi \times_X X' : E' \rightarrow U'$  se prolonge à  $X'$ . Il est donc trivial et le lemme 3.6 accompagné de la remarque 3.7 permet de conclure.  $\square$

Revenons au cas général d'une immersion ouverte  $j : U \rightarrow X$  de fermé complémentaire  $Z$ ,  $X$  étant supposé normal. Supposons que l'ordre de  $G$  est inversible sur  $X$ .

Soit  $T$  la réunion des lieux singuliers de  $X$  et  $Z$ . Posons  $V = X - T$  et  $W = X - (Z \cup T)$  et considérons les immersions ouvertes correspondantes :

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \xrightarrow{h} & & \xrightarrow{k} & \\ W & \xrightarrow{v} & & \xrightarrow{} & X \\ & \xrightarrow{i} & U & \xrightarrow{j} & \end{array}$$

D'après le lemme précédent,  $R^1 h_*(G)$  est constructible. D'après le lemme 3.8, on est donc ramené à prouver que pour tout morphisme fini surjectif  $X' \rightarrow X$ ,  $k' = k \times_X X'$ , le faisceau  $R^1 k'_*(G)$  est constructible. Cette dernière assertion est bien impliqué par le théorème 1.3.

#### 4. Cas de codimension 2 sans hypothèse sur la torsion

##### 4.1. Résolution des singularités.

LEMME 4.2. *Soit  $X$  un schéma normal connexe,  $Z \subset X$  une partie fermée de codimension 2 et  $j : U \rightarrow X$  l'immersion ouverte complémentaire.*

*Supposons  $\dim(Z) > 0$ . Alors, il existe une partie fermée  $T \subset Z$  de codimension 3 dans  $X$  telle que pour tous points géométriques  $\bar{s}$  et  $\bar{t}$  de  $Z - T$  et toute spécialisation  $\eta : X_{(\bar{t})}^h \rightarrow X_{(\bar{s})}^h$ , le noyau du morphisme de spécialisation*

$$\eta^* : R^1 j_*(G)_{\bar{s}} \rightarrow R^1 j_*(G)_{\bar{t}}$$

*est trivial.*

*Démonstration.* Cette assertion ne dépend que d'un voisinage ouvert de  $Z$  dans  $X$ . Quitte à enlever une partie nulle part dense de  $Z$ , on peut donc supposer que le lieu singulier de  $X$  est inclus dans  $Z$ . De même, on peut supposer que les composantes irréductibles de  $Z$  sont disjointes, et de là, que  $Z$  est irréductible.

D'après [Lipman, 1978], on peut résoudre la singularité de  $X$  au point générique de  $Z$  par une suite d'éclatements et de normalisations. Donc, quitte à retirer de nouveau une partie fermée nulle part dense de  $Z$ , on peut supposer qu'il existe un diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Z' & \longrightarrow & X' & \xleftarrow{j'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow p & \swarrow \uparrow & \downarrow q \\ Z & \longrightarrow & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

tel que  $X'$  est régulier,  $Z'$  est un diviseur dans  $X'$ , toute composante irréductible de  $Z'$  domine  $Z$  et  $q$  est un isomorphisme.

On en déduit donc  $R^1 j_*(G) = R^1 f_*(G)$ . Comme  $X'$  est régulier et  $U'$  dominant dans  $X'$ , on obtient  $j'_*(G_{U'}) = G_{X'}$  (cf [SGA 4 IX lem. 2.14.1]). On obtient donc un monomorphisme canonique  $\rho : R^1 p_*(G) \rightarrow R^1 f_*(G)$ .

Considérant les notations du lemme (où l'on a supposé  $T = \emptyset$ ), on obtient donc un diagramme commutatif d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccc} R^1 p_* (G)_s & \xrightarrow{\rho_s} & R^1 f_* (G)_s \\ \downarrow & & \downarrow \eta^* \\ R^1 p_* (G)_t & \longrightarrow & R^1 f_* (G)_t. \end{array}$$

D'après le théorème de changement de base propre appliqué à  $p$ , la composée  $\eta^* \circ \rho_s$  est un monomorphisme. Il nous suffit donc de vérifier que le noyau de  $\eta^*$  est inclus dans l'image de  $\rho_s$ .

Quitte à tirer la situation sur  $X_{(\bar{s})}^h$ , on peut supposer que  $X = X_{(\bar{s})}^h$  pour simplifier les notations. On se donne donc un  $G$ -revêtement principal connexe  $P \rightarrow U'$  qui est trivial sur  $U' \times_X X_{(\bar{t})}^h$ . On peut supposer que  $P$  est connexe. Si  $F$  désigne le corps des fonctions de  $X'$ , ce revêtement correspond à une extension séparable  $E/F$ . Soit  $\bar{P}$  la clôture normale de  $X'$  dans  $E/F$ . Bien sûr,  $\bar{P} \times_{X'} U' = P$  puisque  $P$  est la clôture normale de  $U'$  dans  $E/F$ . Donc  $\bar{P}/X'$  est non ramifié au-dessus de  $U'$ . Du fait que  $P \times_X X_{(\bar{t})}^h$  est trivial, il suit que  $\bar{P}$  est non ramifié en tous points génériques de  $Z'$  (puisque ceux-ci dominent  $Z_{(\bar{t})}^h$ ). Autrement dit,  $\bar{P}$  est non ramifié en codimension 1. Mais d'après le théorème de Zariski-Nagata (cf [SGA 1 X th. 3.1]),  $\bar{P}$  est non ramifié en codimension supérieure à 2 car  $X'$  est régulier. Ainsi,  $\bar{P}$  est le revêtement étale cherché.  $\square$

**4.3. Un argument « à la Lefschetz ».** Pour cet argument, nous utiliserons le lemme suivant, qui est une application des résultats liés à « la méthode de Lefschetz » de [SGA 2 X §2].

**LEMME 4.4.** *Soit  $X$  un schéma normal excellent connexe,  $D$  un diviseur de Cartier effectif connexe dans  $X$ , et  $Z \subset D$  une partie fermée de codimension supérieure à 2. Alors,  $D - Z$  est connexe.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout point  $s$  de  $X$ , le schéma  $(D - Z) \times_X X_{(s)}$  est connexe. On peut même supposer que  $s$  est un point générique de  $Z$ . On peut donc supposer que  $X$  est local, de dimension supérieure à 3 et que  $Z$  est son point fermé. Considérons le complété  $\hat{X}$  du schéma local  $X$ . Puisque  $X$  est excellent,  $\hat{X}$  est encore normal. Puisque le morphisme  $\hat{X} \rightarrow X$  est un épimorphisme universel, il suffit de montrer que  $(D - Z) \times_X \hat{X}$  est connexe. On peut donc supposer en outre que  $X$  est complet.

Alors, le spectre époincé  $X' = X - Z$  est normal, connexe et de dimension supérieure à 2. Il résulte du *critère de normalité de Serre* (cf [Matsumura, 1989, 23.8]) que pour tout point fermé  $x$  de  $X'$ ,

$$\text{prof}(\mathcal{O}_{X',x}) \geq 2.$$

Dès lors, d'après [SGA 2 X ex. 2.1] (voir aussi plus directement [SGA 2 IX prop. 1.4]), on obtient un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X', \mathcal{O}) \simeq \Gamma(\hat{X}'^D, \mathcal{O})$$

où  $\hat{X}'^D$  désigne le complété formel de  $X'$  le long de  $D$ , ce qui conclut.  $\square$

LEMME 4.5. Soit  $X$  un schéma normal excellent,  $D$  un diviseur principal dans  $X$  et  $Z \subset D$  une partie fermée non vide de codimension supérieure à 2. On pose  $U = X - Z$ ,  $V = D - Z$ .

Considérons le carré cartésien formé des immersions évidentes

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j'} & D \\ i_U \downarrow & & \downarrow i \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Alors, le morphisme de changement de base associé

$$i^*R^1j_*(G) \rightarrow R^1j'_*(G)$$

est un monomorphisme.

*Démonstration.* On peut supposer que  $X$  et  $D$  sont locaux strictement henséliens. On doit montrer que le morphisme de restriction

$$H^1(U; G) \xrightarrow{i_U^*} H^1(V; G)$$

est injectif.

Remarquons que le lemme précédent nous montre déjà que  $V$  est connexe. Soit  $P$  et  $P'$  deux  $G$ -torseurs sur  $U$  qui coïncident sur  $V$ . On considère le faisceau  $L = \underline{\text{Isom}}_G(P, P')$  des  $G$ -isomorphismes de  $P$  dans  $P'$  sur  $U_{\text{ét}}$ . on doit montrer qu'il admet une section sur  $U$ .

Comme  $L$  est localement constant constructible, il est représentable par un  $U$ -schéma étale fini noté  $U'$ . Posons  $V' = U' \times_U V$ . Par hypothèse,  $V'/V$  admet une section.

On va montrer que pour toute composante connexe  $U'_0$  de  $U'$  telle que  $U'_0 \times_U V/V$  admet une section, il existe une section de  $U'_0/U$  ce qui suffira pour conclure.

Quitte à remplacer  $U'$  par  $U'_0$ , on peut supposer pour montrer cela que  $U'$  est connexe. Les corps de fonctions de  $U'$  et  $U$  définissent une extension finie séparable  $L/K$ . Soit  $X'$  le schéma normalisé de  $X$  dans  $L/K$ . On pose encore  $D' = X' \times_X D$  et  $Z' = X' \times_X Z$ .

Notons que  $X'$  est normal excellent et connexe. Dès lors, le lemme précédent implique que  $V' = D' - Z'$  est connexe. Par hypothèse, le  $V$ -schéma étale  $V'$  admet une section, donc  $V' = V$ . Il en résulte que le revêtement étale  $U'/U$  est de degré 1 au-dessus de  $V$ , donc  $U' = U$ .  $\square$

**4.6. Réduction au théorème 1.4.** On peut supposer que  $X$  est affine. Il alors limite projective de schémas affines de type fini sur  $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ . Comme il suffit de démontrer le théorème 1.3 pour chacun des termes de cette limite projective, on est réduit au cas où  $X$  est de dimension finie.

On raisonne par induction sur la dimension de  $X$ . Le cas où  $X$  est de dimension 2 résulte du théorème 1.4.

On se place dans le cas où  $\dim(X) > 2$ .

Si  $\text{codim}(Z) > 2$ , on peut trouver un diviseur principal connexe  $D \xrightarrow{i} X$  qui contient  $Z$ . Soit  $j' : D - Z \rightarrow D$  le morphisme induit.

D'après le lemme 4.5, on obtient un monomorphisme  $i^*R^1j_*(G) \rightarrow R^1j'_*(G)$ . Par hypothèse de récurrence,  $R^1j'_*(G)$  est constructible. On peut donc conclure car  $R^1j_*(G) = i_*i^*R^1j_*(G)$ .

Plaçons nous dans le cas critique où  $\text{codim}(Z) = 2$ , ce qui entraîne  $\dim(Z) > 0$ .

D'après hypothèse d'induction, le théorème est connu pour le schéma semi-localisé de  $X$  aux points génériques de  $Z$  qui sont de codimension 2 dans  $X$ . Il existe donc, d'après le lemme 3.6, une extension finie  $L$  du corps des fonctions  $K$  de  $X$  telle que pour tout point générique  $\eta$  de  $Z$  de codimension 2 dans  $X$ ,  $\phi_{U/X,\eta}^{(L)}$  est trivial.

Considérons  $X'$  la normalisation de  $X$  dans  $L/K$  et  $p : X' \rightarrow X$  sa projection. On pose  $j' = j \times_X X'$  et  $Z' = Z \times_X X'$ . D'après le lemme 4.2, il existe une partie fermée  $T' \subset Z'$  de codimension supérieure à 3 dans  $X'$  tel que les noyaux des flèches de spécialisations de  $R^1j'_*(G)$  aux points de  $Z' - T'$  soient triviaux.

Soit  $T$  la réunion des composantes irréductibles de  $Z$  de codimension supérieure à 3 et du fermé  $p(T')$  dans  $Z$ . Considérons un point géométrique  $\bar{s}$  de  $Z - T$ . Il existe un point générique géométrique  $\bar{t}$  de  $Z - T$  et une spécialisation  $\eta : X_{(\bar{t})}^h \rightarrow X_{(\bar{s})}^h$ . Considérant les fibres de  $\phi_{U/X}^{(L)}$ , on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R^1j_*(G)_{\bar{s}} & \xrightarrow{\phi_{U/X,\bar{s}}^{(L)}} & [p_*R^1j'_*(G)]_{\bar{s}} \\ \downarrow & & \downarrow \eta^* \\ R^1j_*(G)_{\bar{t}} & \xrightarrow{\phi_{U/X,\bar{t}}^{(L)}} & [p_*R^1j'_*(G)]_{\bar{t}}. \end{array}$$

D'après le choix de  $L/K$ , la composée  $\eta^* \circ \phi_{U/X,\bar{s}}^{(L)}$  est triviale. Par ailleurs, puisque  $p$  est fini,  $\eta^*$  a un noyau trivial. On en déduit que  $\phi_{U/X,\bar{s}}^{(L)}$  est trivial. D'après le lemme 3.6,  $R^1h_*(G)$  est constructible pour l'immersion ouverte  $h : X - Z \rightarrow X - T$ . D'après le lemme 3.8, on est donc réduit à montrer que pour tout morphisme fini surjectif  $X' \rightarrow X$ ,  $R^1k'_*(G)$  est constructible pour l'immersion ouverte  $k' : X' - T' \rightarrow X'$ .

Or on peut trouver un diviseur principal  $D \xrightarrow{i} X'$  qui contient  $T'$ . On pose  $k'' = k' \times_{X'} D$ .

D'après le lemme 4.5, on obtient un monomorphisme

$$i^*R^1k'_*(G) \rightarrow R^1k''_*(G).$$

On peut donc à nouveau conclure d'après l'hypothèse d'induction appliquée à  $k''$  et du fait que  $R^1k'_*(G) = i_*i^*R^1k'_*(G)$ .

## 5. Revêtements principaux d'une surface strictement locale épointée

**5.1. Mise en place.** D'après le théorème de rigidité de Gabber (cf XX-2.1.1), on peut supposer que  $A$  est complet. Soit  $X = \text{Spec}(A)$  et  $X' = \text{Spec}(A) - \{m_A\}$ .

D'après le théorème de Cohen-Gabber (cf IV-2.1.1), il existe un sous-anneau régulier  $R \subset A$  tel que  $A/R$  est finie génériquement étale. On note  $m$  le degré générique de  $A/R$ . Notons tout de suite le fait suivant qui résulte de l'algèbre commutative standard :

**LEMME 5.2.** *Soit  $R$  un anneau local régulier de dimension 2,  $A/R$  une algèbre finie tel que  $A$  est normal. Soit  $m$  le degré générique de  $A/R$ .*

*Alors  $A$  est un  $R$ -module libre de rang  $m$ .*

En effet, puisque  $R$  est local régulier de dimension 2, par définition  $\text{prof}(R) = 2$ . Par ailleurs, puisque  $A$  est local normal de dimension 2, il résulte du critère de Serre que  $\text{prof}(A) = 2$  (cf [Matsumura, 1989, ex. 17.3]). D'après le théorème

d'Auslander-Buchsbaum (cf [Matsumura, 1989, th. 19.1]),

$$\text{prof}(A) + \dim \text{proj}(A) = \text{prof}(R).$$

Il en résulte que le  $R$ -module  $A$  est nécessairement projectif, donc libre.

Faisant abstraction du groupe  $G$ , on fixe un entier  $n > 0$  et on montre que l'ensemble des revêtements étales de  $X'$  de degré  $n$  est fini.

On raisonne par l'absurde. Considérons une suite  $(P'_i \rightarrow X')_{i \in \mathbb{N}}$  de revêtements étales de degré  $n$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $P'_i$  est non  $X'$ -isomorphe à  $P'_j$ .

Soit  $K$  le corps des fractions de  $A$ . Pour tout entier  $i$ ,  $P'_i/X'$  correspond à une extension finie séparable  $L_i/K$ . On note  $B_i$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $L_i$ ,  $P_i = \text{Spec}(B_i)$ . Remarquons par ailleurs que d'après le lemme précédent,  $B_i/R$  est libre de rang  $nm$ .

**5.2.1. Questions de discriminant.** Rappelons la définition suivante :

**DÉFINITION 5.3.** Soit  $B/A$  une algèbre finie libre de rang  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $B/A$ . Le déterminant de la matrice  $(\text{Tr}_{B/A}(e_i e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  est appelé le discriminant de  $B/A$  relativement à  $\mathcal{B}$ . Sa classe dans le monoïde multiplicatif  $A/(A^\times)^2$  est indépendante de  $\mathcal{B}$ . On la note  $\text{disc}_{B/A}$ .

Par abus, on considérera la classe  $\text{disc}_{B/A}$  comme un élément de  $A$ . Rappelons que  $B/A$  est étale si et seulement si  $\text{disc}_{B/A}$  est inversible dans  $A$ . Par la suite, nous aurons besoin de la formule suivante (cf [Ramero, 2005, 2.1.4]) : Soit  $B/A$  et  $C/B$  deux algèbres finies libres. Soit  $n$  le rang de  $C/B$ . Alors,

$$\text{disc}_{C/A} = \text{disc}_{B/A}^n \cdot N_{B/A}(\text{disc}_{C/B}).$$

Revenant à la situation du numéro précédent, on considère un idéal  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1 de  $R$ . Soit  $A_{\mathfrak{p}}$  (resp.  $B_{i,\mathfrak{p}}$ ) l'anneau semi-localisé de  $A$  (resp.  $B_i$ ) correspondant à la fibre au-dessus de  $\mathfrak{p}$ .

Notons que  $A_{\mathfrak{p}}$  est normal de dimension 1. Il résulte du lemme 5.2 que  $B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}$  est libre de rang  $n$ . D'après la formule rappelée précédemment,

$$\text{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}} = \text{disc}_{A_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}}^n \cdot N_{A_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}}(\text{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}}).$$

Or  $A/R$  (resp.  $B_i/R$ ) est génériquement étale et  $B_{i,\mathfrak{p}}/A_{\mathfrak{p}}$  est étale. On déduit de la relation précédente que l'élément  $(\text{disc}_{B_i/R})(\text{disc}_{A/R}^n)^{-1}$  de  $K^\times$  appartient à  $R_{\mathfrak{p}}^\times$ . Comme ceci est valable pour tout  $\mathfrak{p}$  et que  $R$  est normal, on en déduit :

$$(5.a) \quad \frac{\text{disc}_{B_i/R}}{\text{disc}_{A/R}^n} \in R^\times$$

## 5.4. Lemme clé.

### 5.4.1. Ultraproduits.

**DÉFINITION 5.5.** Soit  $I$  un ensemble. Un ultrafiltre  $\mathcal{F}$  sur  $I$  est la donnée d'un ensemble de parties de  $I$  ordonné par inclusion vérifiant les propriétés suivantes :

- ((i))  $\forall F \in \mathcal{F}, \forall G \in \mathcal{P}(I), F \subset G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$ .
- ((ii))  $\forall F, G \in \mathcal{F}, F \cap G \in \mathcal{F}$ .
- ((iii))  $\forall F \in \mathcal{P}(I), F \in \mathcal{F}$  ou bien  $I \setminus F \in \mathcal{F}$ .
- ((iv))  $X \in \mathcal{F}$  et  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

**EXEMPLE 5.6.** Soit  $a$  un élément de  $I$ . Alors, l'ensemble des parties de  $I$  contenant  $a$  est un ultrafiltre  $\mathcal{F}$  de  $I$ . Dans ce cas, on dit que  $\mathcal{F}$  est *principal*.



D'après le lemme de Zorn, il existe des ultrafiltres non principaux sur un ensemble infini  $I$ .

**DÉFINITION 5.7.** Soit  $\mathcal{F}$  un ultrafiltre sur un ensemble  $I$  et  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant des limites inductives filtrantes et des produits.

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{C}$ . Le système inductif  $(\prod_{i \in F} X_i)_{F \in \mathcal{F}}$  est filtrant. On définit l'ultraproduit de  $(X_i)_{i \in I}$  suivant  $\mathcal{F}$  comme la limite inductive de ce système :

$$\prod_{i \in I/\mathcal{F}} X_i = \operatorname{colim}_{F \in \mathcal{F}} \left( \prod_{i \in I} X_i \right).$$

Si  $(X_i)_i$  est la famille constante de valeur un objet  $X$ , on note  $X^{I/\mathcal{F}}$  son ultraproduit, appelé l'ultrapuissance de  $X$  suivant  $\mathcal{F}$ . On dispose toujours de l'application diagonale  $X \rightarrow X^{I/\mathcal{F}}$ .

Nous utiliserons cette notion dans le cas des anneaux ou des modules. Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

**LEMME 5.8.** Soit  $I$  un ensemble et  $\mathcal{F}$  un ultrafiltre sur  $I$ .

Considérons une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'anneaux. On pose  $A_\infty = \prod_{i \in I/\mathcal{F}} A_i$ .

- (i) Si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est intègre (resp. un corps), il en est de même de  $A_\infty$ .
- (ii) Si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_i$ ,  $A_\infty$  est local d'idéal maximal  $\prod_{i \in I/\mathcal{F}} \mathfrak{m}_i$ .

Considérons une famille d'algèbres  $(B_i/A_i)_{i \in I}$ ,  $B_\infty/A_\infty$  son ultraproduit suivant  $\mathcal{F}$  :

- (iii) Si pour tout  $i \in I$ ,  $B_i/A_i$  est locale (resp. libre de rang  $m$ ), il en est de même de  $B_\infty/A_\infty$ .

Considérons un anneau  $A$ , et  $A_\infty = A^{I/\mathcal{F}}$  son ultrapuissance.

- (iv) Si  $M$  est un  $A$ -module de présentation finie,  $M \otimes_A A^{I/\mathcal{F}} = M^{I/\mathcal{F}}$ .
- (v) Si  $A$  est cohérent, l'application diagonale  $A \rightarrow A^{I/\mathcal{F}}$  est plate.

**5.8.1. Énoncé et conséquence du lemme clé.** Revenons à la situation qui nous occupe. Soit  $\mathcal{F}$  un ultrafiltre non principal sur  $\mathbb{N}$ . On note  $B_\infty$  (resp.  $A_\infty, R_\infty$ ) l'anneau local obtenu par ultraproduit suivant  $\mathcal{F}$  de  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (resp.  $A, R$ ). Soit  $\widehat{B}_\infty, \widehat{A}_\infty, \widehat{R}_\infty$  leurs complétions respectives. On en déduit les tours d'anneaux locaux suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} B_i & \longrightarrow & B_\infty & \longrightarrow & \widehat{B}_\infty \\ \uparrow & & \uparrow \varphi & & \uparrow \hat{\varphi} \\ A & \longrightarrow & A_\infty & \longrightarrow & \widehat{A}_\infty \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R & \longrightarrow & R_\infty & \longrightarrow & \widehat{R}_\infty \end{array}$$

Considérant le spectre des anneaux locaux sur les deux premières lignes, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} P_i & \longleftarrow & P_\infty & \longleftarrow & \widehat{P}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \hat{p} \\ X & \longleftarrow & X_\infty & \longleftarrow & \widehat{X}_\infty \end{array}$$

Considérant encore le spectre époinché des anneaux locaux  $A$ ,  $A_\infty$  et  $\widehat{A}_\infty$ , on obtient par changement de base le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} P'_i & \longleftarrow & P'_\infty & \longleftarrow & \widehat{P}'_\infty \\ \downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow \widehat{p}' \\ X' & \longleftarrow & X'_\infty & \longleftarrow & \widehat{X}'_\infty \end{array}$$

- LEMME 5.9. (1) Le schéma  $\widehat{X}_\infty$  est noethérien.  
 (2) Le morphisme  $\widehat{X}_\infty \rightarrow X$  est plat à fibre géométriques régulières.  
 (3) Le morphisme  $\widehat{X}_\infty \rightarrow X_\infty$  est une immersion fermée surjective sur les points fermés de  $X'_\infty$ .  
 (4) Le morphisme fini  $\widehat{p} : \widehat{P}_\infty \rightarrow \widehat{X}_\infty$  est étale au-dessus de  $\widehat{X}'_\infty$ .  
 (5) Le morphisme fini  $p : P_\infty \rightarrow X_\infty$  est étale au-dessus de  $X'_\infty$ .

Montrons pourquoi ce lemme permet de terminer la démonstration.

D'après la variante C2 du théorème de changement de base lisse (cf **XX-4.2.1**, cas (ii)) appliquée au morphisme  $X \rightarrow \widehat{X}_\infty$  et à l'ouvert  $\widehat{X}'_\infty$ , il existe un revêtement étale  $Q \rightarrow X'$  tel que  $\widehat{P}'_\infty \simeq Q \times_{X'} \widehat{X}'_\infty$ .

D'après le théorème de rigidité de Gabber (cf [G]) appliqué à  $A_\infty$ , le morphisme

$$H^1(X'_\infty, G) \rightarrow H^1(\widehat{X}'_\infty, G)$$

est un isomorphisme. Donc  $P'_\infty \simeq Q \times_{X'} X'_\infty$ .

Rappelons que le morphisme  $p'$  est la limite projective cofiltrante suivant les éléments  $F$  de l'ultrafiltre  $\mathcal{F}$  des morphismes canoniques

$$p'_F : \bigsqcup_{i \in F} P'_i \rightarrow \bigsqcup_{i \in F} X'.$$

Mais alors, les données étant de présentation finie sur  $X'$ , il existe un élément  $F$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\bigsqcup_{i \in F} P'_i \simeq \bigsqcup_{i \in F} Q$ . Ceci constitue une contradiction puisque,  $\mathcal{F}$  étant non principal,  $F$  contient au moins deux éléments.

**5.9.1. Preuve du lemme clé.**

*Assertion (1) :* Notons que l'idéal de l'anneau local  $A_\infty$  est de type fini. Dès lors, le complété  $\widehat{A}_\infty$  est noethérien d'après [ÉGA 0<sub>I</sub> 7.2.7, 7.2.8]. Il en est de même pour  $\widehat{R}_\infty$  et  $\widehat{B}_\infty$ .

*Assertion (2) :* D'après le critère de platitude par fibres (cf [ÉGA 4 11.3.10]), il suffit de montrer que pour tout entier  $l > 0$ ,  $A/m_A^l \rightarrow \widehat{A}_\infty/m_{A_\infty}^l$ . Or le membre de gauche n'est autre que  $(A/m_A^l)^{I/\mathcal{F}}$  qui est plat sur  $A/m_A^l$  car ce dernier est cohérent d'après la propriété (v) du lemme 5.8. Notons que l'extension résiduelle  $\kappa_A^{I/\mathcal{F}}/\kappa_A$  de  $A_\infty/A$  est séparable. En effet, pour toute extension finie  $L/\kappa_A$ ,  $L \otimes_{\kappa_A} \kappa_A^{I/\mathcal{F}} = L^{I/\mathcal{F}}$  est un corps d'après le point (i) du lemme 5.8. On peut alors conclure par application du *théorème de localisation de la lissité formelle* d'André (cf [André, 1974]).

*Assertion (3) :* Pour cette assertion, il suffit d'appliquer le lemme suivant à l'idéal maximal de  $A_\infty$ .

LEMME 5.10. Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal de type fini tel que  $I \subset \text{rad}(A)$ . Soit  $\widehat{A}$  le complété  $I$ -adique de  $A$ .

Alors le morphisme induit  $\text{Spec}(\widehat{A}) - V(I \cdot \widehat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A) - V(I)$  est surjectif sur les points fermés.

Pour ce lemme, on doit montrer que pour tout fermé  $Z \subset \text{Spec}(A)$ ,

$$Z \subset V(I) \Leftrightarrow f^{-1}(Z) \subset V(I.\hat{A}).$$

Comme  $I$  est de type fini, ceci équivaut à montrer que pour tout idéal  $J \subset A$ ,

$$\exists n > 0 \mid I^n \subset J \Leftrightarrow \exists n > 0 \mid I^n.\hat{A} \subset J.\hat{A}.$$

Or cela résulte facilement du lemme de Nakayama puisque pour tout  $m > 0$ ,  $I^m \subset \text{rad}(A)$ .

*Assertion (4) :* Remarquons d'abord que  $\widehat{A}_\infty$  est normal car  $A$  est normal et les fibres géométriques de  $A \rightarrow \widehat{A}_\infty$  sont régulières (cf [ÉGA 4 6.14.1]). Or,  $\widehat{B}_\infty/\widehat{R}_\infty$  est libre (de rang  $n.m$ ), donc sans torsion. Comme  $\widehat{A}_\infty/\widehat{R}_\infty$  est entière, on en déduit que  $\widehat{B}_\infty/\widehat{A}_\infty$  est sans torsion. Ainsi,  $\widehat{B}_\infty/\widehat{A}_\infty$  est plat.

Or, des relations (5.a) pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , on déduit

$$\frac{\text{disc}_{\widehat{B}_\infty/\widehat{R}_\infty}}{\text{disc}_{\widehat{A}_\infty/\widehat{R}_\infty}^n} \in \widehat{R}_\infty^\times$$

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal de hauteur 1 de  $\widehat{R}_\infty$ , l'extension  $(\widehat{B}_\infty)_\mathfrak{p}/(\widehat{A}_\infty)_\mathfrak{p}$  est sans torsion, donc libre. La relation précédente montre que  $\text{disc}_{(\widehat{B}_\infty)_\mathfrak{p}/(\widehat{A}_\infty)_\mathfrak{p}}$  est inversible ce qui prouve que  $(\widehat{B}_\infty)_\mathfrak{p}/(\widehat{A}_\infty)_\mathfrak{p}$  est étale, ce qui démontre (4).

*Assertion (5) :* D'après le critère de platitude par fibre (cf [ÉGA 4 11.3.10]), pour tout point  $x \in \widehat{X}'_\infty$ ,  $(P_\infty)_x/(X_\infty)_x$  est plat. Comme dans le point (4), la relation (5.a) permet de montrer que  $(P_\infty)_x/(X_\infty)_x$  est étale. La propriété (5) résulte donc du point (3).



## Bibliographie

- [Abbes & Gros, 2011a] Abbes, A. & Gros, M. (2011a). Sur la correspondance de Simpson p-adique. I : étude locale. Prépublication, [arXiv:1102.5466](https://arxiv.org/abs/1102.5466). [cité page(s) 183.]
- [Abbes & Gros, 2011b] Abbes, A. & Gros, M. (2011b). Topos co-évanescents et généralisations. Prépublication, [arxiv:1107.2380](https://arxiv.org/abs/1107.2380). [cité page(s) 183, 186.]
- [Abramovich & de Jong, 1997] Abramovich, D. & de Jong, A. J. (1997). Smoothness, semistability, and toroidal geometry. *J. Algebraic Geom.*, 6, 789–801. [cité page(s) 162.]
- [Abramovich et al., 2010] Abramovich, D., Denef, J., & Karu, K. (2010). Weak toroidalization over non-closed fields. [cité page(s) 170.]
- [Abramovich & Karu, 2000] Abramovich, D. & Karu, K. (2000). Weak semistable reduction in characteristic 0. *Invent. math.*, 139, 241–273. [cité page(s) 168.]
- [André, 1974] André, M. (1974). Localisation de la lissité formelle. *Manuscripta math.*, 13, 297–307. [cité page(s) 371, 404.]
- [Artin, 1968] Artin, M. (1968). On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.*, 5, 277–291. [cité page(s) 17.]
- [Artin, 1969] Artin, M. (1969). Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Inst. hautes études sci., Publ. math.*, (36), 23–58. [cité page(s) 17.]
- [Ayoub, 2006] Ayoub, J. (2006). *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*. Thèse, Université Paris 7 – Denis Diderot. [cité page(s) 238.]
- [Berger, 1995] Berger, C. (1995). Un groupoïde simplicial comme modèle de l’espace des chemins. *Bull. Soc. math. France*, 123(1), 1–32. [cité page(s) 385.]
- [Bierstone & Milman, 1997] Bierstone, E. & Milman, P. (1997). Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. Math.*, 128(2), 207–302. [cité page(s) 94.]
- [Bierstone et al., 2011] Bierstone, E., Milman, P., & Temkin, M. (2011).  $\mathbf{Q}$ -universal desingularization. *Asian Journal of Mathematics*, 15, 229–250. [cité page(s) 93, 94.]
- [Bosch et al., 1995] Bosch, S., Lütkebohmert, W., & Raynaud, M. (1995). Formal and rigid geometry. iv. the reduced fibre theorem. *Invent. math.*, 119, 361–398. [cité page(s) 169.]
- [Bourbaki, 1950] Bourbaki, N. (1950). *Éléments de mathématique. XI. Première partie : Les structures fondamentales de l’analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre IV : Polynômes et fractions rationnelles. Chapitre V : Corps commutatifs*. Hermann et Cie., Paris. Actualités Sci. Ind., no. 1102. [cité page(s) 21.]
- [Brodmann & Rotthaus, 1980] Brodmann, M. & Rotthaus, C. (1980). Über den regulären Ort in ausgezeichneten Ringen. *Math. Z.*, 175(1), 81–85. [cité page(s) 16.]
- [Conrad, 1999] Conrad, B. (1999). Irreducible components of rigid spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(2), 473–541. [cité page(s) 17.]
- [Conrad, 2000] Conrad, B. (2000). *Grothendieck duality and base change*, volume 1750 des *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Springer-Verlag. [cité page(s) 301.]
- [Conrad, 2007] Conrad, B. (2007). Deligne’s notes on Nagata compactification. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 22, 205–257. [cité page(s) 86, 150.]
- [Conrad & de Jong, 2002] Conrad, B. & de Jong, A. J. (2002). Approximation of versal deformations. *J. Algebra*, 255(2), 489–515. [cité page(s) 35, 39.]
- [Cossart et al., 2009] Cossart, V., Jannsen, U., & Saito, S. (2009). Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes. [cité page(s) 159.]
- [Crépeaux, 1967] Crépeaux, E. (1967). Une caractérisation des couples henséliens. *Enseignement math.*, 13, 273–279. [cité page(s) 64.]
- [de Jong, 1996] de Jong, A. J. (1996). Smoothness, semistability and alterations. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 83, 51–93. [cité page(s) 71, 78, 118, 135, 153, 158, 163.]

- [de Jong, 1997] de Jong, A. J. (1997). Families of curves and alterations. *Ann. Inst. Fourier*, 47(2), 599–621. [cité page(s) 2, 82, 131, 135, 149.]
- [Deitmar, 2005] Deitmar, A. (2005). Schemes over  $\mathbb{F}_1$ . In *Number fields and function fields—two parallel worlds*, volume 239 des *Progr. Math.* (pp. 87–100). Boston, MA : Birkhäuser Boston. [cité page(s) 98, 101.]
- [Deligne, 1974] Deligne, P. (1974). Théorie de Hodge. III. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (44), 5–77. [cité page(s) 192, 194, 196.]
- [Deligne, 1995] Deligne, P. (1995). Lettre à L. Illusie du 31 mars 1995. [cité page(s) 183, 186, 187.]
- [Ekedahl, 1985] Ekedahl, T. (1985). On the multiplicative properties of the de Rham-Witt complex. II. *Ark. Mat.*, 23(1), 53–102. [cité page(s) 205.]
- [Ekedahl, 1990] Ekedahl, T. (1990). On the adic formalism. In *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, volume 87 des *Progr. Math.* (pp. 197–218). Boston, MA : Birkhäuser Boston. [cité page(s) 204, 205.]
- [Elkik, 1973a] Elkik, R. (1973a). Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. sci. École norm. sup. (4)*, 6, 553–603. [cité page(s) 64.]
- [Elkik, 1973b] Elkik, R. (1973b). Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. sci. École norm. sup. (4)*, 6, 553–603. [cité page(s) 365.]
- [Epp, 1973] Epp, H. (1973). Eliminating wild ramification. *Invent. math.*, 19, 235–249. [cité page(s) 55, 56.]
- [Faltings, 1978] Faltings, G. (1978). Ein einfacher Beweis, dass geometrische Regularität formale Glattheit impliziert. *Arch. Math. (Basel)*, 30(3), 284–285. [cité page(s) 12.]
- [Faltings, 2002] Faltings, G. (2002). Almost étale extensions. In *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (pp. 185–270). : Société mathématique de France. Rédacteurs : P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, M. Rapoport, Astérisque 279. [cité page(s) 183.]
- [Faltings, 2005] Faltings, G. (2005). A p-adic Simpson correspondence. *Adv. Math.*, 198, 847–862. [cité page(s) 183.]
- [Fargues, 2009] Fargues, L. (2009). Filtration de monodromie et cycles évanescents formels. *Invent. math.*, 177(2), 281–305. [cité page(s) 204, 205.]
- [Ferrand, 1972] Ferrand, D. (1972). Monomorphismes et morphismes absolument plats. *Bull. Soc. math. France*, 100, 97–128. [cité page(s) 15.]
- [Ferrand & Raynaud, 1970] Ferrand, D. & Raynaud, M. (1970). Fibres formelles d’un anneau local noethérien. *Ann. sci. École norm. sup. (4)*, 3, 295–311. [cité page(s) 20, 368.]
- [Fujiwara, 1995] Fujiwara, K. (1995). Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.*, 80(1), 15–57. [cité page(s) 4, 5, 197, 220, 279, 332, 338, 342, 344, 373.]
- [Fujiwara, 2002] Fujiwara, K. (2002). A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In *Algebraic geometry 2000, Azumino* (pp. 153–183). Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 36. [cité page(s) 1, 5, 220, 225, 229, 234, 236, 243, 244, 245, 254.]
- [Fujiwara & Kato, 1995] Fujiwara, K. & Kato, K. (1995). Logarithmic étale topology theory. [cité page(s) 133.]
- [Fulton, 1993] Fulton, W. (1993). *Introduction to toric varieties*, volume 131 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. [cité page(s) 104.]
- [Fulton, 1998] Fulton, W. (1998). *Intersection theory*. Springer. [cité page(s) 234.]
- [Gabber, 1992] Gabber, O. (1992). K-theory of Henselian local rings and Henselian pairs. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 des *Contemp. Math.* (pp. 59–70). Amer. Math. Soc. [cité page(s) 64.]
- [Gabber, 1994] Gabber, O. (1994). Affine analog of the proper base change theorem. *Israel J. Math.*, 87(1-3), 325–335. [cité page(s) 362.]
- [Gabber, 2004] Gabber, O. (2004). Notes on some t-structures. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II* (pp. 711–734). Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin. [cité page(s) 257, 287.]
- [Gabber, 2005a] Gabber, O. (2005a). A finiteness theorem for non abelian  $H^1$  of excellent schemes. Notes d’un exposé donné à l’occasion de la conférence en l’honneur de Luc Illusie, Orsay. [cité page(s) 1, 4, 50.]
- [Gabber, 2005b] Gabber, O. (2005b). Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. Notes d’un exposé donné à l’occasion de la conférence en l’honneur de Pierre Deligne, Princeton. [cité page(s) 1, 5, 6, 33.]

- [Gabber, 2005c] Gabber, O. (2005c). Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. Conférence en l'honneur de Pierre Deligne à l'occasion de son soixante-et-unième anniversaire, Institute for Advanced Study, Princeton. [cité page(s) 225, 257.]
- [Gabber, 2007] Gabber, O. (2007). Lettre à Yves Laszlo du 23 mai 2007. [cité page(s) 16.]
- [Gabber & Orgogozo, 2008] Gabber, O. & Orgogozo, F. (2008). Sur la  $p$ -dimension des corps. *Invent. math.*, 174(1), 47–80. [cité page(s) 342.]
- [Gabber & Ramero, 2003] Gabber, O. & Ramero, L. (2003). *Almost ring theory*, volume 1800 des *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Springer-Verlag. [cité page(s) 259, 365, 366.]
- [Gabber & Ramero, 2009] Gabber, O. & Ramero, L. (2009). Foundations of  $p$ -adic Hodge theory. <http://arxiv.org/abs/math/0409584v6>. [cité page(s) 69, 82, 134, 138.]
- [Gabriel, 1962] Gabriel, P. (1962). Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. math. France*, 90, 323–448. [cité page(s) 305.]
- [Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*. Berlin : Springer-Verlag. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. [cité page(s) 181, 191, 192, 303, 357, 361, 363, 365, 371, 372, 377, 378, 379, 380, 381, 383, 384, 385.]
- [Giraud, 1972] Giraud, J. (1972). Classifying topos. In *Toposes, Algebraic Geometry and Logic* (pp. 43–56). Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, vol. 274. [cité page(s) 182.]
- [Goerss & Jardine, 1999] Goerss, P. G. & Jardine, J. F. (1999). *Simplicial homotopy theory*, volume 174 des *Progress in Mathematics*. Basel : Birkhäuser Verlag. [cité page(s) 319.]
- [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001] Goodwillie, T. G. & Lichtenbaum, S. (2001). A cohomological bound for the  $h$ -topology. *Amer. J. Math.*, 123(3), 425–443. [cité page(s) 2, 32.]
- [Greco, 1976] Greco, S. (1976). Two theorems on excellent rings. *Nagoya Math. J.*, 60, 139–149. [cité page(s) 16.]
- [Greco, 1982] Greco, S. (1982). A note on universally catenary rings. *Nagoya Math. J.*, 87, 95–100. [cité page(s) 17.]
- [Greco & Valabrega, 1974] Greco, S. & Valabrega, P. (1974). On the excellent property for strictly convergent power series over a complete non Archimedean valued field. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 108(3-4), 529–538. [cité page(s) 17.]
- [Grothendieck, 1957] Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. (2)*, 9, 119–221. [cité page(s) 322.]
- [Grothendieck, 1958a] Grothendieck, A. (1958a). La théorie des classes de Chern. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 86, 137–154. [cité page(s) 225.]
- [Grothendieck, 1958b] Grothendieck, A. (1958b). Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections. In *Anneaux de Chow et applications* : École normale supérieure. Séminaire Claude Chevalley, deuxième année. [cité page(s) 227.]
- [Grothendieck, 1966] Grothendieck, A. (1966). Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 28. [cité page(s) 163.]
- [Grothendieck, 1967] Grothendieck, A. (1967). Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 32. [cité page(s) 158, 163.]
- [Grothendieck, 1968] Grothendieck, A. (1968). Le groupe de Brauer III : exemples et compléments. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (pp. 88–188). : Masson et Cie, North-Holland. rédacteurs : J. Giraud, A. Grothendieck, S. L. Kleiman, M. Raynaud, J. Tate, *Advanced studies in Pure Mathematics* 3. [cité page(s) 333.]
- [Hartshorne, 1966] Hartshorne, R. (1966). *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. *Lecture Notes in Mathematics*, No. 20. Berlin : Springer-Verlag. [cité page(s) 301, 323.]
- [Heinzer et al., 1997] Heinzer, W., Rotthaus, C., & Wiegand, S. (1997). Noetherian rings between a semilocal domain and its completion. *J. Algebra*, 198(2), 627–655. [cité page(s) 337.]
- [Heinzer et al., 2004] Heinzer, W., Rotthaus, C., & Wiegand, S. (2004). Catenary local rings with geometrically normal formal fibers. In *Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000)* (pp. 497–510). Berlin : Springer. [cité page(s) 18.]
- [Hironaka, 1964] Hironaka, H. (1964). Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. i, ii. *Annals of Mathematics*, 79, 109–203, 205–326. [cité page(s) 159.]

- [Hovey, 2001] Hovey, M. (2001). Model category structures on chain complexes of sheaves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(6), 2441–2457. [cité page(s) 322.]
- [Illusie, 1972] Illusie, L. (1971-1972). *Complexes cotangent et déformations*. Berlin : Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 & 283. [cité page(s) 96.]
- [Illusie, 1983] Illusie, L. (1983). Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the de Rham-Witt complex. In *Algebraic geometry (Tôkyô/Kyôto, 1982)*, volume 1016 des *Lecture Notes in Math.* (pp. 20–72). Berlin : Springer. [cité page(s) 205.]
- [Illusie, 2002] Illusie, L. (2002). An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology. In *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (pp. 271–322). : Société mathématique de France. Rédacteurs : P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, M. Rapoport, Astérisque 279. [cité page(s) 71, 72, 148.]
- [Illusie, 2003] Illusie, L. (2003). Perversité et variation. *Manuscripta mathematica*, 112(3), 271–295. [cité page(s) 5, 197, 219, 224.]
- [Illusie, 2004] Illusie, L. (2004). On the semistable reduction and the calculation of nearby cycles. In *Geometric aspects of Dwork theory* (pp. 785–803). : Walter de Gruyter. Rédacteurs : Alan Adolphson, Francesco Baldassarri, Pierre Berthelot, Nicholas Katz, François Loeser. [cité page(s) 251.]
- [Illusie et al., 2005] Illusie, L., Kato, K., & Nakayama, C. (2005). Quasi-unipotent logarithmic riemann-hilbert correspondences. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 12, 1–66. [cité page(s) 168, 169, 170.]
- [Kato, 1988] Kato, K. (1988). Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. In *Algebraic analysis, geometry and number, Proceedings of the JAMI Inaugural Conference* (pp. 191–224). Baltimore and London : The John Hopkins University Press. Édité par Jun-Ichi Igusa. [cité page(s) 69, 136, 137, 138, 164, 166, 167, 168, 252.]
- [Kato, 1994] Kato, K. (1994). Toric singularities. *Amer. J. Math.*, 116(5), 1073–1099. [cité page(s) 2, 69, 70, 82, 97, 98, 102, 103, 108, 110, 111, 134, 136, 140, 142, 165.]
- [Katz & Laumon, 1985] Katz, N. M. & Laumon, G. (1985). Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, (62), 361–418. [cité page(s) 204.]
- [Kempf et al., 1973] Kempf, G., Knudsen, F. F., Mumford, D., & Saint-Donat, B. (1973). *Toroidal embeddings. I*. Berlin : Springer-Verlag. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. [cité page(s) 2.]
- [Kiehl, 1969] Kiehl, R. (1969). Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. *J. Reine Angew. Math.*, 234, 89–98. [cité page(s) 17.]
- [Kollár, 2007] Kollár, J. (2007). *Lectures on resolution of singularities*, volume 166 des *Annals of mathematics studies*. Princeton and Oxford : Princeton University Press. [cité page(s) 94.]
- [Lam, 1991] Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, volume 131 des *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag. [cité page(s) 307.]
- [Lam, 1999] Lam, T. Y. (1999). *Lectures on modules and rings*, volume 189 des *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag. [cité page(s) 307.]
- [Laumon, 1983] Laumon, G. (1983). Vanishing cycles over a base of dimension  $\geq 1$ . In *Algebraic Geometry, Proceedings, Tôkyô/Kyôto 1982*, Eds. M. Raynaud and T. Shioda, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1016 (pp. 143–150). Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer-Verlag. [cité page(s) 4, 171, 183, 185.]
- [Lipman, 1978] Lipman, J. (1978). Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math. (2)*, 107(1), 151–207. [cité page(s) 270, 398.]
- [Matsumura, 1980a] Matsumura, H. (1980a). *Commutative algebra*, volume 56 des *Mathematics Lecture Note Series*. Reading, Massachusetts : The Benjamin/Cummings Publishing Company. seconde édition. [cité page(s) 91, 104, 113, 207, 216.]
- [Matsumura, 1980b] Matsumura, H. (1980b). 可換環論. Tôkyô : 共立出版. [cité page(s) 49, 336, 410.]
- [Matsumura, 1988] Matsumura, H. (1988). On the dimension of formal fibres of a local ring. In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I* (pp. 261–266). Tokyo : Kinokuniya. [cité page(s) 8.]
- [Matsumura, 1989] Matsumura, H. (1989). *Commutative ring theory*, volume 8 des *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press, seconde édition. Traduit du texte original [Matsumura, 1980b] en japonais par M. Reid. [cité page(s) 12, 43, 208, 215, 399, 401, 402.]
- [Morel & Levine, 2001] Morel, F. & Levine, M. (2001). Cobordisme algébrique I. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris, Série I*, 332(8), 723–728. [cité page(s) 226.]



- [Nagata, 1958] Nagata, M. (1958). An example of a normal local ring which is analytically reducible. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.*, 31, 83–85. [cité page(s) 337.]
- [Nagata, 1962] Nagata, M. (1962). *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13. Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London. [cité page(s) 19, 20, 21, 336, 337, 351, 366, 392.]
- [Nakayama, 2009] Nakayama, C. (2009). Quasi-sections in log geometry. *Osaka J. Math*, 46, 1163–1173. [cité page(s) 148.]
- [Neeman, 2001] Neeman, A. (2001). *Triangulated categories*, volume 148 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton, NJ : Princeton University Press. [cité page(s) 200, 324.]
- [Nishimura & Nishimura, 1987] Nishimura, J.-i. & Nishimura, T. (1987). Ideal-adic completion of Noetherian rings. II. In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II* (pp. 453–467). Tôkyô : Kinokuniya. [cité page(s) 16, 17.]
- [Nisnevich, 1989] Nisnevich, Y. A. (1989). The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, volume 279 des *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* (pp. 241–342). Dordrecht : Kluwer Acad. Publ. [cité page(s) 26.]
- [Nizioł, 2006] Nizioł, W. (2006). Toric singularities : log-blow-ups and global resolutions. *J. Algebraic Geom.*, 15(1), 1–29. [cité page(s) 2, 69, 70, 82, 103, 107, 108, 110, 111, 112, 134.]
- [Ogoma, 1980] Ogoma, T. (1980). Noncatenary pseudogeometric normal rings. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 6(1), 147–163. [cité page(s) 19, 20.]
- [Ogus, 2012] Ogus, A. (2012). Lectures on logarithmic algebraic geometry. [math.berkeley.edu/~ogus/preprints/log\\_book/logbook.pdf](http://math.berkeley.edu/~ogus/preprints/log_book/logbook.pdf). [cité page(s) 98, 100, 101.]
- [Olivier, 1968] Olivier, J.-P. (1966-1968). Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits. *Séminaire Samuel. Algèbre commutative*, 2, Exp. 6. [cité page(s) 382.]
- [Olivier, 1971] Olivier, J.-P. (1971). Montée des propriétés par morphismes absolument plats. In *Comptes-Rendus des Journées d'Algre Pure et Appliquée (Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971)* (pp. 86–109). Montpellier : Univ. Sci. Tech. Languedoc. [cité page(s) 15.]
- [Orgogozo, 2003] Orgogozo, F. (2003). Altérations et groupe fondamental premier à p. *Bull. Soc. math. France*, 131, 123–147. [cité page(s) 192, 194, 198.]
- [Orgogozo, 2006] Orgogozo, F. (2006). Modifications et cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à un. *Int. Math. Res. Notices*, 2006, 1–38. [cité page(s) 28, 178, 183, 185.]
- [Orgogozo, 2011] Orgogozo, F. (2011). Sur les propriétés d'uniformité des images directes en cohomologie étale. Manuscrit non publié. [cité page(s) 204.]
- [Panin & Smyrnov, 2003] Panin, I. & Smyrnov, A. (2003). Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties II. <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0619/>. [cité page(s) 228.]
- [Popescu, 1986] Popescu, D. (1986). General Néron desingularization and approximation. *Nagoya Math. J.*, 104. [cité page(s) 36.]
- [Ramero, 2005] Ramero, L. (2005). Local monodromy in non-Archimedean analytic geometry. *Publ. math. Inst. hautes études sci.*, (102), 167–280. [cité page(s) 402.]
- [Rapoport & Zink, 1982] Rapoport, M. & Zink, T. (1982). Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. *Inventiones Mathematicae*, 68(1), 21–101. [cité page(s) 251.]
- [Ratliff, 1971] Ratliff, J. L. J. (1971). Characterizations of catenary rings. *Amer. J. Math.*, 93, 1070–1108. [cité page(s) 15.]
- [Raynaud, 1968] Raynaud, M. (1967-1968). *Un critère de effectivité de descente*, volume tome 2, Exp. No. 5. Séminaire Samuel, Algèbre commutative. [cité page(s) 88.]
- [Raynaud, 1970] Raynaud, M. (1970). *Anneaux locaux henséliens*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 169. Berlin : Springer-Verlag. [cité page(s) 64, 176.]
- [Raynaud & Gruson, 1971] Raynaud, M. & Gruson, L. (1971). Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module. *Invent. math.*, 13, 1–89. [cité page(s) 29, 157, 160, 335.]
- [Rotthaus, 1977] Rotthaus, C. (1977). Komplettierung semilokaler quasiausgezeichneter Ringe. *Nagoya Math. J.*, 76(2), 173–180. [cité page(s) 16.]
- [Rotthaus, 1979] Rotthaus, C. (1979). Universell japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort. *Nagoya Math. J.*, 74, 123–135. [cité page(s) 19, 20.]

- [Rotthaus, 1990] Rotthaus, C. (1990). Rings with approximation property. *Math. Ann.*, 287(3), 455–466. [cité page(s) 17.]
- [Rotthaus, 1991] Rotthaus, C. (1991). On rings with low-dimensional formal fibres. *J. Pure Appl. Algebra*, 71(2-3), 287–296. [cité page(s) 8.]
- [Rotthaus, 1997] Rotthaus, C. (1997). Excellent rings, henselian rings, and the approximation property. *Rocky Mountain J. Math.*, 27, 317–344. [cité page(s) 21.]
- [Šafarevič, 1966] Šafarevič, I. R. (1966). *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*. Notes by C. P. Ramanujam. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, No. 37. Bombay : Tata Institute of Fundamental Research. [cité page(s) 270, 271.]
- [Serre, 1965] Serre, J.-P. (1965). *Algèbre locale. Multiplicités*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 11. Berlin : Springer-Verlag. [cité page(s) 67, 251, 268.]
- [Serre, 1968] Serre, J.-P. (1968). *Corps locaux*. Paris : Hermann. Deuxième édition, publications de l'Université de Nancago, No. VIII. [cité page(s) 60.]
- [Serre, 1978] Serre, J.-P. (1978). *Représentations linéaires des groupes finis*. Collection Méthodes. Paris : Hermann. [cité page(s) 138.]
- [Serre, 1994] Serre, J.-P. (1994). *Cohomologie galoisienne*. Springer. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 5. [cité page(s) 247.]
- [Seydi, 1970] Seydi, H. (1970). Anneaux henséliens et conditions de chaînes. *Bull. Soc. Math. France*, 98, 9–31. [cité page(s) 16, 17, 20.]
- [Seydi, 1972] Seydi, H. (1972). Exemple d'un anneau local noethérien japonais normal qui n'est pas formellement réduit. *C.R. Acad. Sci.*, 274, 1334–1337. [cité page(s) 20.]
- [Spaltenstein, 1988] Spaltenstein, N. (1988). Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2), 121–154. [cité page(s) 318, 322.]
- [Spivakovsky, 1999] Spivakovsky, M. (1999). A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2), 381–444. [cité page(s) 18.]
- [Stix, 2002] Stix, J. (2002). *Projective Anabelian Curves in Positive Characteristic and Descent Theory for Log-Etale Covers*, volume 354 des *Bonner Mathematische Schriften*. Math. Inst. der Univ. [cité page(s) 71, 72.]
- [Swan, 1998] Swan, R. G. (1998). Néron-Popescu desingularization. In *Algebra and geometry (Taipei, 1995)*, volume 2 des *Lect. Algebra Geom.* (pp. 135–192). Int. Press, Cambridge, MA. [cité page(s) 17, 96, 281, 371.]
- [Temkin, 2008a] Temkin, M. (2008a). Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero. *Adv. Math.*, 219(2), 488–522. [cité page(s) 10.]
- [Temkin, 2008b] Temkin, M. (2008b). Desingularization of quasi-excellent schemes of characteristic zero. *Advances in Mathematics*, 219, 488–522. [cité page(s) 159, 169.]
- [Temkin, 2010] Temkin, M. (2010). Stable modification of relative curves. *Journal of Algebraic geometry*, 19, 603–677. [cité page(s) 135, 158, 160, 161.]
- [Temkin, 2011a] Temkin, M. (2011a). Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero : the non-embedded case. <http://arxiv.org/abs/0904.1592>. [cité page(s) 87, 92, 93.]
- [Temkin, 2011b] Temkin, M. (2011b). Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero : the non-embedded case. [cité page(s) 159.]
- [Tsuji, 1997] Tsuji, T. (1997). Saturated morphisms of logarithmic schemes. [cité page(s) 69, 166, 167.]
- [Vidal, 2001a] Vidal, I. (2001a). Groupe fondamental logarithmique. [cité page(s) 71.]
- [Vidal, 2001b] Vidal, I. (2001b). Log schémas réguliers. [cité page(s) 70.]
- [Vidal, 2004a] Vidal, I. (2004a). Théorie de Brauer et conducteur de Swan. *J. Algebraic Geometry*, 13, 349–391. [cité page(s) 135, 158.]
- [Vidal, 2004b] Vidal, I. (2004b). Théorie de Brauer et conducteur de Swan. *Journal of Algebraic Geometry*, 13(2), 349–391. [cité page(s) 149, 150, 153, 243, 254.]
- [Włodarczyk, 2005] Włodarczyk, J. (2005). Simple hironaka resolution in characteristic zero. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4), 779–822. [cité page(s) 94.]
- [Zariski & Samuel, 1975] Zariski, O. & Samuel, P. (1975). *Commutative algebra*. New York : Springer-Verlag. Graduate texts in mathematics, vol. 28 et 29. [cité page(s) 32, 210.]
- [Zheng, 2009] Zheng, W. (2009). Sur l'indépendance de  $\ell$  en cohomologie  $\ell$ -adique sur les corps locaux. *Ann. sci. Éc. norm. supér. (4)*, 42(2), 291–334. [cité page(s) 149, 153.]